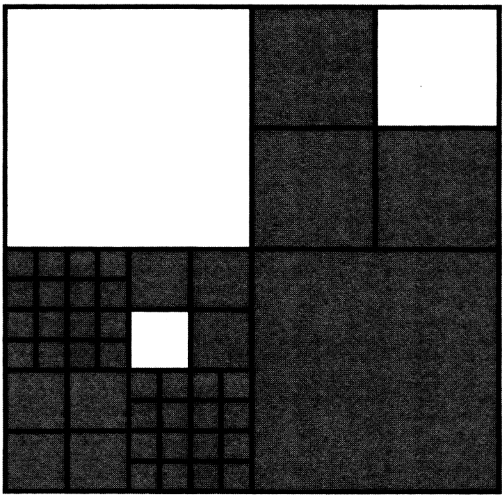
場の量子論と統計力学



江沢 洋＋新井朝雄 著

日本評論社

まえがき

場の量子論は，十数年前から，古典統計力学の問題に引き直して研究されるようになっています．その方法を組織だててレヴューしたのが，この『場の量子論と統計力学』です．

場の量子論は，1930年代に構想されましたが，やがて‘発散の困難’とよばれる基本的な難題に出会うことになりました．内部矛盾の露頭かとさえ思われるこの困難は，電磁場と電子の場をあつかう量子電磁力学の場合，1940年代の後半に発見された‘くりこみ’の処方によってひとまず回避され，この理論はおどろくべき精度で実験を再現することになって今日にいたっています．これを見ると，そこに何らかの真理が含まれていると考えたくなるのですが，しかし，数学的には困難はほとんど手つかずに残っているのです．

1950年代には，具体的なモデルの，根拠の明確でない近似による扱いをいったん離れて，場の量子論とは何であり，如何にあるべきかを探る「場の一般理論」の研究が，数学者の協力を得て開始されました．これはまた公理論的アプローチともよばれますが，場の量子論のもつべき一般的性質（公理）を数学的に明確に規定して，それらを包摂し得る数学的形式をさがし，その形式の中でどれだけの物理的帰結がひきだせるかを探ろうとするものです．その成果は，ボゴリューボフ他の『場の量子論の数学的方法』(江沢他訳，東京図書，新装版1980)にまとめられています．

私たちの『場の量子論と統計力学』も，スケッチ風の動機づけの後，いくつかの公理系をかかげて，それらの関係を検討するところからはじまります．しかし，力点は，歴史的にその次におこり現在にいたっている構成的アプローチにあります．

「構成的アプローチ」は，およそ20年前，公理論的アプローチが一段落して，公理系をみたすモデルは存在するかという問があらためて提起されたとき，はじまったのです．

いわゆる自由場は公理系をみたしますが，散乱現象をもたないので，物理としては不十分です．そこで，公理系をみたし散乱現象も含むモデルを数学的に疑義のない仕方で構成することが目標になります．ただし，実験にあうか否かはひとまずおいて，時空の次元さえ現実の4から‘時間1次元＋空間1次元’の2に減らして出発することになりました．それは，時空の次元が増すにつれて‘発散’の度合が増すため，当初の数学的技術で現実的なモデル（たとえば4次元時空の量子電磁力学）を数学的に厳密に解析することは難かしかったからです．簡単化したモデルからはじめて，腕を鍛えながら現実に近づくという戦略がとられたのです．

本書の主題をなす‘古典統計力学的な方法’は，この努力のなかで発見されたのでした．上に記した公理論的アプローチの途上で，場の量子論の公理系が Wightman の名でよばれる多変数超関数の系の性質として等価に言い表わせることが見いだされていました．この Wightman 超関数は Minkowski 空間の上に定義されていますが，これにある解析接続を施して Euclid 空間上の多変数関数にうつすことができ，Schwinger の名でよばれるこの関数の系の性質として場の量子論の公理系を等価に言い表わすこともできるのです．

ですから，それらの性質を備えた Schwinger 関数系を構成することが，すなわち場の量子論の構成になります．

ところが，そのような Schwinger 関数は，古典的な（可換な）場の積の，なにかある（場の関数空間の上の）確率測度による平均と見ることができるのです．

そして，Euclid 空間をいったん離散的な格子点（格子間隔 a）でおきかえますと，その確率測度は，各格子点に配置された古典的スピンからなる系に対する統計力学的 Boltzmann 因子とみなせる——それまで主として研究されてきた $(\phi^4)_\nu$ というモデルでは，そうなのです．ここで，ν は場をのせる Euclid 空間の次元を表わします．

こうして，場の量子論の $(\phi^4)_\nu$ モデルの研究は，ひとまず Euclid 格子空間上の古典スピン系の統計力学の研究に引き直されました．さらにいえば，格子空間も，はじめは有界な部分 Λ にのみスピンをのせるのです．

そこから Euclid 連続体の上の場にもどるためには，Λ を無限大にし a を 0

にする極限を Schwinger 関数についてとることになります．

この方法で，$\nu=2,3$ 次元空間の $(\phi^4)_\nu$ モデルは構成できて，場の量子論の公理系をみたし，トリヴィアルでない散乱現象をもつ，というだけでなく，物理的にも場のモデルに相応わしい諸性質を備えていることが明らかになりました．

しかし，現実の $\nu=4$ の場合に進んだとき，このモデルでは散乱がなくなってしまうという強い兆候が現われたのです．厳密な証明は，まだありません．$\nu>4$ では散乱のないことが証明されます．ここにいたって，どんな試みがなされているかを述べて，本書は終わります．

$(\phi^4)_4$ モデルが散乱に関してトリヴィアルであることの証明は，残された課題です．もし，このことが証明されても，そこから出発して次のノントリヴィアルな変形をさがす道もあるかもしれません．本書にまとめた方法は，また，他のモデル（たとえばゲージ場）を研究する場合の基礎としても役立つのです．数学それ自体としても興味があると思います．

数学としてみれば，場の量子論は，無限次元空間における解析のひとつと考えることができます．方程式論としては，無限個の変数の偏微分方程式の，あるいは汎関数微分方程式のモデルをあたえ，また，これと双対的に汎関数積分論や無限次元の確率過程の理論と密接な関連をもっています．本文では，あらわには述べませんでしたが，スカラー量子場のハミルトニアンは，無限次元の Schrödinger 型演算子とみなすこともできるのです．こうした興味からは，各章をほぼ独立に読むことも可能でしょう．

本書の多くの章には，古典統計力学にとっても重要な結果——たとえば相転移の存在条件——が含まれています．量子統計力学は割愛しました．しかし，その研究においても，第3,4章に述べた Fock 空間の方法が基本になることは言っておかなければなりません．

本書が，場の量子論や統計力学に興味をもつ物理や数学の研究者のお役に立ち，ひいては物理と数学の交流の進展の一助となることを願っております．

なお，本書は，まず，第1章を江沢，第2章以下を新井が書き，そのあと両名で修正を重ねて作り上げました．そのもとになったのは，学習院大学で続けてきたセミナーです．多くのアイデアをいただき，また励ましをいただいた南

條昌司さん，中村孔一さん，大矢雅則さん，中村 徹さんなど 参加者の皆さんにこの機会にお礼を申します．著者の一人，新井は，東京大学大学院に在学中，関数解析学や数理物理学の研究に導いていただき，いまも常々暖い励ましと適切な助言をいただいている黒田成俊先生（現在は学習院大学教授）に，この場をかりてお礼を申し上げます．

本書にはなお誤りや見落しが残っていないか心配です．お気づきの点は，どうかお知らせ下さいますようお願い致します．

1988年5月

江沢　洋
新井朝雄

目次

まえがき …… i
記号表 …… xi

第1章 場の量子論―スケッチ …… *1*
1.1 自由場の量子論――正準形式 …… *1*
1.2 相互作用の導入 …… *10*
1.3 伝播関数 …… *16*
1.4 摂動計算 …… *19*
1.5 くりこみ法と発散の困難 …… *26*
演習問題 …… *33*
文献 …… *34*

第2章 場の量子論の公理系 …… *36*
2.1 なぜ公理論的アプローチか …… *36*
2.2 準備 …… *42*
2.3 Gårding-Wightman の公理系 …… *44*
2.4 Wightman の公理系 …… *48*
2.5 Euclid 化 …… *54*
2.6 Osterwalder-Schrader の公理系 …… *59*
演習問題 …… *63*
文献 …… *64*

第3章 数学的準備 …… *67*
3.1 抽象 Fock 空間 …… *67*
3.2 Gauss 超過程 …… *79*

3.3 Fock 空間と Gauss 超過程の同等性 …… 93
3.4 演算子 $\Gamma(A)$ の性質 …… 94
3.5 正値性保存演算子の固有値 …… 103
演習問題 …… 109
文献 …… 109

第4章　自由場の量子論 …… 111
4.1 Fock 空間を用いる構成 …… 111
4.2 自由場の真空期待値——Wightman 超関数 …… 126
4.3 $L^2(\mathbf{R}^3)$ 上のボソン Fock 空間での表現 …… 122
4.4 Gauss 超過程としての時刻 0 の場 …… 132
4.5 Schwinger 関数と Euclid 場 …… 134
4.6 Feynman-Kac-Nelson (FKN) の公式 …… 141
4.7 L^p-不等式 …… 151
4.8 一般化された自由場 …… 154
演習問題 …… 157
文献 …… 158

第5章　格子スピン系の統計力学 …… 159
5.1 基本的な数学的枠組 …… 159
5.2 相互作用 …… 163
5.3 有界領域における格子スピン系 …… 169
5.4 無限体積極限——熱力学的極限 …… 178
5.5 無限系の平衡状態 …… 195
5.6 相転移と対称性の（自発的）破れ …… 208
演習問題 …… 214
文献 …… 215

第6章　鏡映正値性の方法 …… 217
6.1 鏡映正値性 …… 217

6.2　格子スピン系の鏡映正値性 …………………… *222*
6.3　碁盤目型の評価式 …………………… *233*
6.4　相転移への応用——赤外評価の方法 …………………… *240*
6.5　2点相関関数の単調減少性 …………………… *250*
演習問題…………………… *256*
文献…………………… *257*

第7章　相関不等式…………………… *250*
7.1　Ginibre の方法 …………………… *259*
7.2　Griffiths-Kelly-Sherman (GKS) 不等式 I, II
——強磁性スピン系の無限体積極限 …………………… *265*
7.3　Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) 不等式 …………………… *269*
7.4　Lebowitz の不等式と Griffiths-Hurst-Sherman (GHS) 不等式… *275*
7.5　Newman の不等式 …………………… *281*
演習問題…………………… *289*
文献…………………… *292*

第8章　格子上の $P(\phi)_\nu$ モデル…………………… *294*
8.1　はじめに——目標 …………………… *294*
8.2　有界領域での自由な Euclid 格子場 …………………… *297*
8.3　相互作用の導入と Schwinger 関数 …………………… *299*
8.4　無限体積極限＝熱力学的極限 …………………… *306*
8.5　格子場の正則性と局所観測量の無限体積極限 …………………… *318*
8.6　無限系のいくつかの性質 …………………… *326*
8.7　汎関数微分方程式による $P(\phi)_\nu$ 格子場理論の特徴づけ …………………… *331*
演習問題…………………… *335*
文献…………………… *336*

第9章　連続体上の $(\phi^{2N})_2$ 理論 …………………… *337*
9.1　はじめに …………………… *337*

9.2 相互作用の定義 ……… 343
9.3 切断ハミルトニアンの構成，物理的真空の存在と一意性 ……… 356
9.4 FKN 公式と Euclid 的 Gell'Mann-Low 公式 ……… 371
9.5 真空エネルギーの体積依存性と Van Hove-Miyatake 現象 ……… 374
9.6 ϕ_F の相対限界といくつかの評価式 ……… 381
9.7 有界領域における $(\phi^{2N})_2$-Euclid 場の理論 ……… 395
9.8 格子近似の収束 ……… 404
9.9 相関不等式 ……… 418
9.10 無限体積極限とその基本的性質——公理の検証 ……… 422
9.11 摂動級数の漸近性 ……… 429
9.12 散乱の存在，スペクトルなど ……… 432
9.13 モデルを特徴づける方程式 ……… 432
演習問題 ……… 440
文献 ……… 441

第10章　ランダム ウォーク表示とその応用 ……… 444
10.1 格子スピン系のランダム ウォーク表示 ……… 444
10.2 $(\phi^4)_\nu$ 理論への応用 ……… 455
10.3 統計力学への応用 ……… 478
演習問題 ……… 483
文献 ……… 484

第11章　$(\phi^4)_4$ 理論をめぐって ……… 486
11.1 正則化の仕方を変える方法 ……… 486
11.2 摂動論による方法 ……… 487
11.3 Fokker-Planck ハミルトニアンによる方法 ……… 488
11.4 解析接続による方法 ……… 492
11.5 その他 ……… 494
11.6 トリヴィアルにならないモデル ……… 495
文献 ……… 496

付録 1　基礎的不等式 ……………………………………………………500
付録 2　格子近似のラプラシアンとその性質 ………………………………502
付録 3　Gauss 超過程のコンディショニング ………………………………514

索引……………………………………………………………………………523

装訂＝海保 透

記号表

$A(f)$	消滅演算子	p. 71
$A^\dagger(f)$	生成演算子	p. 70
A	準局所（quasi-local）観測量の代数	p. 161
A^{F}	局所（local）観測量の代数	p. 160
A_Λ	有界領域 Λ における観測量の代数	p. 160
$A \leqslant B$	自己共役演算子 A, B の大小	p. 384
$a(f)$	$\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ 上のボソン Fock 空間上での消滅演算子	p. 122
$a^\dagger(f)$	—— 生成演算子	p. 122
$a(\boldsymbol{p})$	$a(f)$ の演算子値超関数核	p. 123
$a^\dagger(\boldsymbol{p})$	$a^\dagger(f)$ の ——	p. 123
$\mathbf{B}_a$	Brillouin 帯（zone）	p. 503
B_0	到達距離有限の相互作用からなる実線形空間	p. 164
B_1	$\|\cdot\|$ 有限の ——	p. 164
B_2	$\|\|\cdot\|\|$ 有限の ——	p. 164
C_a	格子近似のラプラシアンのレゾルヴェント（基本解）	p. 503
c	光速	p. 5
$d\Gamma(A)$	1粒子演算子 A の第2量子化	p. 68
$d\Gamma_n(A)$	$d\Gamma(A)$ の n 粒子部分空間への制限	p. 69
$d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}$	Dirichlet 境界条件つき Gauss 型確率測度	p. 298
$d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{F}}$	自由境界条件つき ——	p. 298
$d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}$	周期的境界条件つき ——	p. 298
$d\mu_m(p)$	$\mathbf{V}_m$ 上の不変測度	p. 68, 112
$d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$	Dirichlet 境界条件つき Euclid 場の測度	p. 399
$d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$	半 Dirichlet 境界条件つき ——	p. 403
$\Delta_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}$	境界条件Bつきの格子ラプラシアン	p. 297

$E(g)$	$H(g)$ のスペクトルの下限（真空のエネルギー）	p. 362, 370
$\mathbf{E}^{I}$	並進不変かつ局所的に絶対連続な状態の集合	p. 162
e_t	j_t の値域への射影演算子，$j_t j_t^*$	p. 142
E_t	Markov 的射影演算子，$\Gamma(e_t)$	p. 147
$E_{[a,b]}$	Markov 的射影演算子	p. 147
$:e^{\alpha f}:$	確率変数 f の指数関数の Wick 積	p. 83
$\mathcal{F}$	対称（ボソン）Fock 空間	p. 68
$\mathcal{F}(\mathsf{H})$	Hilbert 空間 H 上の ——	p. 68
$\mathcal{F}_n(\mathsf{H})$	$\mathcal{F}(\mathsf{H})$ の n 粒子部分空間	p. 68
$\mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$	$\mathcal{F}(\mathsf{H})$ の粒子数有限の部分空間	p. 68
$:f_1^{n_1}\cdots f_k^{n_k}:$	確率変数 f_i のベキの Wick 積	p. 82
$H(g)$	相互作用項を g により空間切断したハミルトニアン	p. 356
H_0	自由ハミルトニアン	p. 125, 133
$\hat{H}$	くりこまれたハミルトニアン	p. 372
$H_l^f(\lambda)$	$H(\lambda\chi_l)$，χ_l は $[-l/2, l/2]$ の特性関数	p. 381
$\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)$	$\mathbf{R}^4$ における Euclid 的自由場の指標空間	p. 137
$\mathsf{H}_{-1}(\Lambda)$	自由境界条件つきの，Λ における ——	p. 395
$\hat{\mathsf{H}}_{-1}(\Lambda)$	Dirichlet 条件つきの，Λ における ——	p. 396
$\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^\nu)$	時刻 0 の Minkowski 的自由場の指標空間	p. 132, 340
H_{C}	実 Hilbert 空間 H の複素化	p. 93
$\mathsf{H}_\alpha(\mathbf{R}^\nu)$	$\mathbf{R}^\nu$ 上の，次数 α の Sobolev 空間	p. 93
$\hbar$	（プランク定数 h）$/2\pi$	p. 3
j_t	時刻 t の超平面への制限，$j_t f=\delta_t\otimes f, f\in\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$	p. 147
J_t	多粒子系への j_t の拡張，$\Gamma(j_t)$	p. 141
$\mathsf{K}(\mathbf{R}^\nu)$	相互作用の空間切断のための試験関数の族	p. 340
$K^{\mathrm{HD}}(f)$	半 Dirichlet 境界条件による Schwinger 関数の母関数	p. 316
$K_\Lambda^{(\mathrm{B})}$	Λ における，境界条件 B つきの Schwinger 関数の母関数	p. 301
$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$	H を指標とする Gauss 超過程の測度 $d\mu_{0,\mathsf{H}}$ による L^2 空間	p. 87

$\mathsf{L}_+(\mathbf{C})$	複素 Lorentz 群	p. 56
$\mathsf{L}_+^\uparrow$	固有 (proper) Lorentz 群	p. 44
$\mathcal{N}_a$	格子空間上の Euclid 的自由場の指標空間	p. 405, 511
$\mathrm{O}(N)$	N 次の直交群	p. 169
P_Λ	$\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)^\perp$ への射影演算子	p. 396
$\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$	$\mathbf{Z}^\nu$ の有界な部分集合の全体	p. 159
$\mathcal{P}_n$	n 次の置換群	p. 67
$\mathsf{P}_+^\uparrow$	固有 (proper) Poincaré 群	p. 44
$\mathsf{R}(A)$, $\mathrm{Ran}\ A$	演算子 A の値域	p. 142, 506
$\dot{\mathbf{R}}$	実軸 $\mathbf{R}$ のコンパクト化	p. 89
$S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}$	境界条件 B つきの，有界領域 Λ の格子上の n 点 Schwinger 関数	p. 300
$S_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$	Dirichlet 境界条件つきの，有界領域 Λ 上の Schwinger 関数	p. 400
$S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$	半 Dirichlet 境界条件つきの ——	p. 403
$S_{\Lambda,\Lambda'}{}^{\mathrm{HD}}$	相互作用にある空間切断を施した —— ——	p. 404
$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 上の急減少関数の全体	p. 43
$\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$	$\mathbf{R}^\nu$ 上の実数値急減少関数の全体	p. 90
$\mathcal{S}_m$	次数 m の‘離散的 Sobolev 空間’	p. 321
$\mathcal{S}_r$	急減少実数列の全体	p. 322
$\mathcal{S}_r'$	緩増加実数列の全体 [$\mathcal{S}_r$ の双対空間]	p. 322
$\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$	$\mathbf{R}^\nu$ 上の実数値急減少関数の全体	p. 90
$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$	$\mathbf{R}^\nu$ 上の実数値緩増加超関数の全体 [$\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ の双対空間]	p. 91
$\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$	$\mathbf{Z}_a{}^\nu$ 上の急減少実数列の全体	p, 321
$\mathcal{S}_r'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$	$\mathbf{Z}_a{}^\nu$ 上の緩増加実数列の全体 [$\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ の双対空間]	p. 321
$\mathcal{S}_\neq(\mathbf{R}^{\nu n})$	$\mathcal{S}(\mathbf{R}^{\nu n})$ の部分空間 (2 変数が一致すれば 0)	p. 59
$\mathcal{S}'_\neq(\mathbf{R}^{\nu n})$	$\mathcal{S}_\neq(\mathbf{R}^{\nu n})$ の双対空間	p. 59
$\mathcal{S}_+(\mathbf{R}^{\nu n})$	$\mathcal{S}_\neq(\mathbf{R}^{\nu n})$ の部分空間 (時間が未来向き順序のときのみ，$\neq 0$)	p. 59

$\mathcal{T}_n^{\text{p.e.}}$	対称拡大領域	p. 57
$\mathcal{T}_n^{+}$	前方管状領域	p. 55
$\mathcal{T}_{n,\pi}^{\text{ext}}$	拡大された前方管状領域	p. 56
$\mathcal{T}_{n,\pi}^{+}$	置換された前方管状領域	p. 56
U_Λ^{D}	Dirichlet 場の相互作用	p. 400
$U_\Lambda^{\text{D}}(g)$	Dirichlet 場の，g で空間切断した相互作用	p. 398
$U_\Lambda^{(\text{B})}$	境界条件 B つきの，有界領域 Λ における格子場の相互作用	p. 299
$U_{\Lambda,\Lambda'}$	自由境界条件つきの格子場の，Λ' で空間切断した相互作用	p. 302, 404
u_a	Euclid 群のユニタリ表現	p. 138
$\mathbf{V}^+$	前方光円錐	p. 45
$\mathbf{V}_m^+$	質量 m のエネルギー－運動量双曲面	p. 68, 112
$\mathbf{Z}_2$	位数 2 の巡回群	p. 169
$\mathbf{Z}^\nu$	ν 次元格子空間	p. 159
$Z_\Lambda^{(\text{B})}$	境界条件 B つきの，有界領域 Λ に対する分配関数	p. 300
Z_Λ^{HD}	半 Dirichlet 境界条件つきの，　——	p. 300
Z_Λ^{HP}	半周期的境界条件つきの，　——	p. 300
$Z(f)$	切断なしの，Schwinger 関数の母汎関数	p. 424
$Z_\Lambda(f)$	自由境界条件つきの，有界領域 Λ に対する　——	p. 420
$Z_\Lambda^{\text{HD}}(f)$	半 Dirichlet 境界条件つきの，　——　——	p. 419
$Z_{\Lambda,\Lambda'}$	自由境界条件つきの，相互作用を Λ' で空間切断した格子場の分配関数	p. 302
$Z_{\Lambda,\Lambda'}^{\text{HD}}$	半 Dirichlet 境界条件つきの，　——	p. 302, 404
$\Gamma_n(A)$	1 粒子演算子 A の n 重テンソル積	p. 69
$\Gamma(A)$	$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(A)$	p. 69
$\Gamma_n(\mathsf{H})$	実 Hilbert 空間 H を指標とする Gauss 過程の n 次の Wick 積によって生成される閉部分空間	p. 87
$\Gamma_{\text{F}}(\mathsf{H})$	有限の n の $\Gamma_n(\mathsf{H})$ の直和	p. 88
$\Gamma(\mathsf{H})$	$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(\mathsf{H})$	p. 87

Δ_a	格子空間 $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ におけるラプラシアン　p. 502
$\Delta_m(x)$	質量 m の不変デルタ関数，Jordan-Pauli 関数　p. 118
$\Delta_m{}^{(+)}(x)$	$\Delta_m(x)$ の正振動数部分　p. 121
$\Delta^{\beta,\Phi}$	逆数温度 β，相互作用 Φ をもつ無限系の並進不変平衡状態の全体　p. 195
$\delta_{s,s'}$	Kronecker のデルタ　p. 3
μ	Compton 波長の逆数　p. 6
$\pi_t(f)$	$\phi_t(f)$ の正準共役場　p. 127
$\Phi(f)$	中性スカラー場の Segal 演算子　p. 73
$\Phi_m(f)$	質量 m の ――　p. 113, 119
$\phi(f)$	中性スカラー自由場　p. 124
	Euclid 的自由場　p. 150, 301
$\phi_{\mathrm{F}}(f)$	$=\phi_{\mathrm{F}}(0,f)$　$H_{-1/2}(\mathbf{R})$ を指標とする Gauss 超過程　p. 340
$\phi_{\mathrm{F}}(t,f)$	(Minkowski 的) 自由場　p. 150
$\phi_t(f)$	時刻 t における中性スカラー自由場　p. 124
$\phi_\Lambda(f)$	自由境界条件つきの Euclid 的自由場　p. 396
$\phi_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f)$	Dirichlet 境界条件つきの ――　p. 396
$\phi_\varepsilon(x)$	紫外切断された場　p. 344
$:\phi_\varepsilon{}^n(g):$	紫外切断された場 ϕ の n 次 Wick 積　p. 344
$:\phi^n(g):$	$:\phi_\varepsilon{}^n(g):$ の紫外切断を除いた極限　p. 346
$:\phi_{\mathrm{F},\varepsilon}(g):$	紫外切断された場 ϕ_{F} の n 次 Wick 積　p. 342
$:\phi_{\mathrm{F}}{}^n(g):$	$:\phi_{\mathrm{F},\varepsilon}{}^n(g):$ の紫外切断を除いた極限　p. 342
Ω_0	Fock 真空　p. 68
$\Omega_\Lambda=\underset{i\in\Lambda}{\times}\Omega_i$	Ω_i の直積空間　p. 159
ω	ウォーク　p. 444
$\|\omega\|$	ウォークの長さ　p. 444
$\underset{\sim}{\omega}$	ウォークのループ　p. 447
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Hilbert 空間の内積　p. 8, 44
$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$	有界領域 Λ における Dirichlet 状態　p. 400
$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$	―― 半 Dirichlet 状態　p. 305, 403

$\langle\cdot\rangle_{\Lambda,\beta}{}^{\mathrm{HD}}$　——　——，逆数温度 β　p. 327

$p\cdot x=\sum_{i=1}^{s}p^i x^i$　空間成分の Euclid 内積　p. 5

$px=p^0x^0+\sum_{i=1}^{s}p^i x^i$　Euclid 内積　p. 134

$(p,x)=p^0x^0-\sum_{i=1}^{s}p^i x^i$　Minkowski 内積　p. 43

$\overline{}$　複素共役　p. 8

第1章

場の量子論―スケッチ

1.1 自由場の量子論――正準形式

場の量子論は，はじめ‘空間の各点に分布し相互に結合している振動子たち’の量子力学として 1930 年前後に構想された．そこでは場の描像は単純明快で，その場を素粒子が走ってゆくのは，空間に並んだ振動子たちが隣から隣へと振動を受け渡してゆくことであった．しかし，その後，理論の整合的な定式化への模索のなかで，理論の描像も道具立ても大きく変化してしまった．本書で述べるのは，その新しい形式であって，それは必ずしもわかりやすいとはいえない．またこれが最終的な形式であるともいえない．この形式には有望な側面も少なくないが，なにか大きな革新が必要なようにも思われる．場の量子論の将来について確かな見通しはまだないのである．そこで，本論に入るまえに場の量子論の本来の構想とそれが出会った困難とを発見法的にスケッチしておくことにする*)．

振動子系の正準理論　場の量子力学に初めてまとまった形をあたえたのは Heisenberg-Pauli (1929, 1930) であった．彼らは電磁場を扱ったのだが，その考え方の要点は次のような簡単化したモデル**)で説明することができる．

本来は連続体と考えられる空間をひとまず3次元の立方格子（格子間隔 a）

---

*)　場の量子論の初期の歴史については朝永 (1974, 1983)，湯川 (1942) を見よ．
場の量子論の現在の形式の詳細は中西 (1975)，Itzykson and Zuber (1980)，Bogolubov and Shirkov (1976)．数学的吟味については綜報を含めて第2章に文献をあげる．

**)　これから説明するのは‘中性スカラー場’とよばれる場である．その量子化を最初に遂行したのは Pauli-Weisskopf (1934) であった．

でおきかえ，その格子点 s のうち立方体 V (一辺の長さ $L=(N+1)a$; N は自然数，図 1.1) に含まれるものだけに注目する．

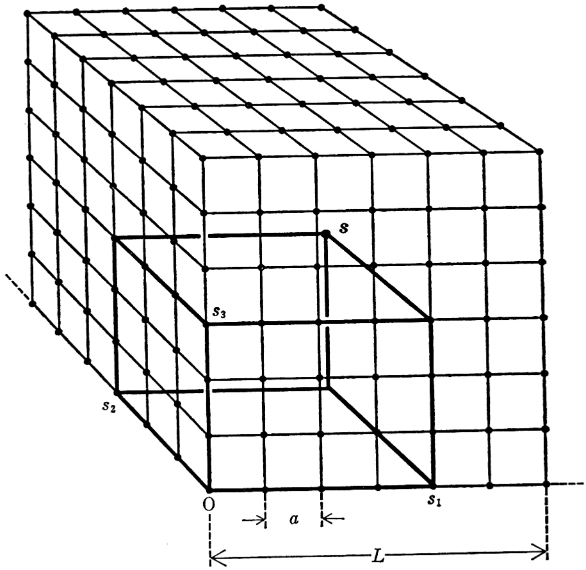


図 1.1　空間を格子でおきかえて出発

V の各格子点 s に一般化座標 q_s で記述される振動子が属するとし，この系のラグランジアンを

$$L_0{}^a(q,\dot{q})=\frac{a^3}{2}\sum_s\left[\dot{q}_s{}^2-\nu^2q_s{}^2-c^2\sum_{r(s)}\left(\frac{q_r-q_s}{a}\right)^2\right] \tag{1.1.1}$$

としよう*)．ここに $\dot{q}_s\equiv dq_s/dt$ であり，$q,\dot{q}$ は $\{q_s\},\{\dot{q}_s\}$ の総称，$c^2,\nu^2>0$ は定数，$\boldsymbol{r(s)}$ と付記した和は格子点 s の最近接格子点 $\boldsymbol{r}$ にわたり，s と付記した和は V の格子点全体にわたる．ただし，立方体 V の相対する面上にあって向かいあう格子点は同一視するものとする．

*)　$L_0{}^a$ はエネルギーの次元をもつべきだから，q_s などの次元は

$$[q_s]=M^{1/2}L^{-1/2},\qquad [\nu]=T^{-1},\qquad [c]=LT^{-1}$$

となる．ここに M,L,T は質量，長さ，時間の次元を表わす．

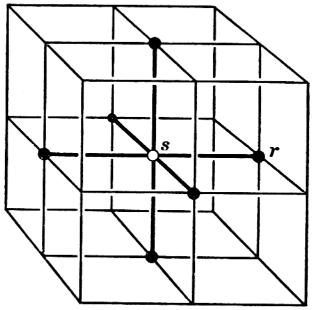


図 1.2 格子点 s の最近接格子点 r: 黒丸の 6 個の点

量子力学に移るには**古典力学**の正準形式を経由する．まず，(1. 1. 1) から q_s に‘正準共役’な運動量

$$p_s \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = a^3 \dot{q}_s \tag{1. 1. 2}$$

を定義し，これにより $\dot{q}_s$ を p_s で表わして振動子系のハミルトニアン

$$H_0{}^a(p, q) = \sum_s p_s \dot{q}_s - L_0{}^a \tag{1. 1. 3}$$

をつくると

$$H_0{}^a(p, q) = \frac{a^3}{2} \sum_s \left[\frac{p_s{}^2}{a^6} + \nu^2 q_s{}^2 + c^2 \sum_{r(s)} \left(\frac{q_r - q_s}{a} \right)^2 \right]. \tag{1. 1. 4}$$

古典力学では，これによって系の運動が初期条件から決定されるのである．

ここまでくれば**量子力学**に移ることができる．つまり古典力学的な系を量子化するわけで，それには正準変数 $\{q_s, p_s\}$ を正準交換関係 (canonical commutation relations, CCR)

$$\begin{aligned} [\hat{q}_s, \hat{p}_{s'}] &= i\hbar\delta_{s,s'} \\ [\hat{q}_s, \hat{q}_{s'}] = 0, \qquad & [\hat{p}_s, \hat{p}_{s'}] = 0 \end{aligned} \tag{1. 1. 5}$$

にしたがう自己共役演算子 $\{\hat{q}_s, \hat{p}_s\}$ と見直すのである*)．ただし，$\hbar$ はプランク定数の $(2\pi)^{-1}$ 倍**)．その結果，ハミルトニアンも演算子

*) $\delta_{s,s'}$ は Kronecker のデルタである：

$$\delta_{s,s'} = \begin{cases} 1 & s = s' \\ 0 & s \neq s' \end{cases}$$

**) この章では $\hbar$ と c とを書くが，次の章からは $\hbar = c = 1$ になる特別の単位系を用いる．

$$\hat{H}_0{}^a = \frac{a^3}{2}\sum_s\left[\frac{\hat{p}_s{}^2}{a^6}+\nu^2\hat{q}_s{}^2+c^2\sum_{r(s)}\left(\frac{\hat{q}_r-\hat{q}_s}{a}\right)^2\right] \tag{1.1.6}$$

になる．ただし，ここでは，これらの演算子の具体的構成——Hilbert 空間の設定，各演算子が自己共役となるようにそれぞれに定義域を定めること——には立ち入らない*)．

場の量子力学　場の担い手を格子点から連続体に変えるため Heisenberg-Pauli は次の手続きをとった．まず格子点 s の位置ベクトルを x_s とし

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_a(x_s) &\equiv \hat{q}_s,\\ \hat{\pi}_a(x_s) &\equiv a^{-3}\hat{p}_s\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

とおく．さしあたり関数 $\hat{\varphi}_a, \hat{\pi}_a$ は V 内の格子点の上でのみ定義されている．

これらを用いると，形式的に $a\to 0$ で $\hat{\varphi}_a\to\hat{\varphi}$, $\hat{\pi}_a\to\hat{\pi}$ として，ハミルトニアン (1.1.6) は

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\int_V\{\hat{\pi}^2(x)+c^2[\nabla\hat{\varphi}(x)]^2+\nu^2\hat{\varphi}^2(x)\}dx \tag{1.1.8}$$

となる**)．

他方，連続体 V 上の実数値関数 f, g をとり

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_a(f) &\equiv a^3\sum_s\hat{\varphi}_a(x_s)f(x_s),\\ \hat{\pi}_a(g) &\equiv a^3\sum_s\hat{\pi}_a(x_s)g(x_s)\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

をつくると，正準交換関係 (1.1.5) は

$$[\hat{\varphi}_a(f), \hat{\pi}_a(g)] = i\hbar a^3\sum_s f(x_s)g(x_s) \qquad \text{etc.} \tag{1.1.10}$$

となる．そして，$a\to 0$ の極限で，これまた形式的ながら (1.1.9) は

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(f) &= \int_V\hat{\varphi}(x)f(x)dx,\\ \hat{\pi}(g) &= \int_V\hat{\pi}(x)g(x)dx\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

---

*) 江沢 (1978) を参照．

**) $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$.

$\hat{\varphi}$ の次元は $\hat{q}_s$ のそれと同じであって，$[\hat{\varphi}] = M^{1/2}L^{-1/2}$.

$\hat{H}_0$ が演算子 $\hat{\pi}, \hat{\varphi}$ で書かれていることを明示するときは $\hat{H}_0(\hat{\pi}, \hat{\varphi})$ と書く．

となり，(1.1.10) は

$$[\hat{\varphi}(f), \hat{\pi}(g)] = i\hbar\int_V f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \qquad \text{etc.} \tag{1.1.12}$$

となる．

ここで，(1.1.7)のままでつくった交換関係 $[\hat{\varphi}_a(\boldsymbol{x}_s), \hat{\pi}_a(\boldsymbol{x}_{s'})] = i\hbar a^{-3}\delta_{s,s'}$ は $a\to 0$ の極限をもたないことに注意しよう．(1.1.11) において，関数 f, g をとり，それらの拡がりの範囲の $\boldsymbol{x}$ について均しをした演算子 (smeared operator) を導入したのはこのためであった．(1.1.12) は，f と g をはずせば

$$\begin{gathered}[\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}), \hat{\pi}(\boldsymbol{x}')] = i\hbar\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ [\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}), \hat{\varphi}(\boldsymbol{x}')] = 0, \qquad [\hat{\pi}(\boldsymbol{x}), \hat{\pi}(\boldsymbol{x}')] = 0\end{gathered} \tag{1.1.13}$$

と見られる．これは空間の各点に力学的自由度が属しているという描像にふさわしい．

これを用いて，ハミルトニアン (1.1.8) による $\hat{\varphi}$ と $\hat{\pi}$ の量子力学的な時間発展

$$\left.\begin{matrix}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) \\ \hat{\pi}(\boldsymbol{x}, t)\end{matrix}\right\} = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\left\{\begin{matrix}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}) \\ \hat{\pi}(\boldsymbol{x})\end{matrix}\right\}e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \tag{1.1.14}$$

を見ると

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = \hat{\pi}(\boldsymbol{x}, t), \tag{1.1.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\pi}(\boldsymbol{x}, t) = (c^2\varDelta-\nu^2)\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1.1.16}$$

が知れ*)，したがって

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\varDelta+\left(\frac{\nu}{c}\right)^2\right]\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = 0. \tag{1.1.17}$$

この式から c は光速にとるべきことがわかる．なぜなら，そのときに，そしてそのときに限って，この式が Lorentz 変換に関して共変になるからである．この式は Klein-Gordon の方程式とよばれ，$\hat{\varphi}$ が**波動**として伝播することを示している．伝播は $\nu=0$ なら明らかであるが，$\nu>0$ の場合にも

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k V}}\,[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_k t)}+\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_k t)}] \tag{1.1.18}$$

---

*) $\varDelta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

が (1.1.17) をみたす．ただし，

$$\omega_k \equiv c\sqrt{k^2+\mu^2}, \qquad \mu \equiv \nu/c$$

であり，$\boldsymbol{k}$ は，$\hat{\varphi}$ が図1.1の立方体に関して周期性境界条件をみたすべきことを要請するから

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n} \qquad [\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3),\ n_i \text{ は整数}]. \tag{1.1.19}$$

$\hat{a}_k{}^\dagger$ は演算子 $\hat{a}_k$ のエルミート共役である．もし $\hat{a}_k, \hat{a}_k{}^\dagger$ が

$$\begin{aligned} [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}{}^\dagger] &= \delta_{k,k'}, \\ [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] &= 0 \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

をみたすように構成できれば，(1.1.18) の $\hat{\varphi}$ とそれからつくった $\hat{\pi}=\dot{\hat{\varphi}}$ が正準交換関係 (1.1.13) をみたす．その構成法は次に述べる．$\hat{a}_k$ を Fock 空間とよばれる Hilbert 空間ではたらく演算子とするその構成法においては，演算子

$$\hat{N}_k = \hat{a}_k{}^\dagger \hat{a}_k \tag{1.1.21}$$

のスペクトルは離散的で 0, 1, 2, …… となる．

演算子 $\hat{a}_k{}^\dagger \hat{a}_k$ は粒子性に関わり，‘運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ をもつ粒子’ の数という物理的解釈をもつ．このことは場の全運動量の表式を見ればわかるが (問題1.3)，ハミルトニアンの形からも想像されよう．実際，(1.1.18) の $\hat{\varphi}$ と (1.1.15) でつくった $\hat{\pi}$ とを (1.1.8) に代入すると

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\omega_k(\hat{a}_k{}^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k{}^\dagger) \tag{1.1.22}$$

となり，$\hat{a}_k{}^\dagger \hat{a}_k$ が現われる．和は (1.1.19) の $\boldsymbol{k}$ 全体にわたる．これは，交換関係 (1.1.20) を用いれば

$$\hat{H}_0 = \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k{}^\dagger \hat{a}_k + E_0$$

とも書かれ，‘定数’

$$E_0 = \sum_k \hbar\omega_k/2$$

を別として，各 $\boldsymbol{k}$ ごとに ‘エネルギー $\hbar\omega_k$ をもつ粒子’ が $\hat{a}_k{}^\dagger \hat{a}_k$ 個いるときの全エネルギーという形をしている．そして $\hbar\omega_k = \sqrt{c^2(\hbar\boldsymbol{k})^2+(mc^2)^2}$ は，$\mu = mc/\hbar$ できまる質量 m の粒子が運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ で走っているときのエネルギーなのである (図1.3)．これでパラメーター μ も物理的意味がはっきりした．

こうして，場は，場の演算子 (1.1.18) によってその波動性が記述され，

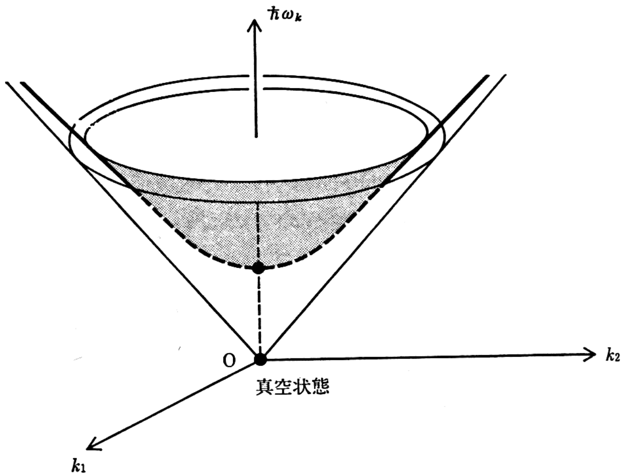


図 1.3 質量 m の自由粒子のエネルギー双曲面と真空状態のエネルギー．$\boldsymbol{k}$ の第3軸 k_3 は省略してある．

$\hat{a}_k^\dagger$ と $\hat{a}_k$（それぞれ生成演算子，消滅演算子とよばれる）により粒子性が記述される．

実は E_0 は無限大である．この種の無限大を避けるため‘生成演算子はすべて消滅演算子の左におく’積を導入し，記号：：で表わして **Wick 積**（あるいは normal product）とよぶ．たとえば

$$:\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger: = \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k.$$

一般に物理量を表わす演算子における $a_k^\dagger, a_k$ の積はこの意味のものと約束する．ハミルトニアンも，(1.1.22) の代わりに，Wick 積を用いた

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\omega_k:(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k+\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger):$$
$$=\sum_k \hbar\omega_k\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k \tag{1.1.23}$$

を採用することになる．(1.1.8) にも：：をつけるのである．

Fock 空間 交換関係 (1.1.20) をみたす演算子を構成するには，まずそれらが作用する Hilbert 空間を設定しなければならない．(1.1.19) の $\boldsymbol{k}$ は無限個あるが可算なので適当に番号をつけて $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \cdots$ としておく．その順に非負

の整数を並べた列に記号

$$u(n_1, n_2, \cdots) \equiv u(\{n_k\}) \tag{1.1.24}$$

を対応させる．ただし $\{n_k\}$ のうち0でないものは有限個であるとしておく (Fock 条件)．そして，内積

$$\langle u(n_1, n_2, \cdots),\ u(n_1', n_2', \cdots)\rangle = \delta_{n_1,n_1'}\delta_{n_2,n_2'}\cdots \tag{1.1.25}$$

を定める．数列 $\{n_k\}$, $\{n_k'\}$ の十分さきの方には0ばかり並ぶから，右辺が不定になる心配はない．さらに，線形結合

$$\Psi = \sum_{n_1,n_2,\cdots} \gamma_{n_1n_2\cdots} u(n_1, n_2, \cdots) \tag{1.1.26}$$

のうち，(1.1.25) から自然に定まる内積*)

$$\langle \Psi, \Psi' \rangle = \sum_{n_1,n_2,\cdots} \bar{\gamma}_{n_1n_2\cdots}\gamma'_{n_1n_2\cdots}$$

に関し

$$\langle \Psi, \Psi \rangle \equiv \|\Psi\|^2 < \infty$$

となるものの全体を——このノルム $\|\ \|$ に関する閉包をとった後——**Fock 空間** (Fock space) とよぶ**)．これは，(1.1.26) から自然に定まる線形演算を定義すると，Hilbert 空間になる．(1.1.24) はその正規直交基底で，この空間は Fock 条件により可付番の無限次元である***)．

そこで，消滅演算子の作用を基底へのそれ，すなわち

$$\begin{aligned} &\hat{a}_k u(0, 0, \cdots\cdots) = 0, \\ &\hat{a}_k u(\cdots, n_k, \cdots) = \sqrt{n_k}\, u(\cdots, n_k-1, \cdots) \qquad (n_k \neq 0) \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

によって定義する．$\hat{a}_k^\dagger$ については，$\hat{a}_k$ の共役であることから

$$\langle u(\cdots, n_k', \cdots),\ \hat{a}_k u(\cdots, n_k, \cdots)\rangle = \langle \hat{a}_k^\dagger u(\cdots, n_k', \cdots), u(\cdots, n_k, \cdots)\rangle$$

が任意の $u(\cdots, n_k', \cdots)$ に対してなりたつことが必要なので

$$\hat{a}_k^\dagger u(\cdots, n_k, \cdots) = \sqrt{n_k+1}\, u(\cdots, n_k+1, \cdots) \tag{1.1.28}$$

---

*) 内積 $\langle \Psi, \Phi \rangle$ は，物理の習慣にしたがって右側の Φ について線形，左側の Ψ について反線形とする．すなわち，複素共役を $^-$ で表わして

$$\langle \Psi, \alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 \rangle = \alpha_1\langle \Psi, \Phi_1\rangle + \alpha_2\langle \Psi, \Phi_2\rangle,$$
$$\langle \beta_1\Psi_1 + \beta_2\Psi_2, \Phi \rangle = \bar{\beta}_1\langle \Psi_1, \Phi\rangle + \bar{\beta}_2\langle \Psi_2, \Phi\rangle.$$

**) 詳しくは，江沢 (1978) を参照．

***) (1.1.24) の u は $0 \leqq x < 1$ なる2進法の有理数

$$x = 0.\underbrace{0\cdots0}_{n_1\text{個}}1\underbrace{0\cdots0}_{n_2\text{個}}10\cdots\cdots$$

と1対1に対応する．

でなければならない．逆に，こうであれば $\hat{a}_k^\dagger$ が $\hat{a}_k$ の共役であることの条件はみたされる——これは容易に確かめられるとおりである．(1.1.28) から

$$u(\cdots, n_k, \cdots) = \frac{1}{\sqrt{n_k!}}(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k} u(\cdots, 0, \cdots) \tag{1.1.29}$$

が知れる．また (1.1.27) に $\hat{a}_k^\dagger$ をかければ

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k u(\cdots, n_k, \cdots) = n_k u(\cdots, n_k, \cdots) \tag{1.1.30}$$

となるから，(1.1.28) に $\hat{a}_k$ をかけて差をとれば $[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger]$ がどの基底ベクトルに作用しても恒等演算子と同じ結果を生むことがわかる．ゆえに $[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger]=1$. 同様の計算から，Fock 空間で (1.1.27) のように定義した演算子 $\{\hat{a}_k\}$ が交換関係 (1.1.20) を具体化していることがわかる．これにより，(1.1.18) を通じて場も Fock 空間ではたらく演算子となり，正準交換関係 (1.1.13) を具体化する．これを場の正準交換関係の **Fock 表現** (Fock representation) とよぶ．ここでは，(1.1.24) の下に述べた Fock 条件が重要である．この条件があるので Wick 積で定義したハミルトニアン (1.1.23) は Fock 空間のなかに稠密な定義域 $\{u(\{n_k\}); \sum_k n_k < \infty\}$ をもち，自己共役演算子に拡大される．それはまた非負でもある．特に

$$\Omega = u(0, 0, \cdots\cdots) \tag{1.1.31}$$

とおけば，(1.1.27) から

$$\hat{a}_k \Omega = 0 \qquad (\text{すべての } \boldsymbol{k} \text{ に対し}) \tag{1.1.32}$$

となり，(1.1.23) に対し $\hat{H}_0 \Omega = 0$ となる．この状態ベクトル Ω は**無粒子状態** (no-particle state)，あるいは**自由場の真空** (free vacuum) とよばれる．Ω に $\{\hat{a}_k^\dagger\}$ の積をかけてゆくと Fock 空間の直交基底 (1.1.24) がすべてできる．

自由場の理論の成功　上に説明した理論は相互作用のない素粒子を記述する．実際，運動量 $\hbar \boldsymbol{k}_1$ の素粒子が n_1 個，$\hbar \boldsymbol{k}_2$ のものが n_2 個，……という状態 $u(n_1, n_2, \cdots\cdots)$ はハミルトニアンの固有状態になっていて，時間がたっても変化しない．相互作用なしの素粒子を記述するこの理論は，また自由場の理論ともよばれる．

その限りにおいて，この理論は成功した．量子論で早くからいわれていた粒子-波動の二重性を表現し得たばかりか，場の方程式 (1.1.17) も量子化の条

件 (1.1.13) も Lorentz 共変にできて*)，つまり量子論と相対論の融合を果たしている．さらに，ここでは説明しないが，素粒子のスピンと統計の関係（整数スピンの粒子は Bose 統計に，半整数スピンの粒子は Fermi 統計にしたがう）を導くこともできたのである．

しかし，一歩を進めて，素粒子の散乱現象を理論にとり入れようとしたとき困難がおこった．それについては節を改めて述べることにしよう．

1.2　相互作用の導入

現実の素粒子は，二つが接近すれば相互に影響しあって運動の向きや速さを変える．高エネルギーの衝突ではたくさんの粒子が発生して飛び散るということもおこる．こうした現象は**散乱** (scattering) と総称される．これは(1.1.8)に示した自由場のハミルトニアン $\hat{H}_0$ では記述できない．それを変更する仕方をきめるには，もちろん散乱現象の実験と相談しなければならないが，理論の整合性から何らかの——後に述べる‘くりこみ可能性’のような——制限がでてくる可能性もある．

漸近場　いま，新しいハミルトニアンを $\hat{H}$ とする．すると，場の時間発展は，(1.1.14) に代わって

$$\hat{\phi}(x,t)=e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{\phi}(x)e^{-i\hat{H}t/\hbar} \tag{1.2.1}$$

できまることになり，これが散乱現象などの記述をあたえるはずである．

散乱現象においては，粒子が遠方から飛来して標的で散乱され，再び遠方に飛び去るのである．したがって，時刻 $t\to\pm\infty$ では粒子たちは相互に遠く離れ，互いに影響しあうこともなくなって自由粒子のように振舞うはずであり，その反映として対応する場 (1.2.1) も $t\to\pm\infty$ では自由場のように振舞うはずである．このことは実際，後に述べる場の理論の公理系を認めれば証明することができる (Haag-Ruelle の散乱理論．［ボゴリューボフら，1980］を見よ)．そこで

$$\hat{\phi}(x,t)\underset{t\to-\infty}{\sim}\hat{\varphi}_{\rm in}(x,t) \tag{1.2.2}$$

---

*) ただし，$V\to\mathbf{R}^3$（空間全体）の極限をとった上で（次の節の末尾を参照）．

によって**入射場** (in-field) を導入しよう．これは自由場のハミルトニアン $\hat{H}_0(\hat{\varphi}_{\rm in}, \hat{\pi}_{\rm in})$ によって時間発展するはずである：

$$\hat{\varphi}_{\rm in}(\boldsymbol{x}, t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{\varphi}_{\rm in}(\boldsymbol{x}, 0)e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$$

$t \to -\infty$ の極限のとりかたについて，詳しくは後の (1.3.4), (1.3.5) を参照．$t \to \infty$ に対しても同様に**出力場** (out-field) が導入される．両者を合わせて**漸近場** (asymptotic field) という．これらに対して (1.2.1) の $\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ は Heisenberg 場とよばれる．

相互作用項 Heisenberg 場と入射場の関係を考えよう．入射場も，対応する運動量 $\pi_{\rm in}$ とともに正準交換関係 (1.1.13) をみたすべきことを考慮して

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) &= \hat{U}^{-1}(t)\hat{\varphi}_{\rm in}(\boldsymbol{x}, t)\hat{U}(t),\\ \hat{\pi}(\boldsymbol{x}, t) &= \hat{U}^{-1}(t)\hat{\pi}_{\rm in}(\boldsymbol{x}, t)\hat{U}(t)\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

とおいてみる*)．時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) = \hat{U}^{-1}\left[-\frac{d\hat{U}}{dt}\hat{U}^{-1} + \frac{i}{\hbar}\hat{H}_0(\hat{\varphi}_{\rm in}, \hat{\pi}_{\rm in}),\ \ \hat{\varphi}_{\rm in}(\boldsymbol{x}, t)\right]\hat{U}.$$

同じものは (1.2.1) からも計算され

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) &= \left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{\varphi}, \hat{\pi}),\ \ \hat{\varphi}\right]\\ &= \hat{U}^{-1}\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}(\hat{\varphi}_{\rm in}, \hat{\pi}_{\rm in}),\ \ \hat{\varphi}_{\rm in}\right]\hat{U}.\end{aligned}$$

ここで再び (1.2.3) を用いた．両者の比較から

$$i\hbar\frac{d\hat{U}}{dt} = [\hat{H}(\hat{\varphi}_{\rm in}, \hat{\pi}_{\rm in}) - \hat{H}_0(\hat{\varphi}_{\rm in}, \hat{\pi}_{\rm in})]\hat{U}. \tag{1.2.4}$$

であれば‘つじつまがあう’ことが知れる．そこで

$$\hat{H}(\hat{\varphi}_{\rm in}, \hat{\pi}_{\rm in}) - \hat{H}_0(\hat{\varphi}_{\rm in}, \hat{\pi}_{\rm in}) \equiv \lambda\hat{H}'(t) \tag{1.2.5}$$

---

*) 質点系（有限自由度）の量子力学においては正準交換関係 (1.1.5) をみたす 2 組の自己共役演算子 $\{\hat{q}_s, \hat{p}_s\}$, $\{\hat{q}_s', \hat{p}_s'\}$ は (Weyl の意味で) ユニタリ変換で結ばれる (von Neumann の定理)．歴史的には，このことが (1.2.3) の根拠とされたこともあるが，実は場の理論のような無限自由度の系の量子力学では，この定理はなりたたない．[江沢 (1978)] を参照．

ときには，また (1.2.4) の右辺に‘断熱因子’ $e^{-\varepsilon|t|}$ を補って $\hat{U}(t)$ を定め，これを用いて (1.2.3) で Heisenberg 描像の場を定めることも行なわれる．断熱因子によって極限 (1.2.2) を保証するのである．散乱行列などの計算が終わった後で $\varepsilon\downarrow 0$ の極限をとる．中西 (1975) はこの立場をとっている．

を相互作用ハミルトニアン (interaction Hamiltonian) とよぶ (λ: 実定数). これは $\hat{\varphi}_{\rm in}$ のみを含み $\hat{\pi}_{\rm in}$ を含まないとするのが普通である. たとえば

$$\hat{H}'(t)=\int_V :\varphi_{\rm in}{}^4(\boldsymbol{x},t):d\boldsymbol{x} \tag{1.2.6}$$

は $\boldsymbol{\varphi}^4$ **相互作用**とよばれ*), これを採用したモデルは $(\varphi^4)_\nu$ モデルとよばれる. ν はモデルを容れる時空の次元で, いま考えている実在の時空では $\nu=4$ である. (1.2.6) を詳しく書けば

$$\begin{aligned}\hat{H}'(t)=\frac{\hbar^2}{V}\sum_{p,q,r,s}\frac{1}{\sqrt{16\omega_p\omega_q\omega_r\omega_s}}\\ \times[\hat{a}_p{}^\dagger(t)\hat{a}_q{}^\dagger(t)\hat{a}_r{}^\dagger(t)\hat{a}_s{}^\dagger(t)+4\hat{a}_p{}^\dagger(t)\hat{a}_q{}^\dagger(t)\hat{a}_r{}^\dagger(t)\hat{a}_{-s}(t)\\ +6\hat{a}_p{}^\dagger(t)\hat{a}_q{}^\dagger(t)\hat{a}_{-r}(t)\hat{a}_{-s}(t)+4\hat{a}_p{}^\dagger(t)\hat{a}_{-q}(t)\hat{a}_{-r}(t)\hat{a}_{-s}(t)\\ +\hat{a}_{-p}(t)\hat{a}_{-q}(t)\hat{a}_{-r}(t)\hat{a}_{-s}(t)]\delta_{p+q+r+s,0}\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

となる. ここに

$$\begin{aligned}\hat{a}_k{}^\dagger(t)&=a_k{}^\dagger e^{i\omega_k t},\\ \hat{a}_k(t)&=\hat{a}_k e^{-i\omega_k t}\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

は入射場 $\hat{\varphi}_{\rm in}(\boldsymbol{x},t)$ を (1.1.18) のように展開したときの生成・消滅演算子である. Kronecker のデルタは

$$\int_V e^{i(p+q+r+s)x}\,dx=V\delta_{p+q+r+s,0} \tag{1.2.9}$$

から生じ, 相互作用における**運動量の保存**を意味する. 相互作用といっても, これは粒子の生成・消滅であって, (1.2.7) のたとえば $\hat{a}_p{}^\dagger\hat{a}_q{}^\dagger\hat{a}_{-r}\hat{a}_{-s}$ の項は運動量 $-\hbar\boldsymbol{s}$ と $-\hbar\boldsymbol{r}$ の粒子が衝突して消滅し, 代わって運動量 $\hbar\boldsymbol{p}$ と $\hbar\boldsymbol{q}$ の粒子が生成するという遷移を表わすものと解釈され, $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-(-\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s})=0$ は遷移の前後で運動量の総和が変わらないことを意味している.

微分方程式 (1.2.4) を解こう. (1.2.2) と (1.2.3) からして

$$\lim_{t\to-\infty}\hat{U}(t)=1$$

となるような解をさがすべきである. そこで, まず定時刻 t_0 を含む $\hat{U}(t,t_0)$ で, t に関して微分方程式 (1.2.4) をみたし,

*)　このとき, (1.2.5) の λ を $\lambda=(c^3/\hbar)\lambda'$ と書けば, λ' が無次元になる.

$$t = t_0 \quad で \quad \hat{U}(t, t_0) = 1 \tag{1.2.10}$$

となるものをもとめよう．それを用いて

$$\hat{U}(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \hat{U}(t, t_0)$$

とおくのである．

そのような解を結合定数 λ の形式的ベキ級数として書き下すのは容易である：

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \left(\frac{-i\lambda}{\hbar}\right) \int_{t_0}^{t} dt_1 \hat{H}'(t_1) + \left(\frac{-i\lambda}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}'(t_2) \hat{H}'(t_1) + \cdots\cdots \tag{1.2.11}$$

右辺の第 ν 項を第 ν 次近似の補正項とよび $\hat{U}^{(\nu)}(t, t_0)$ と書くことにしよう．

$t \geqq t_0$ の場合，これを次の形に書いておくと便利である：

$$\hat{U}^{(\nu)}(t, t_0) = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{-i\lambda}{\hbar}\right)^{\nu} \int_{t_0}^{t} dt_\nu \cdots \int_{t_0}^{t} dt_1 P[\hat{H}'(t_\nu), \cdots, \hat{H}'(t_1)]. \tag{1.2.12}$$

ここに P は**時刻による順序づけ** (chronological ordering) の命令であって，[…] 内の演算子を右から左へ時刻の過去から未来への順に並べる．たとえば

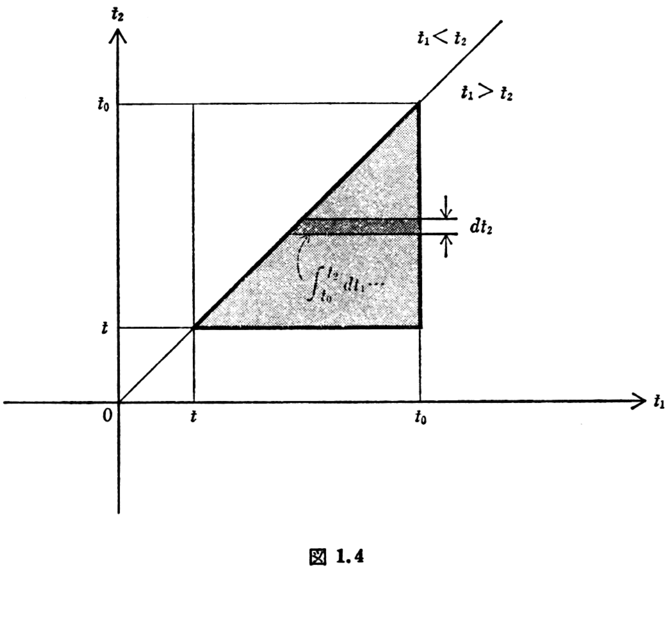


図 1.4

$$P[\hat{H}'(t_2), \hat{H}'(t_1)] = \begin{cases} \hat{H}'(t_2)\hat{H}'(t_1) & (t_2 > t_1) \\ \hat{H}'(t_1)\hat{H}'(t_2) & (t_2 < t_1) \end{cases}$$

であって，(1.2.12) の $\nu=2$ の場合は (t_1, t_2) が図 1.4 の 2 つの三角形のどちらに属するかで 2 項に分裂し

$$\hat{U}^{(2)}(t, t_0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{-i\lambda}{\hbar}\right)^2 \times\left[\int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}'(t_2)\hat{H}'(t_1) + \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_2}^{t} dt_1 \hat{H}'(t_1)\hat{H}'(t_2)\right]$$

となる．そして [⋯] 内の第 2 項は t_1, t_2 の呼び名を交換し，かつ積分順序を変えると第 1 項と同じになり，全体として (1.2.12) の $\nu=2$ の場合に一致することがわかる．$\nu \geqq 2$ についても同様である．

そこで (1.2.12) の和である (1.2.11) を

$$\hat{U}(t, t_0) = P\exp\left[-\frac{i\lambda}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \hat{H}'(s)ds\right] \qquad (t \geqq t_0) \qquad (1.2.13)$$

と書き，**時刻により順序づけした指数関数**(time-ordered exponential)とよぶ．

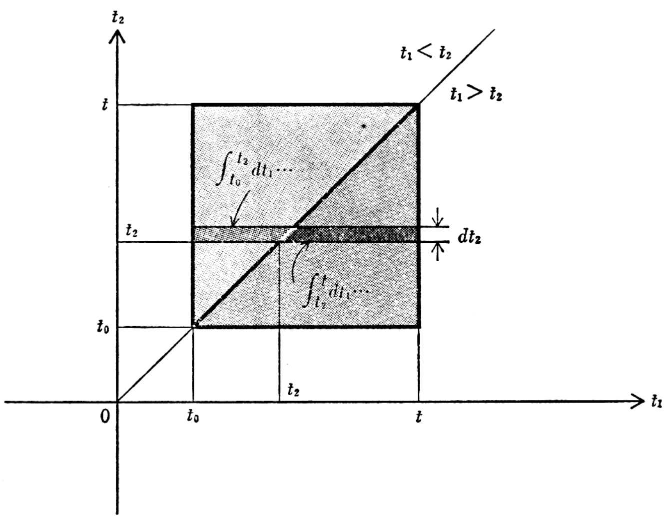


図 1.5

これまでは $t \geqslant t_0$ としてきたが，反対に $t \leqslant t_0$ としても (1.2.11) が微分方程式 (1.2.4) の解であることには変わりがない．しかし，(1.2.11) の被積分関数は，時刻と反対に順序づけられた積 (anti-time-ordered product) からなる．すなわち，演算子は右から左へ今度は時刻の未来から過去への順に並んでいる (図1.5を参照).

その式で t_0 と t の呼び名を交換し（したがって $t \geqslant t_0$ になる)，相互作用ハミルトニアンが自己共役であることに注意しつつ両辺の共役をとれば

$$
\begin{aligned}
\hat{U}(t_0, t)^\dagger = 1 &+ \left(\frac{i\lambda}{\hbar}\right)\int_t^{t_0} \hat{H}'(t_1)dt_1 \\
&+ \left(\frac{i\lambda}{\hbar}\right)^2 \int_t^{t_0} dt_2 \int_t^{t_2} dt_1 \hat{H}'(t_2)\hat{H}'(t_1) + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

となる．この式の右辺は時刻で順序づけられた積からなり，積分順序を変えると (1.2.11) の右辺に一致するので

$$
\hat{U}(t_0, t)^\dagger = \hat{U}(t, t_0) \tag{1.2.14}
$$

が知れる．これは $t \geqslant t_0$ として導いたのだが，両辺の共役をとればわかるとおり $t < t_0$ でもなりたつ．

また，いくらか面倒な計算になるけれども

$$
\hat{U}(t, t')\hat{U}(t', t'') = \hat{U}(t, t'') \tag{1.2.15}
$$

が t, t', t'' の大小関係の如何にかかわらずなりたつことも確かめられる．ここで $t'' = t$ とおけば

$$
\hat{U}(t', t)^{-1} = \hat{U}(t, t') = \hat{U}(t', t)^\dagger. \tag{1.2.16}
$$

が知れる．つまり，$\hat{U}(t, t')$ はユニタリ演算子なのである．

以上を要約して，$\{\hat{U}(t, t'); -\infty < t, t' < \infty\}$ はユニタリ変換の群をなす，ということができる．

このことは，実はもっと簡単にわかる．それには，微分方程式 (1.2.4) が，(1.2.5) で $t = 0$ としたものを H' として

$$
i\hbar\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = \lambda e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} H' e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{U}(t)
$$

と書けることを利用する．この方程式の解で初期条件 (1.2.10) をみたすものは (t_0 を t' と書き直して)

$$\hat{U}(t,t') = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\, e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar}\, e^{-i\hat{H}_0 t'/\hbar} \tag{1.2.17}$$

であたえられるのである．これを用いれば (1.2.15) は直ちに得られる．$\hat{H}_0$ と $\hat{H}$ の自己共役性を利用すれば (1.2.14), (1.2.16) も得られる．

体積無限大の極限　ここで，遅ればせながら，これまで場を閉じこめてきた体積 V をあらゆる方向に無限大に拡げることにしよう（より正確には $V\to\mathbf{R}^3$, 熱力学的極限)．そうすると，(1.1.18) の波数 $\boldsymbol{k}$ は連続変数に変わり，これまでの $\boldsymbol{k}$ に関する和は

$$\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k} \tag{1.2.18}$$

のように積分に変わる．生成・消滅演算子を

$$\begin{aligned} \sqrt{V}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}} &\longrightarrow (2\pi)^{3/2}\hat{a}(\boldsymbol{k}), \\ \sqrt{V}\,\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} &\longrightarrow (2\pi)^{3/2}\hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{k}) \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

と翻訳すれば，交換関係 (1.1.20) は

$$\left.\begin{aligned} [\hat{a}(\boldsymbol{k}), \hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{k}')] &= \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \\ [\hat{a}(\boldsymbol{k}), \hat{a}(\boldsymbol{k}')] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.20}$$

に変わり，場の演算子の展開 (1.1.18) は

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2(2\pi)^3\omega_{\boldsymbol{k}}}}\int d\boldsymbol{k}\,[\hat{a}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)} + \hat{a}^{\dagger}(\boldsymbol{k})e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}] \tag{1.2.21}$$

に変わる

これまでの計算を (1.2.18)—(1.2.21) にしたがって $V\to\infty$ の極限に直そうとすると，(1.2.20) のため Fock 空間の構成をはじめあちこちに δ 関数が現われ，もしかすると積の形になったりするかもしれない．それらを注意ぶかく扱うことは後の章にゆずり，なおしばらく形式的な計算を続けることにする．

1.3　伝播関数

伝播関数 (propagator) を次式で定義する．これはまたグリーン関数 (Green function) ともよばれる：

$$G_l(x_1, \cdots, x_l) = \langle \Omega,\ P[\hat{\phi}(x_1), \cdots, \hat{\phi}(x_l)]\Omega \rangle. \tag{1.3.1}$$

$(l=1, 2, \cdots)$. ここに Ω は入射場の Fock 表現における真空状態 (1.1.31) である. また $x=(x^0, \boldsymbol{x})=(ct, \boldsymbol{x})$.

伝播関数の物理的な意味を見よう. $\hat{\phi}(x)$ の漸近場はある質量 m の Klein-Gordon 方程式 (1.1.17) をみたすが, 同じ方程式をみたす任意の (複素数値の) 波束 $f(x)$ に対して*)

$$i\int \bar{f}(\boldsymbol{x}, t)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\hat{\varphi}_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x} = \mathrm{const.} \tag{1.3.2}$$

(すなわち, t に無関係) がなりたつ. $\hat{\varphi}_{\mathrm{out}}(x)$ についても同様である. ここに

$$A(x)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}B(x) = A(x)\frac{\partial B(x)}{\partial t} - \frac{\partial A(x)}{\partial t}B(x).$$

特に, 波束 $f(x)$ が '正の振動数' のみを含む場合, すなわち

$$f_+(x) = \int \sqrt{\frac{1}{2(2\pi)^3\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}}\, g(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}d\boldsymbol{k} \tag{1.3.3}$$

という形をしている場合には, (1.2.2), (1.3.2) により

$$\lim_{t\to-\infty} i\int \bar{f}_+(\boldsymbol{x}, t)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\hat{\phi}(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x} = \int \bar{g}(\boldsymbol{k})\hat{a}_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k} \tag{1.3.4}$$

がなりたつことになる. ここに $\hat{a}_{\mathrm{in}}$ は入射場 φ_{in} を (1.2.21) のように展開したとき現われる消滅演算子である. 生成演算子 $\hat{a}_{\mathrm{in}}{}^{\dagger}$ をとりだすには, '負の振動数' のみを含む波束 $f_-(x)$——(1.3.3) の $\omega_{\boldsymbol{k}}$ の前の符号をプラスに変えたもの——をとれば

$$\lim_{t\to-\infty} -i\int \bar{f}_-(\boldsymbol{x}, t)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}\hat{\phi}(\boldsymbol{x}, t)d\boldsymbol{x} = \int \bar{g}(\boldsymbol{k})\hat{a}_{\mathrm{in}}{}^{\dagger}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k} \tag{1.3.5}$$

がなりたつ. 出力場の生成・消滅演算子をとりだすには $t\to\infty$ の極限を同様にしてとればよい. これらの公式を利用すれば, 伝播関数 (1.3.1) の $l=4$ のものがあたえられたとき, 2粒子系が, 入射のときの状態

$$\Psi_{\mathrm{in}}[g_1, g_2] = \int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 g_1(\boldsymbol{k}_1)g_2(\boldsymbol{k}_2)\hat{a}_{\mathrm{in}}{}^{\dagger}(\boldsymbol{k}_1)\hat{a}_{\mathrm{in}}{}^{\dagger}(\boldsymbol{k}_2)\Omega$$

から散乱によって

---

*) $f(\boldsymbol{x}, t)$ は, $\boldsymbol{x}$ の関数として, たとえば $\mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ に属するものとしておく.

$$\Psi_{\text{out}}[g_3, g_4] = \int d\boldsymbol{k}_3 d\boldsymbol{k}_4 g_3(\boldsymbol{k}_3) g_4(\boldsymbol{k}_4)\, \hat{a}_{\text{out}}{}^{\dagger}(\boldsymbol{k}_3) \hat{a}_{\text{out}}{}^{\dagger}(\boldsymbol{k}_4) \Omega$$

に遷移する確率振幅 $\langle \Psi_{\text{out}}[g_3, g_4], \Psi_{\text{in}}[g_1, g_2] \rangle$ を算出することができる．終状態に3個以上の粒子が含まれる場合についても同様である．

さて，(1.2.3) と (1.2.13) を用いると伝播関数 (1.3.1) を次の形に書くことができる (**Gell-Mann – Low の公式**)：

$$G_l(x_1, \cdots, x_l) = \frac{\left\langle \Omega,\ P\left\{\varphi_{\text{in}}(x_1), \cdots, \varphi_{\text{in}}(x_l), \exp\left[-\dfrac{i\lambda}{\hbar}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}'(t)dt\right]\right\}\Omega \right\rangle}{\left\langle \Omega,\ P\exp\left[-\dfrac{i\lambda}{\hbar}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}'(t)dt\right]\Omega \right\rangle} \tag{1.3.6}$$

実際，たとえば $l=2$ の場合，(1.2.3) により $t_2 > t_1$ のとき

$$G_2(x_1, x_2)$$
$$= \langle \Omega,\ \hat{U}(-\infty, t_2)\hat{\varphi}_{\text{in}}(x_2)\hat{U}(t_2, -\infty)\hat{U}(-\infty, t_1)\hat{\varphi}_{\text{in}}(x_1)\hat{U}(t_1, -\infty)\Omega \rangle$$

と書ける．他方，真空状態に対しては

$$\hat{U}(\infty, -\infty)\Omega = e^{i\gamma}\Omega \qquad (\gamma：\text{実数}) \tag{1.3.7}$$

が期待される．なぜなら，無限の時間をかけておこる遷移はエネルギーを保存するので，真空状態のエネルギーが系のエネルギー・スペクトルの他の部分から離れて孤立しているなら，真空状態は他の状態に変わることができず，せいぜい位相の変化をこうむるだけになる．そして，エネルギー・スペクトルのその特徴は，系が質量ゼロの粒子を含まないかぎり，一般になりたつのである (図1.3を参照)．(1.3.7) のもとでは

$$\begin{aligned}\hat{U}(t_2, -\infty)\Omega &= \hat{U}(t_2, \infty)\hat{U}(\infty, -\infty)\Omega \\ &= e^{i\gamma}\hat{U}(t_2, \infty)\Omega\end{aligned}$$

と書くことができ

$$e^{i\gamma} = \langle \Omega,\ \hat{U}(\infty, -\infty)\Omega \rangle$$

もなりたつから

$$G_2(x_1, x_2) = \frac{\langle \Omega,\ \hat{U}(\infty, t_2)\hat{\varphi}_{\text{in}}(x_2)\hat{U}(t_2, t_1)\hat{\varphi}_{\text{in}}(x_1)\hat{U}(t_1, -\infty)\Omega \rangle}{\langle \Omega,\ \hat{U}(\infty, -\infty)\Omega \rangle} \qquad (t_2 > t_1) \tag{1.3.8}$$

を得る．$t_2<t_1$ のときには t_1 と t_2 を入れかえて考えればよいから，$l=2$ の場合の (1.3.6) が証明された．一般の n についても同様である．

1.4 摂動計算

Gell-Mann - Low の公式 (1.3.6) の $\hat{U}$ に摂動展開の公式 (1.2.12) を用いて伝播関数 G_l を計算しよう．事の本質を見失わないように簡単な $l=2$ の場合を考える．いま

$$G_2(x_1, x_2)=\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu \mathscr{N}^{(\nu)}(x_1, x_2)}{\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu \mathscr{D}^{(\nu)}} \tag{1.4.1}$$

とおけば*)

$$\lambda^\nu \mathscr{N}^{(\nu)}(x_1, x_2)$$
$$=\frac{1}{\nu!}\left(\frac{-i\lambda}{\hbar c}\right)^\nu\left\langle \Omega,\ P\left\{\hat{\varphi}(x_1), \hat{\varphi}(x_2), \int:\hat{\varphi}^4(y_1):d^4y_1, \cdots, \int:\hat{\varphi}^4(y_\nu):d^4y_\nu\right\}\Omega\right\rangle \tag{1.4.2}$$

であり，右辺から $\hat{\varphi}(x_1), \hat{\varphi}(x_2)$ を取り除くと $\lambda^\nu\mathscr{D}^{(\nu)}$ の表式になる．

$\mathscr{N}^{(0)}$ は自由場の伝播関数にほかならない．これを $(i\hbar/c)\Delta_{\mathrm{F}}$ と書く習慣である：

$$\mathscr{N}^{(0)}(x_1, x_2)=(i\hbar/c)\Delta_{\mathrm{F}}(x_1-x_2). \tag{1.4.3}$$

(1.1.18) を用いた簡単な計算により，これが確かに差 x_1-x_2 の関数であることがわかる：

$$(i\hbar/c)\Delta_{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\equiv\langle\Omega,\ \ P\{\hat{\varphi}(x_1), \hat{\varphi}(x_2)\}\Omega\rangle$$
$$=\frac{i\hbar}{c}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip^0(x_1{}^0-x_2{}^0)-i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}}{(p^0)^2-\boldsymbol{p}^2-\mu^2+i0}. \tag{1.4.4}$$

右辺で 0 は正の無限小を意味する．こうすると被積分関数は複素 p^0 平面上

$$cp^0=\omega_{\boldsymbol{p}}-i0, \qquad -\omega_{\boldsymbol{p}}+i0$$

に 1 位の極をもち，p^0-積分は $t_1>t_2$ のとき――上半平面に半円の積分路を補

*) 今後 $\varphi_{\mathrm{in}}(x)$ を単に $\varphi(x)$ と書く．$d^4y=dy^0d\boldsymbol{y}=cdtd\boldsymbol{y}$ に注意．

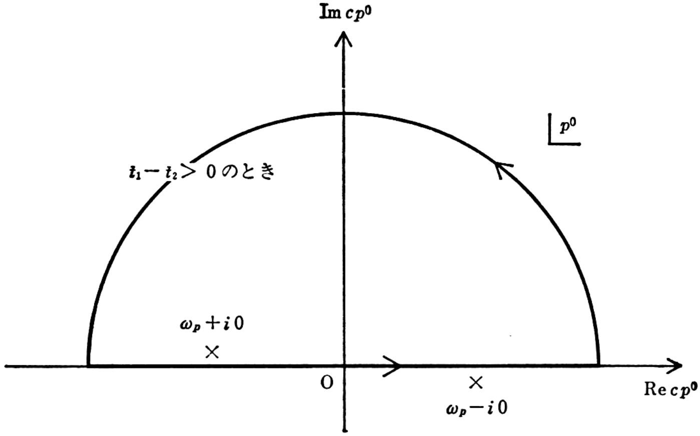


図 1.6　伝播関数の p^0-積分の積分路

えば――後者からの寄与を拾うことになる；$t_1<t_2$ なら前者からの寄与を拾うことになる（図1.6）．こうして，$t_1\gtrless t_2$ に応じ

$$(i\hbar/c)\varDelta_{\mathrm{F}}(x_1-x_2)=\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\hbar}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}e^{\mp[i\omega_{\boldsymbol{p}}(t_1-t_2)-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)]}\tag{1.4.5}$$

となり，本来（1.1.18）から得られる式に一致する．

なお，ここで対称性

$$\varDelta_{\mathrm{F}}(x_1-x_2)=\varDelta_{\mathrm{F}}(x_2-x_1)$$

がなりたつことを注意しておく．これは（1.4.5）からも読みとれるが，$\varDelta_{\mathrm{F}}$ の定義からすでに明らかである．

$\mathcal{N}^{(1)}$ の計算に進もう．それには次の **Wick の公式**が役に立つ：

$$\begin{aligned}
&P\{\varphi(x_1),\varphi(x_2),:\varphi^4(y):\}\\
&\quad=:\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}^4(y):\\
&\qquad+\langle\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\rangle:\hat{\varphi}^4(y):\\
&\qquad+{}_4\mathrm{P}_1\langle\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(y)\rangle:\hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}^3(y):+{}_4\mathrm{P}_1\langle\hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}(y)\rangle:\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}^3(y):\\
&\qquad+{}_4\mathrm{P}_2\langle\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(y)\rangle\langle\hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}(y)\rangle:\hat{\varphi}^2(y):
\end{aligned}\tag{1.4.6}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\langle\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\rangle&\equiv\langle\Omega,P[\hat{\varphi}(x),\hat{\varphi}(x')]\Omega\rangle\\
&=(i\hbar/c)\varDelta_{\mathrm{F}}(x-x')
\end{aligned}\tag{1.4.7}$$

であって，$\hat{\varphi}(x)$ と $\hat{\varphi}(x')$ との**縮約** (contraction) とよばれる．(1.4.6) では左辺の P 記号下にある場の演算子の縮約が 0 回，1 回，…… とあらゆる可能な仕方でつくられており，それぞれの場合に縮約に洩れた $\hat{\varphi}(x)$ は Wick 積にくくられている．ただし，もともと——左辺で——同一の Wick 積にくくられている場の演算子の間では縮約をしない．この規則により，Wick の定理は (1.4.6) に止まらず‘同時的 Wick 積たちの時間的に順序づけられた積’に対して一般になりたつのである．

(1.4.6) の場合にはどの項にも Wick 積があるので真空期待値をとると 0 になる．ゆえに

$$\lambda \mathcal{N}^{(1)}(x_1, x_2) = 0. \tag{1.4.8}$$

$\mathcal{N}^{(2)}$ の計算に進もう，Wick の公式によれば

$$\begin{aligned}
&P\{\hat{\varphi}(x_1), \hat{\varphi}(x_2), :\hat{\varphi}^4(y_1):, :\hat{\varphi}^4(y_2):\} \\
&\quad = \langle \hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\rangle \cdot {}_4\mathrm{P}_4 \langle \hat{\varphi}(y_1)\hat{\varphi}(y_2)\rangle^4 \\
&\qquad + {}_4\mathrm{P}_1 \langle \hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(y_1)\rangle \cdot {}_4\mathrm{P}_1 \langle \hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}(y_2)\rangle \cdot {}_3\mathrm{P}_3 \langle \hat{\varphi}(y_1)\hat{\varphi}(y_2)\rangle^3 \\
&\qquad + {}_4\mathrm{P}_1 \langle \hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(y_2)\rangle \cdot {}_4\mathrm{P}_1 \langle \hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}(y_1)\rangle \cdot {}_3\mathrm{P}_3 \langle \hat{\varphi}(y_1)\hat{\varphi}(y_2)\rangle^3 \\
&\qquad + \cdots\cdots.
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

ただし，…… は少なくとも 1 つの Wick 積を含み真空期待値をとると 0 になってしまう項である．それに対して，ここに書き出した項は，どれもすでに数値関数であるから真空期待値をとってもそのままでいる．それを y_1 と y_2 で積分して $(-i\lambda/\hbar c)^2$ をかければ (1.4.2) の $\lambda^2 \mathcal{N}^{(2)}(x_1, x_2)$ が得られる．

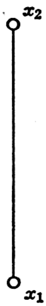


図 1.7 Feynman グラフ．伝播関数の第 0 次近似を表わすもの．

こうした計算を図 1.8 のような **‘Feynman グラフ’** で表わしておくと先に進

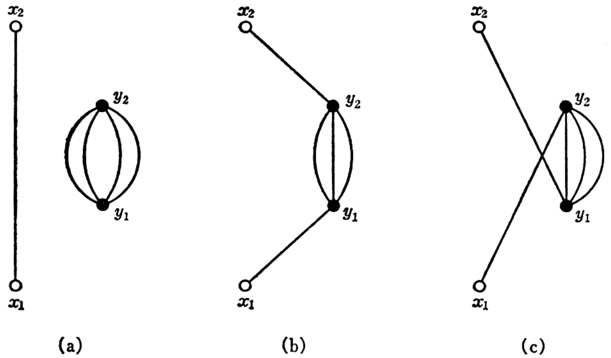


図 1.8　Feynman グラフ．伝播関数に対する2次の補正を表わすもの．

むのに見通しがつきやすい*)．すなわち，伝播関数 (1.4.1) の引数である x_1, x_2 と相互作用の積分変数である y_1, y_2 をそれぞれ点で表わし，縮約に応じて線で結ぶ．ついでに，先の λ^0 の項 $\mathcal{N}^{(0)}(x_1, x_2)$ もグラフにして図1.7に示す．こうしてできたグラフのうち，その上の任意の一点から出発して線をたどって他のどの点にも行けるものを**連結**グラフ (connected graph)，そうでないものを**非連結**グラフ (disconnected graph) とよぶ．

図1.8の (a) は非連結グラフで，2つの連結部分からなるが，(1.4.9) の右辺の第1項に対応し，相互作用に関わる y_1 と y_2 の積分をしてもそれぞれの連結部分に当る関数（ないし数）の積

$$\frac{i\hbar}{c}\Delta_{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\cdot{}_4\mathrm{P}_4\frac{1}{2!}\left(\frac{-i\lambda}{\hbar c}\right)^2\int\left\{\frac{i\hbar}{c}\Delta_{\mathrm{F}}(y_1-y_2)\right\}^4 d^4y_1d^4y_2$$

に因数分解しているのが特徴である．λ に関し高次の項でも $\Delta_{\mathrm{F}}(x_1, x_2)$ に比例するものがあることは容易に想像されよう．0次の (1.4.2) も含めて，それらを総和すると，グラフでいえば図1.9のとおりで

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x_1-x_2)\times\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu}\mathcal{D}^{(\nu)}$$

となる．すなわち，図1.9の {…} 内のグラフは，x_1, x_2 に結びつく外線をもたないことからわかるとおり，ちょうど (1.4.1) の右辺の分母に等しくなり，

*) Feynman グラフを Feynman ダイアグラムともいう．

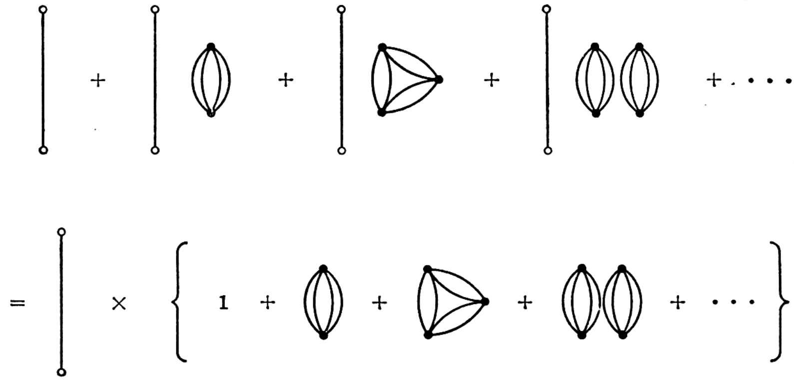


図 1.9 泡沫グラフをまとめる．x_1 または x_2 につながっている線（外線）が1本もない部分グラフを泡沫グラフ（bubble graph）という．

これを打ち消すのである．

同様の考察から，一般に（1.4.1）が

$$G_2(x_1, x_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu \mathcal{N}^{(\nu)}{}_{\text{conn}}(x_1, x_2) \tag{1.4.10}$$

のように簡単化されることがわかる．ここに conn は連結グラフの寄与のみをとることを意味する．あるいは（1.4.2）にもどって

$$G_2(x_1, x_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{-i\lambda}{\hbar c}\right)^\nu \times \left\langle \Omega, P\left\{\hat{\varphi}(x_1), \hat{\varphi}(x_2), \int :\hat{\varphi}^4(y_1): d^4y_1, \cdots, \int :\hat{\varphi}^4(y_\nu): d^4y_\nu\right\} \Omega \right\rangle_{\text{conn}}. \tag{1.4.11}$$

ここでも conn は Wick の定理にいう縮約をとるとき連結グラフに導くものに限ることを意味している．$\nu=2$ の項でいえば，これは（1.4.9）の第2項と第3項の寄与であり［図 1.8 の（b）と（c）］，まとめて

$$\lambda^2 \mathcal{N}^{(2)}{}_{\text{conn}}(x_1, x_2) = S_2\left(\frac{-i\lambda}{\hbar c}\right)^2 (i\hbar)^5 \int \Delta_{\text{F}}(x_1-y_1)\{\Delta_{\text{F}}(y_1-y_2)\}^3 \Delta_{\text{F}}(y_2-x_2) d^4y_1 d^4y_2 \tag{1.4.12}$$

と書くことができる．ただし

$$S_2=\frac{4\times 4\times 3!\times 2}{2!}=96$$

は，その由来から**組み合わせ因子**（symmetry factor）とよばれる．

$\varDelta_{\mathrm F}$ に (1.4.4) を代入して y_1 と y_2 に関する積分を実行すれば*)

$$\begin{aligned}\int e^{ipy}d^4y &= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p)\\ &\equiv (2\pi)^4\delta(p^0)\delta(\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

を利用して

$$\begin{aligned}&\lambda^2\mathcal{N}^{(2)}{}_{\mathrm{conn}}(x_1,x_2)\\ &\quad=S_2\left(\frac{-i\lambda}{\hbar c}\right)^2\int\frac{d^4kd^4k'}{(2\pi)^8}\,\frac{(i\hbar/c)e^{ikx_1}}{k^2-\mu^2+i0}\,\frac{(i\hbar/c)e^{-ikx_2}}{k'^2-\mu^2+i0}\\ &\quad\times\int\frac{d^4pd^4qd^4r}{(2\pi)^{12}}\,\frac{i\hbar/c}{p^2-\mu^2+i0}\,\frac{i\hbar/c}{q^2-\mu^2+i0}\,\frac{i\hbar/c}{r^2-\mu^2+i0}\\ &\quad\times(2\pi)^8\delta^{(4)}(k-p-q-r)\delta^{(4)}(p+q+r-k').\end{aligned}\tag{1.4.13}$$

したがって，伝播関数 (1.4.10) に対する2次の補正項は

$$\begin{aligned}&\lambda^2\mathcal{N}^{(2)}{}_{\mathrm{conn}}(x_1,x_2)\\ &\quad=\frac{i\hbar}{c}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{(k^2-\mu^2+i0)^2}\lambda^2\sigma^{(2)}(k^2)\end{aligned}\tag{1.4.14}$$

と書ける．ただし**)

$$\begin{aligned}&\sigma^{(2)}(k^2)\\ &\quad\equiv\left(\frac{i\hbar}{c^3}\right)^2S_2\int\frac{d^4pd^4q}{(2\pi)^8}\,\frac{1}{p^2-\mu^2+i0}\,\frac{1}{q^2-\mu^2+i0}\,\frac{1}{(k-p-q)^2-\mu^2+i0}.\end{aligned}\tag{1.4.15}$$

ここで，σ^2 の右辺の積分は k を $-k$ におきかえても値を変えない．積分がローレンツ不変なことと考え合わせて，これは k^2 の関数であることがわかるの

---

*)　$py=p^0y^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}$．この種の積を次章以下では (p,y) と書く．

**)　ここで σ と書いた量は，普通は大文字で Σ と書く．しかし，和の記号と紛らわしいので，ここでは小文字にした．

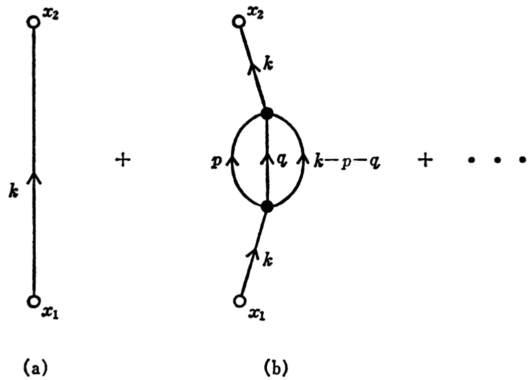


図 1.10 運動量表示の Feynman グラフ．伝播関数に対するもの．

である．

Feynman の規則 伝播関数の補正項に対して見出した上の表式のうち (1.4.13) は対応する図 1.10 のグラフ (b) (図 1.8 の (b) と (c) に相当) の構造によく照応している．実際，この表式は次の規則でグラフから直ちに構成することができるのである．ただし，**相互作用点** (vertex) とは $\lambda\hat{H}'$ のはたらく点のこと．グラフの**外線** (external line) とは伝播関数の引数 x_1, …… に結ばれている線を意味し，そうでない線は**内線** (internal line) とよぶ．これらの線には (任意に) 矢印をつけておく．くりかえすが，次の規則は (1.4.13) と図 1.10 の (b) とを照合しながら読んでいただきたい*)：

1. 外線，内線のそれぞれに 4 元運動量 $\hbar k, \hbar p$, …… をあてる．
2. 外線のそれぞれに $(i\hbar/c)e^{\pm ikx}/(k^2-\mu^2+i0)$ をあてる．ただし，複号はその線の矢印が点 x に向いているときマイナス，そうでないときプラスをとる．
3. 内線のそれぞれに $(i\hbar/c)/(p^2-\mu^2+i0)$ をあてる．
4. 相互作用点のそれぞれに $(-i\lambda/\hbar c)(2\pi)^4\delta^{(4)}(K)$ をあてる．ただし，K はその点に '流れ込む' 4 元運動量の総和 ('流れ出る' 運動量は負に数える；流れ込むか流れ出るかは線についている矢印の向きによってきめる)．

---

*) さらに立ち入った説明は，Bogolubov-Shirkov (1976), Nash (1978) などにある．

5. 以上の因子をかけあわせ，運動量のそれぞれについて $d^4q/(2\pi)^4$ により積分する.

6. 組み合わせ因子をかける.

この規則が伝播関数の第0次近似 (1.4.3) にもあてはまることに注意しよう. ただし，それに対応するグラフ［図 1.10 の (a)］の外線は点 x_1 を点 x_2 に結んでいるので，規則2を拡張解釈し，これに $(i\hbar/c)e^{ik(x_1-x_2)}/(k^2-\mu^2+i0)$ をあてなければならない.

上の規則は，高次補正のグラフにも当てはまる. ただし，規則の第0として次を加えた上で：——

0. 所要の外線をもつあらゆる連結グラフを描く. ただし，外線は固定しておくものとして，トポロジカルな変形で相互に移行しあうグラフは同一のものとみなす.

以上の 0.～6. を創案者の名に因んで摂動計算のための **Feynman の規則**とよぶ.

1.5 くりこみ法と発散の困難

伝播関数の2次補正項に現われた (1.4.15) の $\sigma^{(2)}(k^2)$ は積分の形をしているが，この積分は実は発散である. 発散の困難は摂動計算をもっと高次まで進めれば除かれるだろうか？

伝播関数の高次補正　これを表わす連結グラフは，どれも図 1.11 に示す一般的構造をもつ. すなわち，点 x_1 に始まる外線をたどってゆくと**既約部分** (irreducible part，図 1.11 の灰色のマル) に出会う；これは自身が連結で，その上，どの1本の内線を切っても2つの連結部分に分かれないようなもの. それを過ぎると，外線に出会い点 x_2 に行きついて終るか，あるいは内線が1本だけになって次の既約部分に橋渡しするか，いずれかになる.

一般に，伝播関数の高次補正のグラフはそれがもつ既約部分の数で分類される. 既約部分のないグラフは，つまり補正のない0次の伝播関数 (1.4.3) に対応し

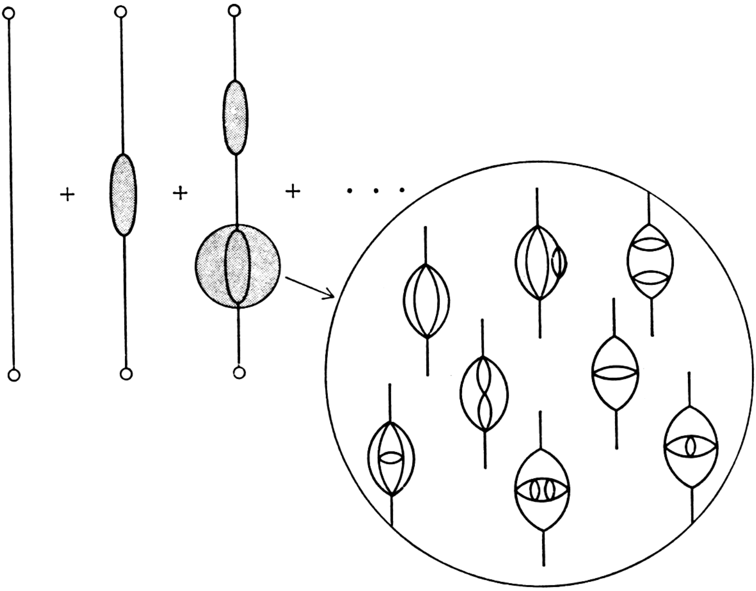


図 1.11 既約部分とその鎖

$$G^{[0]}(x_1, x_2) = \frac{i\hbar}{c}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-\mu^2+i0}. \tag{1.5.1}$$

既約部分が1つのグラフそれぞれの表式を Feynman の規則にしたがって書き下し，総和すると，次の形になる：

$$G^{[1]}(x_1, x_2) = \frac{i\hbar}{c}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-\mu^2+i0}\sigma(k^2)\frac{1}{k^2-\mu^2+i0}$$

Feynman の規則からみて σ は k^2 の関数になるはずなのである．さらに既約部分が2つのもの，3つのもの，…… を書き下して，全体の和をとれば，相互作用の効果を入れて完全に補正した伝播関数が得られる：

$$G(x_1, x_2) = \frac{i\hbar}{c}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-\mu^2+i0}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sigma(k^2)\frac{1}{k^2-\mu^2+i0}\right\}^n.$$

ここで，右辺のどの項にも共通の $\sigma(k^2)$ が現われることに注意しよう．こうして

$$G(x_1, x_2) = \frac{i\hbar}{c}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2-\mu^2-\sigma(k^2)+i0} \tag{1.5.2}$$

が得られた.

伝播関数のスペクトル表示　上の結果を系のエネルギー－運動量の演算子 $\{\hbar\hat{P}_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ と結びつけるために，それらの同時スペクトル分解を

$$\hat{P}_\mu = \int p_\mu d\hat{E}(p) \tag{1.5.3}$$

とする. $\{\hbar\hat{P}_\mu\}$ のスペクトルは，真空状態の孤立固有値 $\{\hbar p_\mu = 0\}$ を別にすれば，一般に連続で時間成分が正の時間的ベクトルのところにあるはずである(**スペクトル条件**):

$$(p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 > 0, \qquad p^0 > 0.$$

もしそうでないと，適当なローレンツ変換により系のエネルギー $\hbar cp^0$ が負にできることになり，真空の安定性がそこなわれる.

伝播関数を計算する手始めに

$$\begin{aligned}\langle \Omega,\ \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\Omega\rangle &= \langle e^{-i\hat{P}x_1}\hat{\phi}(0)\Omega,\ e^{i\hat{P}x_2}\hat{\phi}(0)\Omega\rangle \\ &= \int e^{-ip(x_1-x_2)} d\|\hat{E}(p)\phi(0)\Omega\|^2\end{aligned}$$

を見よう. $\hat{\phi}$ はスカラー場としているので，理論のローレンツ不変性から適当な $\rho(p^2) > 0$ によって

$$\begin{aligned}&d\|\hat{E}(p)\hat{\phi}(0)\Omega\|^2 \\ &\quad = \frac{\hbar}{(2\pi)^3 c}\rho(p^2)\theta(p^0)d^4p \\ &\quad = \frac{\hbar}{(2\pi)^3 c}\int \rho(\kappa^2)\delta(p^2-\kappa^2)\theta(p^0)d\kappa^2 d^4p\end{aligned}$$

と書くことができる*). よって

$$\begin{aligned}&\langle \Omega,\ \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\Omega\rangle \\ &\quad = \int d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\int \frac{\hbar d^4p}{(2\pi)^3 c}\delta(p^2-\kappa^2)\theta(p^0)e^{-ip(x_1-x_2)}.\end{aligned}$$

---

*) $\theta(p^0) = \begin{cases} 1 & (p^0 > 0) \\ 0 & (p^0 < 0) \end{cases}$

p_0 積分をすれば，$\omega_{p,\kappa}=c\sqrt{p^2+\kappa^2}$ として

$$\langle \Omega,\ \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\Omega\rangle$$
$$=\int d\kappa^2\rho(\kappa^2)\int\frac{dp}{(2\pi)^3}\frac{\hbar}{2\omega_{p,\kappa}}e^{-i[\omega_{p,\kappa}(t_1-t_2)-p\cdot(x_1-x_2)]}. \tag{1.5.4}$$

x_1 と x_2 を入れかえた場合も同様に計算して (1.4.5) と比較すれば，$l=2$ の伝播関数 (1.3.1) に対して

$$G(x_1,x_2)=\frac{i\hbar}{c}\int\Delta_{\mathrm{F}}(x_1-x_2\,;\,\kappa)\rho(\kappa^2)d\kappa^2 \tag{1.5.5}$$

が得られる．ここで (1.4.5) の μ を κ に変えたことを Δ_{F} に κ を書き添えて明示した．Δ_{F} に表示 (1.4.4) を用いれば

$$G(x_1,x_2)=\frac{i\hbar}{c}\int\rho(\kappa^2)d\kappa^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip(x_1-x_2)}}{p^2-\kappa^2+i0} \tag{1.5.6}$$

を得る．(1.5.5), (1.5.6) を伝播関数の**スペクトル表示** (spectral representation) とよび，ρ を**スペクトル関数** (spectral function) とよぶ．

質量のくりこみ 相互作用を考慮した伝播関数の計算結果 (1.5.2) をスペクトル表示 (1.5.6) と比較しよう．

前者において，その被積分関数がある $\mu_{\mathrm{r}}{}^2$ に等しい k^2 に極をもつならば，それが1重極だと仮定すると

$$k^2-\mu^2-\sigma(k^2)=(k^2-\mu_{\mathrm{r}}{}^2)Z_3{}^{-1}[1+(k^2-\mu_{\mathrm{r}}{}^2)\sigma_1(k^2)]^{-1} \tag{1.5.7}$$

の形に書けるから (σ_1は σ から決まる関数)

$$G(x_1,x_2)=\frac{i\hbar}{c}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{Z_3}{k^2-\mu_{\mathrm{r}}{}^2+i0}+Z_3\sigma_1(k^2)\right]e^{ik(x_1-x_2)} \tag{1.5.8}$$

となる．これは (1.5.6) のスペクトル関数が

$$\rho(\kappa^2)=Z_3\delta(\kappa^2-\mu_{\mathrm{r}}{}^2)+\cdots\cdots \tag{1.5.9}$$

のように δ 関数を含むことを意味している．そして，このことは場のエネルギー－運動量 $\{\hat{P}^\mu\}$ の同時スペクトルが

$$(p^0)^2-\boldsymbol{p}^2=\mu_{\mathrm{r}}{}^2 \tag{1.5.10}$$

をみたす点を含むことを示す．ローレンツ変換によりその点は (1.5.10) が運動量空間に定める回転双曲面 (図 1.3) の全体を動くから，スペクトルもその

全体にわたる．つまり，いま考えている場 $\hat{\phi}(x)$ は質量が $\hbar\mu_{\rm r}/c>0$ の粒子を記述するのである．この質量を**観測質量** (observed mass) とよぶ．これに対して，場のハミルトニアン $\hat{H}$ に (1.2.5) と (1.1.8) を通じて入っている質量項の $\hbar\mu/c$ を**裸の質量** (bare mass) とよぶ．

理論の記述する粒子の質量が裸の $\hbar\mu/c$ からずれるのは，裸の粒子が相互作用のため周囲に生成・消滅する粒子の雲をまとうからであるが，さきに説明した摂動計算にとって好ましいことではない．摂動計算は低次の結果がすでによい近似になることを期待して行なうものであるのに，伝播関数の第0次近似 (1.4.3), (1.5.1) と 'フーリエ変換の極の位置' が違い，これは場の理論の関心事である $t\to\pm\infty$ の漸近的振舞いに t とともに増す大きな違いとなって現われる．$Z_3\neq 1$ であれば，これも違いをひきおこす．

この問題を解決するのが**くりこみ法** (renormalization method) である．そこでは，ハイゼンベルク場 $\hat{\phi}$ を**くりこまれた場** (renormalized field) と称する

$$\hat{\phi}_{\rm r}(x)=Z_3^{-1/2}\hat{\phi}(x) \tag{1.5.11}$$

におきかえる．その伝播関数

$$G_{\rm r}(x_1,x_2)\equiv\langle\Omega,\ P[\hat{\phi}_{\rm r}(x_1),\hat{\phi}_{\rm r}(x_2)]\Omega\rangle \tag{1.5.12}$$

は，(1.5.8) の Z_3 が消えて，

$$G_{\rm r}(x_1,x_2)=\frac{i\hbar}{c}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{k^2-\mu_{\rm r}{}^2+i0}+\sigma_1(k^2)\right]e^{ik(x_1-x_2)} \tag{1.5.13}$$

となる．そして，$\sigma_1(k^2)$ が滑らかだとすれば，質量 $\hbar\mu_{\rm r}/c$ の Klein-Gordon 方程式の正振動数解である任意の波束 $f_+(x)$ に対し (1.3.4) と同様の意味で

$$\lim_{t_1\to-\infty}G_{\rm r}(x_1,x_2)=i\hbar\Delta_{\rm F}(x_1-x_2\,;\,\mu_{\rm r}) \tag{1.5.14}$$

となり，入射場との関係

$$\lim_{t_1\to-\infty}\hat{\phi}_{\rm r}(x)=\varphi_{\rm in}(x) \tag{1.5.15}$$

を示唆する*)．ここに，$\varphi_{\rm in}(x)$ は質量 $\hbar\mu_{\rm r}/c$ に相当する自由場である．

くりこみ法においては，そこでハミルトニアンを摂動項と非摂動項に分ける仕方を (1.2.5) とは変えて

$$\hat{H} = \hat{H}_{0,\mathrm{r}} + \hat{H}_{\mathrm{r}}' + \hat{H}_{\mathrm{r}}'' \tag{1.5.16}$$

とする．ここに

$$\hat{H}_{0,\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\int : \{\hat{\pi}^2(x) + c^2[\nabla\hat{\varphi}(x)]^2 + \mu_{\mathrm{r}}{}^2\hat{\varphi}^2(x)\} : dx, \tag{1.5.17}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{r}}' = \lambda_{\mathrm{r}}\int : \hat{\varphi}^4(x) : dx, \tag{1.5.18}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{r}}'' = \int : \Big[(Z_1-1)\lambda_{\mathrm{r}}\hat{\varphi}^4(x) - \frac{1}{2}Z_3\delta\mu^2\hat{\varphi}^2(x) + \frac{Z_3-1}{2}\{\hat{\pi}^2(x) + c^2[\nabla\hat{\varphi}(x)]^2 + \mu_{\mathrm{r}}{}^2\hat{\varphi}^2(x)\}\Big] : dx \tag{1.5.19}$$

摂動項 $\hat{H}_{\mathrm{r}}''$ をこのようにとる基本の考えは，$-\delta\mu^2$ を適当にとることにより相互作用用項 $\hat{H}_{\mathrm{r}}'$ によって生ずる質量のずれを摂動計算の各次数で消してゆき，同様に伝播関数に生ずる規格化のずれ［(1.5.8) の Z_3］を Z_3-1 の項で，結合定数の λ_{r} からのずれを Z_1-1 の項で消してゆくというところにある**)．このとき μ_{r} と λ_{r} とはあらかじめ実験で測定される粒子の質量と結合定数にとっておくのである．たとえば

$$\delta\mu^2 = \lambda_{\mathrm{r}}{}^2(\delta\mu^2)^{(2)} + \lambda_{\mathrm{r}}{}^3(\delta\mu^2)^{(3)} + \cdots\cdots \tag{1.5.20}$$

とすれば，2次補正項 (1.4.14) に——図 1.12 に見るとおり——追加が生じ，その結果

$$\lambda_{\mathrm{r}}{}^2\mathcal{N}^{(2)}{}_{\mathrm{conn}}(x_1, x_2) = \frac{i\hbar}{c}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{(k^2-\mu_{\mathrm{r}}{}^2+i0)^2}\lambda_{\mathrm{r}}{}^2[\sigma^{(2)}(k^2) - (\delta\mu^2)^{(2)}] \tag{1.5.21}$$

となる．粒子の質量は——λ_{r} の 2 次までの近似で——(1.5.7) に相当する方程式

$$k^2 - \mu_{\mathrm{r}}{}^2 - \lambda_{\mathrm{r}}{}^2[\sigma^{(2)}(k^2) - (\delta\mu^2)^{(2)}] = 0$$

---

*) 正確にいえば，これは‘弱極限’とみるべきもので，Fock 空間で稠密なある部分空間に属する Ψ, Ψ' に対して

$$\lim_{t\to-\infty}\int \bar{f}_+(x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}\langle\Psi', \hat{\varphi}_{\mathrm{r}}(x)\Psi\rangle dx = \int\bar{f}_+(x)\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}\langle\Psi', \varphi_{\mathrm{in}}(x)\Psi\rangle dx$$

が上にいった任意の波束 $f_+(x)$ に対してなりたつ．ボゴリューボフ他 (1972) を参照.

**) その基本をなす考えは朝永 (1949) に明快に説明されている．朝永 (1983)，特にそこに含まれているノーベル賞受賞講演「量子電気力学の発展——個人的回想」もすすめる.

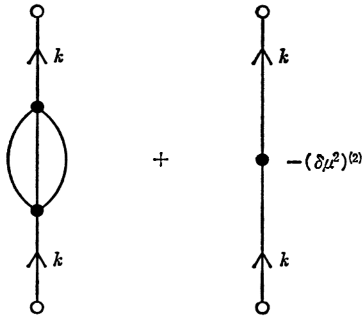


図 1.12　質量のくりこみ．伝播関数の2次の補正に対するもの．

から定まるので，$k^2=\mu_r{}^2$ が解になる（質量がずれない）ためには

$$(\delta\mu^2)^{(2)}=\sigma^{(2)}(\mu_r{}^2) \tag{1.5.22}$$

にとるべきである．

発散の困難　$\sigma^{(2)}(k^2)$ を定義している積分 (1.4.15) は，どんな k の値に対しても収束しない*)．そこで $(\delta\mu^2)^{(2)}$ は無限大とするほかないのである．発散は摂動計算にもとづく‘くりこみ法’で必要となる多くの積分でおこり，摂動ハミルトニアン (1.5.18) の係数 $Z_3, Z_1, \delta\mu^2$ はどれも λ_r に関するベキ展開の係数が無限大になる．もっとも，これは必ずしも Z_3 等が無限大であることを意味しない．たとえば，もしも

$$Z_3=1-\lambda I+(\lambda I)^2-\cdots\cdots$$

の形だったら，これを

$$Z_3=\frac{1}{1+\lambda I}$$

の形式的な展開とみなせば $I\to\infty$ で $Z_3\to 0$ となる．しかし，摂動計算で係数 $Z_3,\cdots\cdots$ を定める限り (1.5.19) は無限大を含み，演算子として意味をなさないのである．

---

*)　この積分の‘計算’については Bogolubov-Shirkov (1976), Chap. 5, または Nash (1978), Chap. 2 を参照.

それでも，たとえば (1.4.15) において $(\delta\mu^2)^{(2)}$ を (1.5.22) によって定めると

$$\sigma^{(2)}(k^2)-(\delta\mu^2)^{(2)} \quad \text{は} \quad \text{有限確定}$$

になることが確かめられる．一般に，摂動計算に現われる発散積分の無限大は $\hat{H}_{\mathrm{r}}''$ の有限種類の項の係数にすべて吸収させてしまうことができる．$\hat{H}_{\mathrm{r}}''$ の各項をくりこみの**引き算項** (counter-term) という．

上に述べたのはスカラー場 φ の φ^4 型の相互作用 (1.5.18) の場合であるが，どんな場のどんな模型でも摂動計算の無限大が有限種類の引き算項に吸収しきれるわけではない．吸収しきれる模型は**くりこみ可能** (renormalizable)，摂動計算の次数を上げるたびに新種の引き算項が必要になる模型は**くりこみ不可能** (non-renormalizable) といわれる*)．

●演習問題

1.1. $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ が $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]=1$ をみたすとき次式を証明せよ (β, η：複素数)：

$$e^{-i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\hat{a}e^{i\eta(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} = \hat{a}+i\eta,$$

$$e^{i\beta\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a}e^{-i\beta\hat{a}^\dagger\hat{a}} = \hat{a}e^{-i\beta}.$$

1.2. (1.1.18) の $\hat{\varphi}(x,t)$ をとって $\hat{\varphi}(x)=\hat{\varphi}(x,0)$ とおくとき，(1.1.14) が (1.1.18) に一致することを確かめよ．

1.3. 自由場に対して場の運動量の演算子を

$$\hat{P}_l = -\int :\pi(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_l}:\, dx \qquad (l=1,2,3)$$

によって定義する．$x_4=ict, \hat{P}_4=i\hat{H}_0$ とするとき

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi(x) = [\hat{P}_\mu, \varphi(x)] \qquad (\mu=1,\cdots,4)$$

がなりたつことを示せ．

(1.2.6) の形をした φ^4 相互作用のある場に対しても，この微分方程式がなりたつことを要請する．$\hat{P}_l$ の定義式はどうなるか？

1.4. $\hat{P}_\mu$ が保存量であることを示せ．

---

*) その判定条件は Umezawa (1956), Bogolubov-Shirkov (1976) にあたえられている．

1.5. 時刻0の場を，(1.1.18) にならって

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k V}} [\hat{a}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

$$\hat{\pi}(\boldsymbol{x}) = -i \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V}} [\hat{a}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

のように生成・消滅演算子で展開するものとして，場の運動量が

$$\hat{P}_l = \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar k_l \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\boldsymbol{k}} \qquad (l = 1, 2, 3)$$

となることを示せ.

1.6. 場 (1.1.18) の時間的に順序づけられた積

$$P[\hat{\varphi}(x_1), \hat{\varphi}(x_2), \cdots, \hat{\varphi}(x_n)]$$

の場合をとり Wick の定理を例証せよ.

1.7. $\hat{\pi}(\boldsymbol{x}, t)$ と $\hat{\phi}(\boldsymbol{x}, t)$ とが正準交換関係 (1.1.13) をみたし，ϕ^4 相互作用をもつとして，次式を証明せよ:

(a) $$[:\hat{\phi}^4(\boldsymbol{x}, t):,\ \hat{\pi}(\boldsymbol{x}', t)] = 4i\hbar :\hat{\phi}^3(\boldsymbol{x}, t): \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

(b) $$(\Box + \mu^2)\hat{\phi}(\boldsymbol{x}, t) - 4\lambda :\hat{\phi}^3(\boldsymbol{x}, t): = 0$$

ただし，(b) においてはダランベルシャン

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varDelta$$

を用い，ハミルトニアンの‘くりこみの引き算項’は無視した. もし無視しなかったら (b) の式はどうなるか?

1.8. φ^4 相互作用をする場の伝播関数 G_n は

$$\left[\Box + \left(\frac{\mu}{c}\right)^2\right] G_2(x_1, x_2) - 4\lambda G_4(x_1, x_1, x_1, x_2) = -i\hbar\delta(x_1 - x_2)$$

をみたす. ただし，ここでも‘くりこみの引き算項’は無視した.

●文献

Bogolubov, N. N. and D. V. Shirkov (1976), *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, (3rd ed.), John Wiley & Sons, New York.

ボゴリューボフ，N. N., A. A. ログノフ，I. T. トドロフ (1972)，(新版 1980)，『場の量子論の数学的方法』，江沢他訳，東京図書.

江沢 洋・恒藤敏彦編 (1977)，『量子物理学の展望 (上)』，岩波書店.

江沢 洋 (1978)，量子力学の構造，湯川・豊田 (1978) の第IV部.

Heisenberg, W. und W. Pauli (1929), Zur Quantendynamik der Wellenfelder I,

Zs. f. Phys. **56**, 1.

Heisenberg, W. und W. Pauli (1930), Zur Quantendynamik der Wellenfelder II, Zs. f. Phys. **59**, 168.

Itzykson, C. and J.-B. Zuber (1980), *Quantum Field Theory*, McGraw Hill.

中西 襄 (1975),『場の量子論』, 培風館.

Nash, N. (1978), *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press, New York.

Pauli, W. und V. Weisskopf (1934), Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung, Helv. Phys. Acta **7**, 709.

朝永振一郎 (1949), 素粒子論の進展, 科学 **19**, 2; 朝永 (1983) に再録; また '無限大の困難をめぐって' として江沢-恒藤 (1977) に再録.

朝永振一郎 (1974),『スピンはめぐる―成熟期の量子力学』, 自然選書, 中央公論社.

朝永振一郎 (1983),『量子電気力学の発展』, 朝永振一郎著作集 10, みすず書房.

Umezawa, H. (1956), *Quantum Field Theory*, North-Holland, Amsterdam.

湯川秀樹 (1942), 場の理論の基礎について, 科学 **12**, 8–9; 湯川 (1969) に再録

湯川秀樹 (1969),『創造への飛躍』, 講談社.

湯川秀樹・豊田利幸編 (1978),『量子力学 II』, 岩波講座・現代物理学の基礎 4, 岩波書店.

第2章

場の量子論の公理系

この章では，‘なぜ物理学のなかで公理論的アプローチが試みられるようになったか’から始めて，公理系の例を三つ紹介し，それらの相互関連を述べる*)．

2.1 なぜ公理論的アプローチか

‘物理は公理論的にするものではない’と考えている物理の研究者は多い．おそらく大多数がそう考えているだろう．その理由を Feynman はこう述べている（Feynman, 1968, 訳書, pp. 57—58）：

> [公理から] なんでも導き出せるというのは結構な話ですが，しかし，場合に応じて勝手なところから出発するというほうが，はるかに能率的であります．どれが最良の公理であるかきめてかかるのは，全体を見通すのに必ずしも便利でない．

これに対して次のように反論することができるだろう：

> ‘場合に応じて勝手なところから出発する’ためには，その‘勝手なところ’同士の同等性を確かめておく必要があり，その目的には公理論的な整序が能率的である．

しかし，場の量子論の場合には，もっとさし迫った要求があった．

*) 今後は $\hbar=c=1$ の単位系を用いる．また，演算子を表わす ^ は省略する．

くりこみ法以前 第1章で見たとおり，Heisenberg, Pauli らによって始められた場の量子論は早くから‘発散’という重大な困難に出会った．とはいえ，この理論がまったく見当はずれではないと考えるべき根拠もあって，場の量子論は，第一に自由場の理論でも言い表わせる類の問題では成功し（粒子と波動の二重性，スピンと統計の関係），第二に相互作用が本質的な問題でも量子電磁力学においては摂動論を最低次の近似でとめておけば実験とよい一致を示すのだった（例：ガンマ線の電子による散乱（Compton 効果，図 2.1），ガンマ線による電子-陽電子の一対の創成，……）．

しかし，摂動論の近似を進めれば発散の困難に出会うのであるから，1940 年代にはこの不完全な理論を手がかりにして正しい理論を探しだすことが課題とされた．では，まずどちらの方角を探すべきか？ 人びとは，あるいは‘最初の近似で計算をやめよ，しからば正しい答を得ん’といい，あるいは‘現在の理論はある長さ r_0 のところまでは正しいが，それ以下の領域では正しくない’といった．後者の代表は Heisenberg で，彼は r_0 をいわゆる古典電子半径

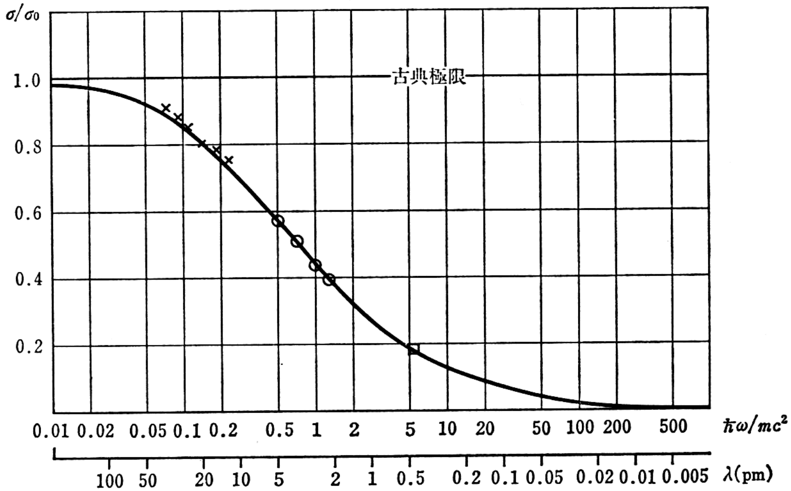


図 2.1 自由電子による光子の散乱の全断面積 σ. 入射光子のエネルギー $\hbar\omega$, あるいは光の波長 λ の関数として示す．実線が理論値（Klein-Nishina の公式（1929）による），×と○と□が 1921—1934 年の実験値を示す．Heitler（1954）による．

σ_0：光の古典的波動論による Thomson 断面積，

mc^2：電子の静止エネルギー，$\mathrm{pm} = 10^{-12}\mathrm{m}$.

$e^2/m_e c^2 = 2.8\times10^{-15}$m の程度とし（$m_e$ と $-e$ は電子の質量と電荷），発散積分も，r_0 より小さい世界に相当する積分領域をひとまず切り棄てて (cut-off)，有限にすることを主張した．そして同時に，小さい世界の正しい物理を手さぐりするために，その世界が関与していそうな現象に注意を向けることを提案したのである．こうした状況は，いろいろの提案の当否を含めて朝永（1949）が分析している．

くりこみ法　1948年に，水素原子の $2P_{1/2}$ というエネルギー準位が，Dirac 方程式で計算される位置よりわずかに ($\Delta\nu = 1058$ MHz) 上にずれていること (Lamb シフト）が実験によって見出された．

このずれは摂動論によって計算できるが，その答は発散積分を含んで無限大である．この場合，電子と光子の相互作用が問題になるが，仮に自由電子を考えても，この相互作用のために電子は光子の衣をまとうことになって質量が本来の（裸の）m_0 から $m_0+\delta m$ に変わるはずだ；また，その光の衣のなかで電子-陽電子の対発生がおこり，電子のまわりに陽電子が吸い寄せられる結果，電子の電荷が一部うちけされて本来の（裸の）$-e_0$ から $-e_0+\delta e$ ($\delta e < 0$) に変わったように見えるはずだ．そう思って摂動計算の結果を見ると，発散積分は δm と δe に相当するところに集中していることがわかる．

電子はつねに光子と相互作用しているので，電子の質量を測る実験は m_0 ではなくて相互作用による補正の入った $m_0+\delta m$ を測るはずであり，電子の電荷を測る実験は $-e_0$ ではなくて $-e_0+\delta e$ を測るはずである．そこで，摂動計算の結果を $m_0+\delta m$, $-e_0+\delta e$ の形にまとめ上げて，それぞれに電子の質量と電荷との実測値 m_e, $-e$ を代入する――これで発散積分は視界から消えてしまう．これが第1章でも触れた**くりこみ** (renormalization) である．それでも，水素原子の電子の場合，相互作用の効果はいくらか（有限に）残るのであって，これが問題のエネルギー準位のずれをあたえ，実験値と見事に一致する！　その状況も朝永（1949）に詳しく説明されている．

くりこみ法は，この他にも電子の散乱や異常磁気能率などの問題でも成功した．異常磁気能率というのは，電子がスピン（自転）のために磁石になっているその強さ μ の 'Dirac 方程式から計算される $\mu_0 = 2\times(-e\hbar/2m_e c)$ からのず

れ' をいう．一般に，電子と光子の相互作用できまるどんな問題においても，解を電子の電荷 $-e$ のベキ級数の形にもとめると，各次数においてくりこみ法は有限の結果をあたえることが証明される．そうして得られた級数の収束は証明されていないが（むしろ，発散の兆候がある．Dyson (1953)，Edwards (1953) など），実際に計算の行なわれた有限次までの和は実験値によく一致する．

この一致は，物理学の他の分野でも稀なくらい良好である．たとえば，電子の磁気能率を

$$\mu = 2\cdot\frac{-e\hbar}{2mc}\cdot(1+a)$$

と書くと，a が上に触れた異常磁気能率の大きさを表わすことになるが，その実測値

$$a_{\text{実測}} = 0.001\,159\,652\,193(10)$$

に対して，摂動計算を 8 次まで進めた Kinoshita (1983) の結果は

$$a_{\text{理論}} = 0.5(\alpha/\pi) - 0.328\,478\,444(\alpha/\pi)^2 \\ + 1.176\,3(13)(\alpha/\pi)^3 - 0.8(2.5)(\alpha/\pi)^4 + 1.69(4)\times 10^{-12}$$

であり［Cohen (1986)］，$\alpha = e^2/\hbar c$ の値を入れれば

$$a_{\text{理論}} = 0.001\,159\,652\,232\binom{44}{52}$$

となる．括弧に入れて示した数字は，末尾の 1 桁ないし 2 桁にそれだけの不確定（標準偏差）があることを示す．理論値の不確定のうち 44 は理論計算の不十分さにより，52 は電子の電荷にかかわる微細構造定数 $\alpha \equiv e^2/\hbar c$ がまだ十分な精度で決定されていないことによる．ちなみに，ここで用いた α の値は種々の物理量の測定値から最小 2 乗法でもとめた

$$\alpha = 137.035\,989\,5(61)$$

である．量子電磁力学の他の計算結果も上の a とほぼ同程度によく実験と一致している．Kinoshita (1984)，木下 (1977) も参照．

くりこみ法は，こうした成功にもかかわらず発散の問題を完全に解決したわけではない．それは摂動論において結合定数によるベキ展開の各次数ごとに発散を引き去る処方をあたえるだけで，摂動級数の収束は証明されていないし，それよりなにより出発点のハミルトニアンが無限大の（あるいは無限小の）係

数を含むという難点がある.

この最後の点についていえば，くりこみは発散積分を積分領域の——たとえば有限半径 Λ の球内への——制限 (cut-off) によりひとまず有限にして行ない，そのあとで $\Lambda\to\infty$ とすることで遂行されるが，その手続きは Bogolubov-Parasiuk (1957)，および Hepp (1966) により整備された*).

しかし，くりこみ法には本質的な困難があることを Landau ら (1954) が指摘した [Landau (1955); 町田 (1956)，梅沢 - 福田 (1959)，梅沢ら (1963) も参照]. くりこみ法は，例として量子電磁力学の電荷についていえば，摂動計算に現われる積分の cut-off Λ をひとまず有限にしハミルトニアンに含まれる (裸の) 電荷 e_0 を Λ に依存させて，相互作用により補正された電荷

$$e = e_0(\Lambda)+\delta e(\Lambda) \tag{2.1.1}$$

が ($\Lambda\to\infty$ で) 実測値に合うようにその依存性 $e_0(\Lambda)$ をきめること，である. Landau らは e_0 に関する摂動展開をするものとして，したがって $|e_0|\ll 1$ を仮定して (2.1.1) の関係を近似的にもとめ

$$e_0^2(\Lambda) \underset{\Lambda\to\infty}{\sim} \frac{e^2}{1-\dfrac{e^2}{3\pi}\log\dfrac{\Lambda^2}{m^2}} \tag{2.1.2}$$

を得た. これは，十分に大きい Λ に対して $e_0(\Lambda)$ を虚数にとらねばならぬことを意味し，ハミルトニアンの自己共役性に抵触する. 矛盾を避けるためには

$$e=0$$

とするほかない. いいかえれば，$e_0^2(\Lambda)>0$ なるかぎり——そして $|e_0(\Lambda)|\ll 1$ の仮定のもとで——相互作用による補正のため実測にかかる電子の電荷は 0 になる. この電子は光を散乱することもなく，陽子の近くで引力を感じることもない！

この議論は，今日では**くりこみ群** (renormalization group) の手法を用いて行なわれる**).

公理論的アプローチ　van Hove (1952) は，簡単なモデル

---

*) Bogolubov-Shirkov (1976), Chap. 5 を参照.

**) Bogolubov-Shirkov (1976), Chap. 9 を見よ.

$$H_\eta = \frac{1}{2}\int :[\hat{\pi}^2 + (\nabla\hat{\phi})^2 + \mu^2\hat{\phi}^2]: dx + g\int \eta(x)\hat{\phi}(x)dx \qquad (2.1.3)$$

において，はじめ実関数 $\eta(x)$ をたとえば $x=0$ に中心をもつガウス関数にとれば，π と ϕ の Fock 空間［(1.1.26) の前後を参照］で $\hat{H}_\eta$ の固有ベクトル $\Psi_n{}^\eta$ の完全系が定まるが，

$$\eta(x) \to \delta(x) \qquad (2.1.4)$$

の極限をとると，そのどれもが0ベクトルに弱収束することを示した*)（問題2.2)．これは，H_η の固有ベクトルがいま用いている Fock 空間のなかにないことを意味している．Haag (1955) は，もっと一般に次の条件をみたす場 $\phi(x,t)$ は自由場と同等である（ユニタリ変換で結ばれる）ことを示唆した：

a. 非斉次ローレンツ変換に関して共変，すなわち後の (2.3.1) がなりたつ．

b. ハミルトニアンのスペクトルの下限は，その点スペクトルに属する．

c. 同時刻の $\phi(x,t)$, $\pi(x',t)$ が正準交換関係をみたす．そして $\pi(x,t)$ は非斉次ユークリッド変換（回転と平行移動）に関して共変．

d. $\phi(x,t)$, $\pi(x,t)$ はある時刻 t_0 に自由場とユニタリ変換で結ばれている．

この **Haag の定理**の厳密な証明は O. W. Greenberg (1959) があたえた．この定理は，(1.2.3) を用いる摂動計算の基礎を失わせるものであった．

くりこみ理論の成功と，その裏にある発散の困難，そして新たな数学的疑義——これらに促されて相対論的な場の量子論の枠組を数学的に明確に整理しようとする動きがおこった．その成果は Jost (1963), Streater and Wightman (1964), Haag and Kastler (1964)**)，ボゴリューボフら (1972) に要約されている．この公理論的アプローチの努力は，1966年頃から構成論的アプローチに引き継がれることになる．後者が本書の主題である．

公理論的な場の量子論 (axiomatic quantum field theory) は，相対論的な場の量子論のどれもが共通にもつべきであると考えられる性質を，ひとまず公

---

*) 梅沢 (1963)，第5章を参照．

**) この論文にはじまる‘代数的アプローチ’の説明は，本書では割愛する．その成果については Haag (1986) を参照．

理として設定し，(1) それらがどんな制限を理論に加えることになるか，(2) それらからどれだけの物理的帰結が導びけるか，を研究しようとする．その成果はボゴリューボフら (1972) に詳しい．公理系が一見かなり緩やかと思われるのに豊富な結論がひきだせるのは驚きである．

ここで次の2点に注意しなければならない．第1に，ここでいう公理系は，数学における通常の公理系のように数学的に意味のある具体的モデルから抽象して立てられたものではない．したがって，公理系のすべてをみたすモデルが存在するか否かが重大な問題になる．実は，以下に述べるどの公理系も自由場はみたすことが直接のチェックによってわかる．しかし，これはトリヴィアルなモデルである．散乱現象を記述しうるノン・トリヴィアルなモデルが存在することは，どの公理系についてもまだ証明されていない．その存在を実際の構成によって証明し，かつモデルの物理的特性を明らかにしようとするのが構成的な場の量子論であって，時空を仮に2次元，3次元とした場合には成功したが，あとに詳しく述べるように現実の4次元時空にきて壁にぶつかった．

しかし，こうした努力のなかで ν 次元時空における場の量子論と ν 次元空間における古典統計力学との密接な関係が認識されたのは収穫であった．この関係が場の量子論の研究を大いに助けたことは，本書でも後に見るとおりである．

注意すべきことの第2は，ここでの公理の作業仮説的な性格である．さきに相対論的な場の量子論のどれもが共通にもつべき性質を公理にしたといったが，たとえば非局所場 (Yukawa 1947, 1964) や弦模型，不定計量 Hilbert 空間を用いる理論は視野に入っていない*)．現在の公理系は，それによって場について語る経験を積み問題点をかぎつけるために，またそれを目標にして場の理論を構成しようとするとき，どこで困難につきあたるかを調べるためにある．

2.2 準備

相対論的場の量子論の公理系はこれまでにいくつか提出され研究されてきたが，ここでは，三つの公理系だけについて手短かに述べることにし，さらに簡

---

*) パラ統計にしたがう場は，ある種の内部対称性をもつ通常の場と同等である (Kamefuchi and Ohnuki (1986) を参照).

単のため，時空 $\nu=s+1$ 次元の中性スカラー場の量子論——この言葉は以下に記述する公理系によって定義される——の場合だけを考えることにしよう*).

しかし，そのまえに，いくつか用語を定義しておかなければならない.

一般に，$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ によって，$\mathbf{R}^n$ 上の急減少で無限回微分可能な関数全体からなる Schwartz 空間を表わす**).

ν 次元実ベクトル空間

$$\mathbf{R}^\nu=\{x=(x^0,x^1,\cdots,x^s)\mid x^\mu\in\mathbf{R}\}$$

の上の双1次形式

$$(x,y)=x^0y^0-\sum_{i=1}^{s}x^iy^i,\qquad x,y\in\mathbf{R}^\nu$$

を x と y の Minkowski 内積とよび，線形空間としての $\mathbf{R}^\nu$ にこの内積を入れて **Minkowski 空間**とよぶ．計量テンソル

$$g=(g_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu=0,1,\cdots,s} \tag{2.2.1}$$

を

$$g_{00}=-g_{11}=\cdots\cdots=-g_{ss}=1,\qquad g_{\lambda\mu}=0\quad(\lambda\neq\mu)$$

によって定義すれば，上の Minkowski 内積は

$$(x,y)=\sum_{\lambda,\mu=0}^{s}g_{\lambda\mu}x^\lambda y^\mu \tag{2.2.2}$$

と書ける.

任意の $x,y\in\mathbf{R}^\nu$ の Minkowski 内積を不変にする実線形変換の全体は群をなす．これを**一般 Lorentz 群** (full Lorentz group) とよび，その元を **Lorentz 変換**とよぶ***)．任意の Lorentz 変換 $x\longrightarrow x'$ は実行列 $\Lambda=(\Lambda^\lambda{}_\sigma)_{\lambda,\sigma=0,1,\cdots,s}$ により

$$x'^\lambda=\sum_{\sigma=0}^{s}\Lambda^\lambda{}_\sigma x^\sigma$$

のように表わされるが，(2.2.2) の不変性は

$${}^t\Lambda g\Lambda=g \tag{2.2.3}$$

---

*) 前章で構成しようとしたのが，中性スカラー場のひとつのモデルである.

**) たとえば，ゲルファント (1963) を参照.

***) Lorentz 群については Gel'fand et al. (1963), Naimark (1964) を参照.

を要求する．ここに ${}^t\Lambda$ は Λ の転置行列を表わす．逆に (2.2.3) がなりたてば Λ は Lorentz 変換である．したがって，Lorentz 変換 Λ は

$$\det \Lambda = \pm 1, \qquad (\Lambda^0{}_0)^2 \geqq 1$$

をみたす．$\det \Lambda$ と $\Lambda^0{}_0$ との符号に応じて，一般 Lorentz 群は4個の連結成分に分解される．そのうちのひとつ

$$\mathsf{L}_+^\uparrow = \{\Lambda : \text{Lorentz 変換} \mid \det \Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geqq 1\} \tag{2.2.4}$$

は群をなし**固有 Lorentz 群** (proper Lorentz group) とよばれる．

固有 Lorentz 変換 $\Lambda \in \mathsf{L}_+^\uparrow$ と ν 次元ベクトル $a \in \mathbf{R}^\nu$ の組 (a, Λ) に対して

$$x' = (a, \Lambda)x \equiv \Lambda x + a \tag{2.2.5}$$

により定義される変換の全体

$$\mathsf{P}_+^\uparrow = \{(a, \Lambda) \mid a \in \mathbf{R}^\nu,\ \Lambda \in \mathsf{L}_+^\uparrow\} \tag{2.2.6}$$

は，(2.2.5) から自然に定まる演算

$$(a_2, \Lambda_2)(a_1, \Lambda_1) = (\Lambda_2 a_1 + a_2, \Lambda_2 \Lambda_1) \tag{2.2.7}$$

に関して群をなす．$\mathsf{P}_+^\uparrow$ を**固有 Poincaré 群** (proper Poincaré group) とよぶ．

2.3 Gårding-Wightman の公理系

これは歴史的に最も古い公理系であって，その内容は中性スカラー場について述べれば次のとおり (Gårding and Wightman, 1964)．

中性スカラー場の量子論とは，可分な Hilbert 空間 H，H に属する単位ベクトル Ω，$\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ から 'H における線形演算子' への写像 ϕ，そして $\mathsf{P}_+^\uparrow$ の 'H 上での強連続ユニタリ表現' U からなる四つ組 $\{\mathsf{H}, \Omega, \phi, U\}$ で，以下の公理系をみたすものである：

(GW1)　H で稠密な定義域 D_0 が存在し，次の (a)—(d) がなりたつ (H の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表わす)：

(a)　各 $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ に対して，$\phi(f)$ の定義域は D_0 を含み，すべての $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathsf{D}_0$ に対して，線形汎関数 $\langle \Psi_1, \phi(\cdot)\Psi_2 \rangle$ は，緩増加超関数である．

(b)　$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ が実数値関数ならば，$\phi(f)$ は D_0 上で対称な演算

子である．すなわち，任意の $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathsf{D}_0$ に対して，

$$\langle \Psi_1, \phi(f)\Psi_2 \rangle = \langle \phi(f)\Psi_1, \Psi_2 \rangle.$$

(c) 各 $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ に対して，D_0 は $\phi(f)$ の不変部分空間である．すなわち，$\Psi \in \mathsf{D}_0$ ならば $\phi(f)\Psi \in \mathsf{D}_0$ がなりたつ．

(d) $\Omega \in \mathsf{D}_0$ であり，D_0 は

$$\{\Omega,\ \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega \mid f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu),\ n = 1, 2, \cdots\}$$

によって代数的に張られる．

(GW 2)

(a) 各 $(a, \Lambda) \in \mathsf{P}_+^\uparrow$ に対して，D_0 は $U(a, \Lambda)$ の不変部分空間である．すなわち，$\Psi \in \mathsf{D}_0$ ならば $U(a, \Lambda)\Psi \in \mathsf{D}_0$ がなりたつ．

(b) すべての $(a, \Lambda) \in \mathsf{P}_+^\uparrow$ に対して

$$U(a, \Lambda)\Omega = \Omega.$$

(c) 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ と任意の $(a, \Lambda) \in \mathsf{P}_+^\uparrow$ に対して，D_0 上の等式として

$$U(a, \Lambda)\phi(f)U(a, \Lambda)^{-1} = \phi(f_{(a,\Lambda)}) \qquad (2.3.1)$$

がなりたつ．ただし*)，

$$f_{(a,\Lambda)}(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a)). \qquad (2.3.2)$$

(GW 3) 部分群 $\{U(a, I) \mid a \in \mathbf{R}^\nu\}$ (I は $\mathsf{L}_+^\uparrow$ の単位元）の無限小生成子の結合スペクトル**)は前方光円錐

$$\mathbf{V}^+ = \{p \in \mathbf{R}^\nu \mid p^0 > 0,\ (p, p) > 0\} \qquad (2.3.3)$$

の閉包 $\overline{\mathbf{V}^+}$ に含まれる．

(GW 4) f と g の台が空間的に離れているならば，すなわち，任意の $x \in \operatorname{supp} f$, $y \in \operatorname{supp} g$ に対して***) $(x-y, x-y) < 0$ ならば，

---

*) 空間 $\mathbf{R}^\nu$ の一点を P とし，その座標がある座標系 S_1 で x_1, S_1 を Poincaré 変換した別の座標系 S で $x = \Lambda x_1 + a$ であるとすれば，

$f_{(a,\Lambda)}(x)$: 座標系 S における関数 $f_{(a,\Lambda)}$ が点 P でとる値，

$f(x_1) = f(\Lambda^{-1}(x-a))$: 座標系 S_1 における関数 f が点 P でとる値．

つまり，Poincaré 変換して得た新しい座標系における関数 $f_{(a,\Lambda)}$ は，あらゆる時空点 P で

$$f_{(a,\Lambda)}(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P})$$

となるようにつくられているのである．

**) 結合スペクトルの定義は p. 47 にあたえる．

***) $\operatorname{supp} f$ は f の台を表わす．すなわち，集合 $\{x \in \mathbf{R}^\nu \mid f(x) \neq 0\}$ の閉包である．

D_0 上で

$$\phi(f)\phi(g)-\phi(g)\phi(f)=0. \tag{2.3.4}$$

(GW5)　すべての $U(a,I)$, $a\in\mathbf{R}^\nu$, に対して不変なベクトルは Ω のスカラー倍に限られる.

Ω を**真空**, ϕ を**中性スカラー場**とよぶ.

以上が, 中性スカラー場の量子論に対する Gårding-Wightman の公理系である. いくつかの注意を述べておこう.

先に述べたように, 公理系は, 特殊相対性理論と量子力学において要請される最も一般的と思われる性質が定式化されたものでなければならない. 前者においては, 光速度不変の原理 (あるいは因果律) と Poincaré 共変性の 2 つがその基本原理であり, 後者の基本要請は次の 3 つである: (i) 物理系の状態はヒルベルト空間の単位ベクトル (より正確には, 絶対値 1 の定数因子だけ異なるベクトルを同一視して得られる**単位射線**) によって表わされること; (ii) 観測量は, 状態が属するヒルベルト空間において作用する自己共役演算子として実現されること; (iii) 確率解釈.

(GW 1)-(a) は, 場を弱連続の意味での演算子値緩増加超関数として定式化したということであり, (GW 1)-(b) は場が'中性'であることを特徴づけるものである. (GW 1)-(c), (d) は, すべての状態が真空に場の演算子を施すことによって得られることを要請するものであって, これは量子場が, 物理的には, 素粒子を生成したり消滅させたりする機能をもつという描像にかなっている.

(GW 2) は Poincaré 共変性の定式化である. 時空の座標変換 $(a,\Lambda)\in \mathsf{P}_+^\uparrow$ に対応して, 状態の変換群があるべきであって, それが $U(a,\Lambda)$ である. これがユニタリだというのは, '確率解釈' により, 任意の 2 つの状態の内積の絶対値は, その変換により不変になるべきだからである. (GW 2)-(b) は, Poincaré 変換に対する真空の不変性を表わし, (GW 2)-(c) は, 場が Poincaré 変換に対してスカラーであることをいうものである.

$\{U(a,\Lambda)\}$ の部分群 $\{U(a,I)\}$ は*), $\mathbf{R}^\nu$ の並進群のユニタリ表現であり,

---

*)　I は Lorentz 群の単位元を表わす.

容易にわかるように，ν-パラメーターの強連続ユニタリ群をなす．したがって，Stone の定理によって*)，ν 個の互いに可換な自己共役演算子 P^0, P^i $(i=1, \cdots, s)$ が存在して

$$U(a, I) = e^{i(P, a)}, \qquad P = (P^0, \cdots, P^s) \tag{2.3.5}$$

と書ける．これら ν 個の自己共役演算子 $P^0, P^1, \cdots, P^s$ が群 $\{U(a, I)\}$ の無限小生成子である．P^0 を場の**ハミルトニアン**あるいは**エネルギー演算子**とよび，$\boldsymbol{P} = (P^1, \cdots, P^s)$ を場の**運動量演算子**とよぶ．さらに，H 上の射影演算子の値をとる $\mathbf{R}^\nu$ 上の測度 E が存在して，すべての $\Psi, \Phi \in$ H に対して

$$\langle \Psi, e^{i(P, a)}\Phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^\nu} e^{i(\lambda, a)} d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi \rangle \tag{2.3.6}$$

となる．測度 E の台を，$P^0, \boldsymbol{P}$ の**結合スペクトル** (joint spectrum) とよぶ**)．

この結合スペクトルを $\sigma_{\mathrm{J}}(P)$ で表わすことにすれば，公理 (GW 3) は，$\sigma_{\mathrm{J}}(P) \subset \overline{\mathrm{V}^+}$ を要求するものであり，**スペクトル条件**とよばれている．この要求が無理でないことは，$\sigma_{\mathrm{J}}(P)$ が $\mathrm{L}_+^\uparrow$ 不変であることによって保証される．

公理 (GW 3) は，ハミルトニアンのスペクトルを $\sigma(P^0)$，**質量演算子**

$$M^2 = (P^0)^2 - \boldsymbol{P}^2 \tag{2.3.7}$$

のスペクトルを $\sigma(M^2)$ とすれば，$\sigma(P^0), \sigma(M^2) \subset [0, \infty)$ であることと同等である．これは，考えている物理系のエネルギーが非負で，エネルギー・運動量スペクトルが前方光円錐の中にあるということで (図 1.3 を参照)，物理系の安定性と特殊相対性理論からの自然な要請である．

公理 (GW 4) は，**局所性** (locality) あるいは**微視的因果律** (microscopic causality) の要請とよばれる．量子力学では，2つの物理量の可換性は，一方の測定が他方の測定の結果に影響しないこと (測定の独立性) を意味するので，(GW 4) は，空間的に隔たった二つの時空点における場の測定が独立であるという要求の定式化にほかならない．しかもこの要請は自然である．なぜならば，特殊相対性理論では，空間的に隔たった二つの時空点はどんな信号によっても

---

*) たとえば，Reed and Simon (1972)，定理 8.12.

**) 一般に，$\mathbf{R}^n$ 上の測度 μ の台は，$\mu(S) = 0$ となる最大の開集合 S の補集合として定義される．また，結合スペクトルという概念は，任意の可換な (対応するスペクトル分解演算子が可換という意味で) 自己共役演算子の組に対して同様に定義される．

結ばれることがなく，因果的な関係をもつことができないからである．

最後の公理（GW 5）は，真空の一意性の定式化であり，真空の特徴づけでもある．

注意　(1)　(GW 5) と $U(a, I)\Omega = \Omega, a \in \mathbf{R}^\nu$ とから，(GW 2)-(b) は得られる（問題 2.4）．

(2)　(GW 2)-(a) は，(GW 2)-(b), (c) と (GW 1)-(d) とから導くことができる（問題 2.5）．

上の公理系が Hilbert 空間のベクトルと演算子の言葉で述べられているのに対して，次の公理系は超関数列の性質として述べられている．

2.4　Wightman の公理系（Wightman 1956, Streater and Wightman 1964）

中性スカラー場の量子論とは，次の（W 1）—（W 6）をみたす緩増加超関数列

$$\{\mathscr{W}_n \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^{\nu n})\}_{n=0}^{\infty} \qquad (\mathscr{W}_0 \equiv 1)$$

である：

(W 1)（中性であること）　すべての $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu n})$ に対して

$$\overline{\mathscr{W}_n(f)} = \mathscr{W}_n(f^*), \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots. \tag{2.4.1}$$

ただし，

$$f^*(x_1, \cdots, x_n) = \overline{f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1)} \tag{2.4.2}$$

（変数を逆順にして，複素共役をとったもの）

(W 2)（Poincaré 共変性）　各 $\mathscr{W}_n$ は Poincaré 不変である．すなわち，すべての $(a, \Lambda) \in \mathrm{P}_+^\uparrow$ と $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu n})$ に対して

$$\mathscr{W}_n(f) = \mathscr{W}_n(f_{(a,\Lambda)}), \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots. \tag{2.4.3}$$

ただし，

$$f_{(a,\Lambda)}(x_1, \cdots, x_n) = f(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \cdots\cdots, \Lambda^{-1}(x_n - a)). \tag{2.4.4}$$

(W 3)（正値性）　$f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu m})$ と $g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu n})$ に対して $f \otimes g \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu(m+n)})$ を

$$(f \otimes g)(x_1, \cdots, x_{m+n}) = f(x_1, \cdots, x_m) g(x_{m+1}, \cdots, x_{m+n})$$

によって定義する．このとき，すべての $f_0 \in \mathbf{C}$, $f_1 \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^\nu), \cdots\cdots$, $f_N \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu N})$ に対して

$$\sum_{n,m=0}^{N} \mathscr{W}_{n+m}(f_n^* \otimes f_m) \geqq 0, \qquad N=0,1,2,\cdots\cdots. \quad (2.4.5)$$

(W4) (スペクトル条件) 各 $n \geqq 2$ に対して,

$$\operatorname{supp} F_{n-1} \subset (\overline{\mathrm{V}^+})^{n-1}$$
$$\equiv \{(p_1,\cdots,p_{n-1}) \,|\, p_i \in \overline{\mathrm{V}^+},\ i=1,\cdots,n-1\} \quad (2.4.6)$$

となる超関数 $F_{n-1} \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^{\nu(n-1)})$ が存在して[*],

$$\mathscr{W}_n(x_1,\cdots,x_n)$$
$$= \int F_{n-1}(p_1,\cdots,p_{n-1}) e^{i\sum_{j=1}^{n-1}(p_j,\,x_{j+1}-x_j)} dp_1 \cdots dp_{n-1} \quad (2.4.7)$$

と書ける. ただし, $\mathscr{W}_n(x_1,\cdots,x_n)$ は, 汎関数 $\mathscr{W}_n$ の核である:

$$\mathscr{W}_n(f) \equiv \int \mathscr{W}_n(x_1,\cdots,x_n) f(x_1,\cdots,x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

(W5) (局所性) 任意の $n \geqq 2$ と $j=1,\cdots,n-1$ に対して $x_j - x_{j+1}$ が空間的, すなわち, $(x_j-x_{j+1}, x_j-x_{j+1}) < 0$ ならば,

$$\mathscr{W}_n(x_1,\cdots,x_j,x_{j+1},\cdots,x_n)$$
$$= \mathscr{W}_n(x_1,\cdots,x_{j+1},x_j,\cdots,x_n). \quad (2.4.8)$$

(W6) (クラスター性) 任意の空間的ベクトル $a \in \mathbf{R}^\nu$ と $j=1,\cdots,n-1$, $n \geqq 2$ に対して,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathscr{W}_n(x_1,\cdots,x_j,x_{j+1}+\lambda a,\cdots,x_n+\lambda a)$$
$$= \mathscr{W}_j(x_1,\cdots,x_j)\mathscr{W}_{n-j}(x_{j+1},\cdots,x_n). \quad (2.4.9)$$

注意 (1) (2.4.7), (2.4.8), (2.4.9) は, もちろん, 超関数の意味でなりたつ等式と見なければならない.

(2) (W2) から得られる並進不変性により, $\mathscr{W}_1$ は, 実は定数になる.

上の2つの公理系が同等であることを示そう.

GW ⟹ W 先にあげた Gårding-Wightman の公理系から, Wightman の公理系を満足する緩増加超関数列を次のようにしてつくることができる:

$\{\mathsf{H}, \Omega, \phi, U\}$ を Gårding-Wightman の公理系を満足する中性スカラー場の

---

*) 一般に超関数 $T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ の台 $\operatorname{supp} T$ は, 任意の $f \in C_0^\infty(\mathrm{S})$ に対して, $T(f)=0$ となるような開集合 S のうちで最大のものの補集合として定義される.

量子論とし，まず，n 個の場

$$\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n),\qquad f_j\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu),\ j=1,\cdots,n$$

の**真空期待値**

$$\mathcal{W}_n(f_1,\cdots,f_n)=\langle\Omega,\ \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega\rangle \tag{2.4.10}$$

をつくる．(GW1) により，この $\mathcal{W}_n$ は，$\prod^n\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ (n 個の直積) 上の分離連続な n 重線形汎関数である．

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ は Fréchet 空間であるから，一般的な定理 (たとえば，Reed and Simon (1972) の第5章) によって，$\mathcal{W}_n$ は，$\prod^n\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ 上の同時連続な n 重線形汎関数となる．したがって，Schwartz の核定理によって，$\tilde{\mathcal{W}}_n\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n\nu})$ がただひとつ存在して

$$\tilde{\mathcal{W}}_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)=\mathcal{W}_n(f_1,\cdots,f_n) \tag{2.4.11}$$

が成立する．

$$\{\tilde{\mathcal{W}}_n\}_{n=0}^{\infty}\qquad(\tilde{\mathcal{W}}_0=\langle\Omega,\Omega\rangle=1)$$

を **Wightman 超関数**，あるいは言葉の拡張により，**真空期待値**とよぶ．$\tilde{\mathcal{W}}_n$ を改めて，$\mathcal{W}_n$ と書くと，この Wightman 超関数列 $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は，Wightman の公理をみたすことが示される．ここでは，証明の概略だけを述べよう．

(W1) は，

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{W}_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)}&=\langle\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega,\ \Omega\rangle\\&=\langle\Omega,\ \phi(\bar{f}_n)\cdots\phi(\bar{f}_1)\Omega\rangle\\&=\mathcal{W}_n(\bar{f}_n\otimes\cdots\otimes\bar{f}_1)\\&=\mathcal{W}_n((f_1\otimes\cdots\otimes f_n)^*)\end{aligned}$$

に注意すれば核定理のいう一意性から得られる．

(W2) も $f=f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ の型の関数の場合に対して示せば十分であるが，これは (GW2) から容易に示される．

(W3) を示すには，試験関数

$$f_n=\sum_{j=1}^{r}a_n{}^{(j)}g_1{}^{(j)}\otimes\cdots\otimes g_n{}^{(j)}\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^{\nu n})\qquad(a_j\in\mathbf{C})$$

およびこれに対応して，ベクトル

$$\Psi=\sum_{n=0}^{N}\sum_{j=1}^{r}a_n{}^{(j)}\phi(g_1{}^{(j)})\cdots\phi(g_n{}^{(j)})\Omega$$

を考え，ヒルベルト空間 H の正定値性 $\langle\Psi,\Psi\rangle\geqslant 0$ を書き下せば，不等式 (2.4.5) を得る．いま使った試験関数 f_n の型の関数全体は $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{\nu n})$ で稠密であるから，結局 (W3) が示される．

(W4) の厳密な証明は，Streater and Wightman (1964) の第3章，ボゴリューボフ他 (1972) の第3章，Reed and Simon (1975) の9章などを見ていただくことにして，ここでは，形式的な説明だけをする．$U(a,I)$ の表示 (2.3.5) と場の共変性 (GW2) を用いると，形式的に

$$\phi(x)=e^{i(P,x)}\phi(0)e^{-i(P,x)} \tag{2.4.12}$$

と書ける．したがって，形式的には

$$\mathcal{W}_n(x_1,\cdots,x_n)=\langle\Omega,\ \phi(0)e^{i(P,x_2-x_1)}\phi(0)\cdots e^{i(P,x_n-x_{n-1})}\phi(0)\Omega\rangle \tag{2.4.13}$$

となる．これは，単位演算子を P^μ $(\mu=0,1,\cdots,s)$ の単位の分解（スペクトル分解）で表わし，$\exp i(P,x_{j+1}-x_j)$ $(j=1,\cdots,n-1)$ と $\phi(0)$ の間に入れて，形式的に計算すれば，(2.4.7) という形に書け，(GW3) から F_n の台についての性質 (2.4.6) が導かれる．

(W5) は (GW4) の単なるいい換えにすぎない．

(W6) の証明は省略するが (Streater-Wightman (1964) の第3章，ボゴリューボフ他 (1972) の第3章参照)，これが本質的に真空の一意性 (GW5) に対応していることだけを見ておこう：

$$f=f_1\otimes\cdots\otimes f_j\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^{\nu j}),\qquad g=g_1\otimes\cdots\otimes g_{n-j}\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^{\nu(n-j)})$$

に対して，

$$\begin{aligned}\int\mathcal{W}_n(x_1,&\cdots,x_j,x_{j+1}+\lambda a,\cdots,x_n+\lambda a)f(x_1,\cdots,x_j)g(x_{j+1},\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n\\ &=\mathcal{W}_n(f\otimes g_{(\lambda a,I)})\\ &=\langle\Omega,\ \phi(f_1)\cdots\phi(f_j)\phi(g_{1(\lambda a,I)})\cdots\phi(g_{n-j(\lambda a,I)})\Omega\rangle\\ &=\langle\phi(\bar{f}_j)\cdots\phi(\bar{f}_1)\Omega,\ U(\lambda a,I)\phi(g_1)\cdots\phi(g_{n-j})\Omega\rangle\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

となる．ここで，最後の等号を得るのに (GW1)-(b) と共変性 (GW2) を用いた．$\{\phi(h_1)\cdots\phi(h_n)\Omega,\ \Omega\,|\,h_j\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)\}$ によって生成される部分空間は H で稠密であるから (GW1)-(d), (W6) は，任意の空間的ベクトル a に対して，$U(\lambda a,I)$ の $\lambda\to\infty$ に対する弱極限

$$w\text{-}\lim_{\lambda\to\infty} U(\lambda a, I) \equiv \Pi \tag{2.4.15}$$

の存在および演算子 Π が a に依存しないことを意味する．このとき，Π は，任意の空間的ベクトル a に対して $U(a,I)$ の不変ベクトルの空間上への射影演算子である．すなわち，$\Pi^* = \Pi$, $\Pi^2 = \Pi$ であり，

$$U(a,I)\Pi = \Pi, \qquad a\text{: 任意の空間的ベクトル.} \tag{2.4.16}$$

一方，任意の時間的ベクトルは，空間的ベクトルの和として表わされるので，結局，すべての $a \in \mathbf{R}^4$ に対して，等式 (2.4.16) がなりたつことになる．さらに，(W6) から任意の n, $j \leqslant n$ に対して，

$$\begin{aligned}&\langle \phi(\bar{f}_1)\cdots\phi(\bar{f}_n)\Omega,\ \Pi\phi(g_1)\cdots\phi(g_{n-j})\Omega\rangle \\ &\quad = \langle \Omega,\ \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega\rangle\langle\Omega,\ \phi(g_1)\cdots\phi(g_{n-j})\Omega\rangle\end{aligned}$$

がなりたつ．これは，Π の値域が Ω のスカラー倍からなること，すなわち，すべての $a \in \mathbf{R}^\nu$ に対して $U(a,I)$ 不変なベクトルは Ω のスカラー倍に限られるということを意味する．こうして，真空の一意性 (GW5) が出た．

W $\Longrightarrow$ GW　Wightman の公理系から Gårding-Wightman の公理系が導けるかという問題は，次に述べる **Wightman の再構成定理**によって答えられる：

定理 2.4.1　$\{\mathscr{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ を Wightman の公理系にしたがう緩増加超関数列としよう．このとき，Gårding-Wightman の公理系をみたす，ヒルベルト空間 H，真空 $\Omega \in$ H，場 ϕ，$\mathsf{P}_+^\uparrow$ の H 上での強連続ユニタリ表現 U からなる四つ組 $\{\mathsf{H}, \Omega, \phi, U\}$ が存在し，すべての $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^\nu)$, $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して

$$\mathscr{W}_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \langle \Omega,\ \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega\rangle \tag{2.4.17}$$

がなりたつ．しかも，このような四つ組 $\{\mathsf{H}, \Omega, \phi, U\}$ は，ユニタリ同値を除いてただひとつである．すなわち，Gårding-Wightman の公理系をみたす四つ組 $\{\mathsf{H}', \Omega', \phi', U'\}$ がもうひとつあって，ϕ' に対しても (2.4.17) がなりたつならば，H から H′ の上へのユニタリ変換 V が存在し，

$$\begin{aligned}\Omega' &= V\Omega, \\ U'(a,\Lambda) &= VU(a,\Lambda)V^{-1}, \qquad (a,\Lambda) \in \mathsf{P}_+^\uparrow, \\ \phi'(f) &= V\phi(f)V^{-1}, \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4),\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

となる.

この定理の証明も割愛するが (Streater and Wightman (1964) の第3章, ボゴリューボフ他 (1972) の第3章参照), その基本的な考え方だけは述べておこう*). まず, 初めにヒルベルト空間をつくるために, 超関数 $\mathscr{W}_n$ の正値性 (W3) に注目し, 試験関数の列 $f=\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(f_0\in\mathbf{C}, f_n\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu n}))$ をベクトルとする空間 K を考える. ただし, f としては, その成分が有限個を除き 0 であるようなものだけを考える. 次に

$$(f,g)_{\mathsf{K}}\equiv\sum_{n,m=0}^{\infty}\mathscr{W}_{n+m}(f_n{}^*\otimes g_m) \tag{2.4.19}$$

によって, K 上に2次形式 $(\cdot,\cdot)_{\mathsf{K}}$ を導入すると, これは, (W3) によって, 正値である. しかし, $(f,f)_{\mathsf{K}}=0$ でも $f=0$ となるとは限らない. そこで, $\mathsf{N}=\{f\in\mathsf{K}\mid(f,f)_{\mathsf{K}}=0\}$ とし, 商空間 K/N をつくり, これをその $(\cdot,\cdot)_{\mathsf{K}}$ からきまる自然な内積について完備化してできるヒルベルト空間を H とする. $(a,\Lambda)\in\mathsf{P}_+^\uparrow$ に対して $\tilde{U}(a,\Lambda)$ を

$$\tilde{U}(a,\Lambda)f=\{f_0,f_{1(a,\Lambda)},f_{2(a,\Lambda)},\cdots\cdots\},\qquad f\in\mathsf{K} \tag{2.4.20}$$

によって定義すれば, $\tilde{U}$ は $\mathsf{P}_+^\uparrow$ の K 上での表現であり,

$$(\tilde{U}(a,\Lambda)f,\ \tilde{U}(a,\Lambda)g)_{\mathsf{K}}=(f,g)_{\mathsf{K}},\qquad f,g\in\mathsf{K},$$

となることは容易にわかる. この $\tilde{U}$ を H 上に拡張したものを U と書けば, これが求めるユニタリ表現になる. $\tilde{U}(a,I)f=f, a\in\mathbf{R}^\nu$ となる f は明らかに $\tilde{\Omega}\equiv\{1,0,\cdots,0,\cdots\}$ の定数倍であるから, $\tilde{\Omega}$ に対応する H の元を Ω とすれば, これが真空ベクトルである. 場 ϕ は, まず, K 上で

$$\phi(g)f=\{0,g\otimes f_0,g\otimes f_1,g\otimes f_2,\cdots\cdots\},$$
$$g\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^\nu),\ f\in\mathsf{K} \tag{2.4.21}$$

によって定義し, H 上に拡張すればよい. こうして, できた四つ組 $\{\mathsf{H},\Omega,\phi,U\}$ が Gårding-Wightman の公理系をすべてみたすことを示すのは, それほどむずかしくはない.

こうして, Gårding-Wightman の公理系と Wightman の公理系とは同等

*) これは, C^*-代数における GNS 構成法と類似している. たとえば, 江沢 (1978) を参照.

であることがわかった．大まかに対応関係を示せば，

$$(\mathrm{GW\,1}) \Leftrightarrow (\mathrm{W\,1}), \qquad (\mathrm{GW\,2}) \Leftrightarrow (\mathrm{W\,2}),$$

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{GW\,1}) \\ \text{ヒルベルト空間の正定値性}\end{array}\right\} \Leftrightarrow (\mathrm{W\,3}),$$

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{GW\,2}) \\ (\mathrm{GW\,3})\end{array}\right\} \Leftrightarrow (\mathrm{W\,4}),$$

$$(\mathrm{GW\,4}) \Leftrightarrow (\mathrm{W\,5}), \qquad (\mathrm{GW\,5}) \Leftrightarrow (\mathrm{W\,6})$$

となる．

2.5　Euclid 化

次に述べる Osterwalder-Schrader の公理系は，概念的には，Wightman 超関数 $\mathscr{W}_n(x_1, \cdots, x_n)$ を各時間成分 $x_k{}^0$ $(k=1, \cdots, n)$ について虚時間 $ix_k{}^0$ に解析接続して得られる解析関数を用いて，Wightman の公理系をいい換えたものであるが，この公理系は，現在の**構成的場の量子論** (constructive quantum field theory)——数学的に厳密な仕方で，トリヴィアルではない場の量子論のモデル*) を構成しようとするアプローチ——にとって，最も基本的で有用なものとなっている．これは次の事情による：Minkowski 空間の点 $(x^0, x^1, \cdots, x^s)$ の時間成分（これをしばしば実時間とよぶ）を虚時間 ix^0 にうつすということは，Minkowski 内積 (x, x) を Euclid 内積 $-\sum_{\mu=0}^{s}(x^\mu)^2$ に変えることであり，Minkowski 空間上の相対論的場の量子論は，Euclid 空間上の Euclid 共変な場の量子論——**Euclid 的場の量子論** (Euclidean quantum field theory)——へと移行する．そして，相対論的場の量子論の場の方程式に現われる $s+1$ 次元の微分演算子，ダランベルシャン

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$$

は，ν 次元のラプラシアン

---

*) 第4章で述べる自由場，あるいは一般化された自由場以外のモデル．しかし，$\nu=4$ 次元の相対論的場の量子論のモデルでトリヴィアルでないものの存在は，まだひとつも確立されていない．

$$-\Delta = -\sum_{\mu=0}^{s} \frac{\partial^2}{(\partial x^\mu)^2}$$

に変わる．これは，方程式論的にいえば双曲型が楕円型に変わることである．もちろん，楕円型の方が扱いやすい．

Osterwalder-Schrader の公理系を記述するまえに，上に述べた解析接続がどのようになされるかをざっと見ておこう．

$\{\mathscr{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は Wightman の公理系をみたすものとする．解析接続の鍵は，スペクトル条件 (W 4) にある．各 $n \geqq 1$ に対して

$$\mathscr{T}_n^+ = \{(z_1, \cdots, z_n) \in (\mathbf{C}^{s+1})^n \,|\, \mathrm{Im}(z_j - z_{j-1}) \in \mathbf{V}^+, j = 1, \cdots, n\} \qquad (z_0 \equiv 0) \tag{2.5.1}$$

とおく．$\mathscr{T}_n^+$ を**前方管状領域** (forward tube) とよぶ．このとき，$\mathscr{T}_n^+$ 上の解析関数 $W_n(z_1, \cdots, z_n)$ が存在して，超関数の意味で，

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} W_n(x_1 + i\varepsilon a_1, \cdots, x_n + i\varepsilon a_n) = \mathscr{W}_n(x_1, \cdots, x_n), \qquad a_j - a_{j-1} \in \mathbf{V}^+, \ j = 1, \cdots, n \tag{2.5.2}$$

となる．これは，次のようにして示される．まず，(W 4) における超関数 F_{n-1} に対して，$(\overline{\mathbf{V}^+})^{n-1}$ に台をもつ有界連続関数 $G_n(p_1, \cdots, p_{n-1})$ と定数係数の微分作用素 $P(D)$ $[D = (\partial/\partial p_1, \cdots, \partial/\partial p_{n-1})]$ が存在し，超関数の意味で

$$F_{n-1} = P(D) G_{n-1}$$

となる [Bros ら (1967) による一般的な定理の特別な場合]．そこで

$$W_n(z_1, \cdots, z_n) \equiv P(-i(z_2 - z_1), \cdots\cdots, -i(z_n - z_{n-1})) \times \int e^{i\sum_{j=1}^{n-1}(p_j, z_{j+1} - z_j)} G_{n-1}(p_1, \cdots, p_{n-1}) dp_1 \cdots dp_{n-1}, \qquad z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathscr{T}_n^+,$$

として，W_n を定義すれば，これが上記の性質をみたすことは容易にわかる．

F_{n-1} の Lorentz 不変性から，W_n の Lorentz 不変性

$$W_n(\Lambda z_1, \cdots, \Lambda z_n) = W_n(z_1, \cdots, z_n), \qquad \Lambda \in \mathrm{L}_+^\uparrow \tag{2.5.3}$$

がでる．$\mathscr{T}_n^+$ が虚数時間の点

$$z = ((it_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots\cdots, (it_n, \boldsymbol{x}_n)) \qquad (t_j \in \mathbf{R}, \boldsymbol{x}_j \in \mathbf{R}^s ; j = 1, \cdots, n)$$

を含むかどうか調べると，$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ の場合のみ $z \in \mathscr{T}_n^+$ であることがわかる．したがって，$\mathscr{W}_n$ は，まだ，虚数時間の点集合のすべてには解析接続

されていない．したがって，さらに解析接続の領域を拡げる必要があるが，いま見たことから示唆されるように，W_n の n 変数について対称的にうまく解析接続すればよさそうである．そこで，n 文字の置換群を $\mathcal{P}_n$ として，各 $\pi \in \mathcal{P}_n$ に対して，前方管状領域

$$\mathcal{T}_{n,\pi}{}^{+} = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \,|\, \mathrm{Im}(z_{\pi(j)} - z_{\pi(j-1)}) \in \mathrm{V}^{+},\ j = 1, \cdots, n\} \qquad (2.5.4)$$

を考え，W_n を上記のものとして，関数

$$W_{n,\pi}(z_1, \cdots, z_n) \equiv W_n(z_{\pi(1)}, \cdots, z_{\pi(n)}) \qquad (2.5.5)$$

を定義すれば，明らかに，$W_{n,\pi}$ は $\mathcal{T}_{n,\pi}{}^{+}$ で解析的であり，Lorentz 不変である．また，(2.4.2) によって $W_{n,\pi}$ の超関数の意味での境界値は，

$$\mathcal{W}_{n,\pi}(x_1, \cdots, x_n) \equiv \mathcal{W}_n(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)}) \qquad (2.5.6)$$

となる．

次に，$W_n, W_{n,\pi}$ をさらに広い領域へ解析接続するために**拡大された前方管状領域** $\mathcal{T}_{n,\pi}{}^{\mathrm{ext}}$ (extended forward tube) を

$$\mathcal{T}_{n,\pi}{}^{\mathrm{ext}} = \bigcup_{\Lambda \in \mathsf{L}_{+}(\mathbf{C})} \Lambda[\mathcal{T}_{n,\pi}{}^{+}], \qquad \pi \in \mathcal{P}_n \qquad (2.5.7)$$

によって定義する．ここで，$\mathsf{L}_{+}(\mathbf{C})$ は**複素 Lorentz 群**

$$\mathsf{L}_{+}(\mathbf{C}) = \{\Lambda : \nu \text{ 行 } \nu \text{ 列の複素行列} \,|\, (\Lambda z, \Lambda z) = (z, z),\ z \in \mathbf{C}^{\nu}, \det\Lambda = 1\} \qquad (2.5.8)$$

であって

$$\Lambda[\mathcal{T}_{n,\pi}] \equiv \{\Lambda z = (\Lambda z_1, \cdots, \Lambda z_n) \,|\, z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathcal{T}_{n,\pi}{}^{+}\} \qquad (2.5.9)$$

となる．

そこで，次の補題がなりたつ：

補題 2.5.1　W_n を (2.5.3) をみたし，$\mathcal{T}_n{}^{+}$ で解析的な任意の関数とする．このとき，W_n は，$\mathcal{T}_n{}^{\mathrm{ext}}$ の上に解析接続され，それによって得られる関数も (2.5.3) を満足する．

この補題の証明の概略は次の通り：定義によって，任意の $z \in \mathcal{T}_n{}^{\mathrm{ext}}$ に対して，$z = \Lambda w$ となる $\Lambda \in \mathsf{L}_{+}(\mathbf{C})$ と $w \in \mathcal{T}_n{}^{+}$ が存在するので，$W_n(z)$ を

$$W_n(z) = W_n(\Lambda w)$$

によって定義することにしたい．それには，この定義が Λ, w の選び方によら

ないこと，すなわち，$\Lambda' \in L_+(\mathbf{C}), w' \in \mathcal{T}_n^+$ がもう一組あって $z = \Lambda' w'$ のとき，

$$W_n(\Lambda' w') = W_n(\Lambda w)$$

となることを確かめておく必要がある．詳細については，Streater-Wightman (1964) の第2章，ボゴリューボフ他 (1972) の第5章を参照．

上の補題が $W_n \longrightarrow W_{n,\pi}$, $\mathcal{T}_n^{\mathrm{ext}} \longrightarrow \mathcal{T}_{n,\pi}^{\mathrm{ext}}$ の置き換えをしても成立することは明らかである．$W_{n,\pi}$ の $\mathcal{T}_{n,\pi}^{\mathrm{ext}}$ への解析接続も同じ記号で書くことにする．このとき，次の定理がなりたつ：

定理 2.5.2 任意の $\pi, \pi' \in \mathcal{P}_n$ に対して，$\mathcal{T}_{n,\pi}^{\mathrm{ext}} \cup \mathcal{T}_{n,\pi'}^{\mathrm{ext}}$ で解析的な関数がただひとつ存在して，$\mathcal{T}_{n,\pi}^{\mathrm{ext}}$ ($\mathcal{T}_{n,\pi'}^{\mathrm{ext}}$) では，$W_{n,\pi}$ ($W_{n,\pi'}$) に一致する．

この定理の証明には次の事実を用いるが，詳細は省略する：

(i) 一般化された‘くさびの刃の定理’(Edge-of-the-Wedge theorem, Epstein (1960))

(ii) $\mathcal{T}_{n,\pi}^{\mathrm{ext}} \cap \mathbf{R}^{\nu n} \neq \phi$

であり*)，しかも

(iii) 任意の $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{T}_{n,\pi}^{\mathrm{ext}} \cap \mathbf{R}^{\nu n}$ に対して，

$$(x_j - x_k, x_j - x_k) < 0, \qquad j, k = 1, \cdots, n,$$

がなりたつこと，および

(iv) Wightman 超関数の局所性 (W 5).

ここまで来れば，あとはそれほどむずかしくない．すなわち，**対称拡大領域** (permuted extended forward tube)

$$\mathcal{T}_n^{\mathrm{p.e.}} \equiv \bigcup_{\pi \in \mathcal{P}_n} \mathcal{T}_{n,\pi}^{\mathrm{ext}} \tag{2.5.10}$$

を考えれば，次の定理を得る：

定理 2.5.3 Wightman の公理系のうち (W 2), (W 4), (W 5) をみたす任意の緩増加超関数列 $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，各 n ごとに，$\mathcal{T}_n^{\mathrm{p.e.}}$ で解析的な関数 $\underline{W}_n$ がただひとつ存在して，以下のことがなりたつ：

(a) 任意の $\Lambda \in L_+(\mathbf{C})$ と $a \in \mathbf{C}$ に対して

*) $\mathcal{T}_{n,\pi}^{\mathrm{ext}} \cap \mathbf{R}^{\nu n}$ の点は **Jost 点**とよばれる．Jost 点の性質については，Streater-Wightman (1964) の第2章，ボゴリューボフ他 (1972) の第5章参照．

$$\underline{W}_n(\Lambda(z_1-a), \cdots, \Lambda(z_n-a)) = \underline{W}_n(z_1, \cdots, z_n),$$
$$(z_1, \cdots, z_n) \in \mathcal{T}_n^{\text{p.e.}} \qquad (2.5.11)$$

(b)　$\mathcal{W}_n$ は，$\underline{W}_n$ の超関数の意味での境界値である．

(c)
$$\underline{W}_n(z_1, \cdots, z_n) = \underline{W}_n(z_{\pi(1)}, \cdots, z_{\pi(n)}),$$
$$\pi \in \mathcal{P}_n,\ (z_1, \cdots, z_n) \in \mathcal{T}_n^{\text{p.e.}} \qquad (2.5.12)$$

証明　前定理により，各 $\mathcal{T}_{n,\pi}^{\text{ext}}$ では，$W_{n,\pi}$ に一致するような，$\mathcal{T}_n^{\text{p.e.}}$ 上で解析的な関数 $\underline{W}_n$ を定義することができる．各 $W_{n,\pi}$ に対して（W 2）がなりたつので，$\underline{W}_n$ に対して（a）がなりたつ．

（b）は構成の仕方から明らか．（c）を示すために，$\mathbf{J}_n$ を $\mathcal{T}_n^{\text{p.e.}}$ の中の Jost 点の集合とし，任意の $f \in C_0^\infty(\mathbf{J}_n)$ をとる．このとき，（b）により，

$$\mathcal{W}_n(f) = \lim_{\substack{y\to 0 \\ y_j - y_{j-1} \in V^+}} \int \underline{W}_n(x_1+iy_1, \cdots, x_n+iy_n) f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$
$$= \int \underline{W}_n(x_1, \cdots, x_n) f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \qquad (2.5.13)$$

一方，（W 5）により，

$$\mathcal{W}_{n,\pi}(f) = \mathcal{W}_n(f), \qquad \pi \in \mathcal{P}_n,$$

である．したがって，(2.5.13) は，

$$\underline{W}_n(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)}) = \underline{W}_n(x_1, \cdots, x_n),$$
$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{J}_n \qquad (2.5.14)$$

を意味する．この式と，$\mathbf{J}_n$ は開集合であること，および多変数解析関数に対する一致の定理により，(2.5.11) が得られる．$\underline{W}_n$ の一意性は，Jost 点での一致と一致の定理による．∎

こうして，Wightman 超関数 $\mathcal{W}_n$ を，Poincaré 不変性，スペクトル条件および局所性を用いて，$\mathcal{T}_n^{\text{p.e.}}$ まで解析接続することができた．そこで，残る問題は，領域 $\mathcal{T}_n^{\text{p.e.}}$ が虚数時間の点を（ほとんど）すべて含むかどうかである．

一般に，点 $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^{\nu n}$ が，

$$z_j = (it_j, x_j), \qquad t_j \in \mathbf{R},\ \ x_j \in \mathbf{R}^s,\ j = 1, \cdots, n,$$

をみたすとき，この点を **Euclid 的な点**とよび，領域

$$\tilde{\mathscr{E}}_n = \left\{ z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^{\nu n} \,\middle|\, \begin{array}{l} 任意の\ i \neq j\ に対して，z_i \neq z_j \\ かつ\ z\ は\ \text{Euclid}\ 的 \end{array} \right\} \tag{2.5.15}$$

を**非一致 Euclid 領域** (non-coincident Euclidean region) という．このとき，$\tilde{\mathscr{E}}_n \subset \mathscr{T}_n^{\mathrm{p.e.}}$ が示されるので [Osterwalder-Schrader (1973, 1975), Simon (1974)]，これで，初めの目的が達せられたことになる．そこで，関数

$$S_n((t_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (t_n, \boldsymbol{x}_n)) = \underline{W}_n((it_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (it_n, \boldsymbol{x}_n)),$$

$$((it_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (it_n, \boldsymbol{x}_n)) \in \tilde{\mathscr{E}}_n, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2.5.16}$$

$$S_0 \equiv 1 \tag{2.5.17}$$

を定義し，これらを **Schwinger 関数**とよぶ．すなわち，Schwinger 関数は，対称拡大領域に解析接続された Wightman 超関数の非一致 Euclid 領域への制限にほかならず，領域

$$\mathscr{E}_n = \{(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^{\nu n} \mid y_i \neq y_j,\ i \neq j\,;\ i, j = 1, \cdots, n\} \tag{2.5.18}$$

において実解析的である．

2.6 Osterwalder-Schrader の公理系

Wightman 超関数の性質を Schwinger 関数の言葉で表現するために，いくつかの記号を用意しよう．

定義 2.6.1

(a)
$$\mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n}) = \left\{ f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu n}) \,\middle|\, \begin{array}{l} (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^{\nu n}\ とするとき，超平面 \\ y_i = y_j\ (i \neq j,\ i, j = 1, \cdots, n)\ 上では \\ f\ および\ f\ のすべての偏導関数は\ 0 \end{array} \right\} \tag{2.6.1}$$

$\mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n})$ の位相としては $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu n})$ のそれから得られる相対位相を用いる．

(b)
$$\mathscr{S}'_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n}) = \{\mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n})\ 上の連続線形汎関数\} \tag{2.6.2}$$

(c)
$$\mathscr{S}_{+}(\mathbf{R}^{\nu n}) = \left\{ f \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n}) \,\middle|\, \begin{array}{r} \operatorname{supp} f \subset \{((t_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (t_n, \boldsymbol{x}_n)) \in \mathbf{R}^{\nu n}, \\ 0 < t_1 < \cdots < t_n\} \end{array} \right\} \tag{2.6.3}$$

定理 2.6.2　Wightman の公理系をみたす超関数 $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ に（上記の手続きによって）相伴なう Schwinger 関数 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ は以下の性質をもつ：

(OS1)（緩増加性）　各 $n \geqslant 1$ に対して $S_n \in \mathscr{S}'_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n})$．そして，任意の $f \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n})$ に対してエルミート性

$$\overline{S_n(f)} = S_n(\theta f^*) \qquad (S_0 = 1) \tag{2.6.4}$$

がなりたつ．ここで，f^* は，(2.4.2) で定義され，θ は '時間' の反転

$$(\theta f)((t_1, x_1), \cdots, (t_n, x_n)) = f((-t_1, x_1), \cdots, (-t_n, x_n)) \tag{2.6.5}$$

を意味する．

(OS2)（Euclid 共変性）　各 S_n は，Euclid 不変である．すなわち，すべての $a \in \mathbf{R}^{\nu}$，$\Lambda \in SO(\nu)$（ν 次元の Euclid 回転群）に対して

$$S_n(f) = S_n(f_{(a,\Lambda)}), \qquad f \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n}) \tag{2.6.6}$$

注意：

$$f \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n}) \Longrightarrow f_{(a,\Lambda)} \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n})$$

(OS3)（正値性）　すべての $f_0 \in \mathbf{C}$，$f_1 \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R}^{\nu}), \cdots, f_N \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R}^{\nu N})$ に対して，

$$\sum_{n,m=0}^{N} S_{n+m}(\theta f_n{}^* \otimes f_m) \geqslant 0, \qquad N = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.6.7}$$

注意：

$$f_n \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R}^{\nu m}), f_m \in \mathscr{S}_+(\mathbf{R}^{\nu m}) \Longrightarrow \theta f_n{}^* \otimes f_m \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu(n+m)}).$$

(OS4)（対称性）　すべての $\pi \in \mathcal{P}_n$ に対して

$$S_n(f) = S_n(f_\pi), \qquad f \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n}) \tag{2.6.8}$$

ただし，

$$f_\pi(y_1, \cdots, y_n) = f(y_{\pi(1)}, \cdots, y_{\pi(n)}), \qquad (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^{\nu n}.$$

(OS5)（クラスター性）

任意の $f \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu n}) \cap C_0^{\infty}(\mathbf{R}^{\nu n})$，$g \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu m}) \cap C_0^{\infty}(\mathbf{R}^{\nu m})$ に対して

$$\lim_{t \to \infty} S_{n+m}(f \otimes T_t g) = S_n(f) S_m(g) \tag{2.6.9}$$

ここで，

$$(T_t g)((t_1, x_1), \cdots, (t_n, x_n)) = g((t_1 - t, x_1), \cdots, (t_n - t, x_n))$$

注意：

$$\text{十分大きな } t \text{ に対して，} \qquad f \otimes T_t g \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbf{R}^{\nu(n+m)}).$$

この定理の証明はしないが (Osterwalder-Schrader (1973, 1975), Simon (1974) 参照), Wightman の公理系との対応関係だけを大ざっぱに述べると,

(W 1), ($\mathscr{W}_n$ の緩増加性) ⟶ (OS 1)

(W 2) ⟶ (OS 2),　(W 3) ⟶ (OS 3),　(W 5) ⟶ (OS 4)

(W 6) ⟶ (OS 5)

となる [(W 2), (W 4), (W 5) は, 解析接続のために本質的な役割を果たすので, 上のどの左側部分にも入れるべきである].

(OS 1)—(OS 5) は **Osterwalder-Schrader の公理系** とよばれている.

Osterwalder-Schrader の公理系をみたす超関数列 $\{S_n\}$ から Wightman の公理系をみたす超関数列 $\{\mathscr{W}_n\}$ が構成できるかという問題は, 以下に述べる定理によって答えられるが, そこでは条件 (OS 1) が少し強い次の条件に置き換えられている.

(OS 1)′　各 $n \geqslant 1$ に対して, S_n は, (OS 1) の性質に加えて, 評価式

$$\left|\int S_n(y_1, \cdots, y_n) g(y_2-y_1, \cdots, y_n-y_{n-1}) dy_1 \cdots dy_n\right| \leqslant \|\tilde{g}\|,$$
$$g \in \mathscr{S}((\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^s)^{n-1}) \qquad (2.6.10)$$

をみたす. ただし, $\tilde{g}$ は g の時間変数についてのラプラス変換

$$\tilde{g}((t_1, x_1), \cdots, (t_{n-1}, x_{n-1}))$$
$$= \int_{\mathbf{R}_+{}^{n-1}} e^{-\sum_{j=1}^{n-1} t_j s_j} g((s_1, x_1), \cdots, (s_{n-1}, x_{n-1})) ds_1 \cdots ds_{n-1} \qquad (2.6.11)$$

で, $t_1 \geqslant 0, \cdots, t_{n-1} \geqslant 0$ の集合上で考える; $\mathbf{R}_+$ は実軸の正の部分 $\{s>0\}$ を意味する. $\|\tilde{g}\|$ は, $\mathscr{S}((\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^s})^{n-1})$ の適当なセミノルムである. ここに, $\mathscr{S}((\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^s})^{n-1})$ は, $(\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^s})^{n-1}$ で定義され, $(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^s)^{n-1}$ 上で無限回微分可能, かつすべての偏導関数が連続的に $(\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^s})^{n-1}$ に拡張され, しかも無限遠で急減少するような関数の全体を表わし, その位相は $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{\nu(n-1)})$ のそれと同様に入れる.

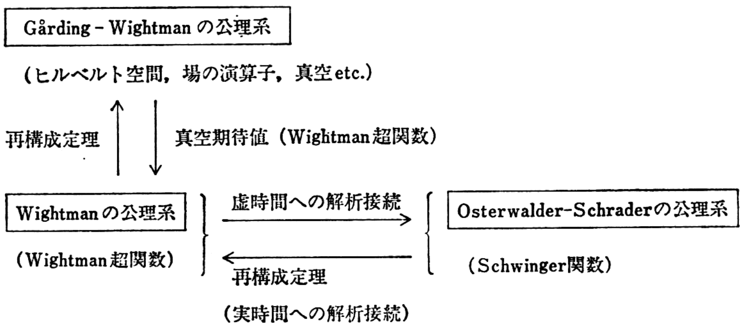
定理 2.6.3 (Osterwalder-Schrader の再構成定理)　(OS 1)′, (OS 2)-(OS 5) をみたす超関数列 $\{S_n\}$ に対して, Wightman の公理系をみたす超関数列 $\{\mathscr{W}_n\}$ がただひとつ存在して, それに相伴なう Schwinger 関数は, $\{S_n\}$ に等しい.

この定理の証明についても，Osterwalder-Schrader (1973)，Simon (1974) を参照．証明には，超関数に関するラプラス変換の理論が用いられる．

こうして，

$$[(\mathrm{W}\,1)-(\mathrm{W}\,6)]\ \begin{cases}\Longrightarrow [(\mathrm{OS}\,1)-(\mathrm{OS}\,5)]\\ \Longleftarrow [(\mathrm{OS}\,1)',\ (\mathrm{OS}\,2)-(\mathrm{OS}\,5)]\end{cases}$$

という形で，Minkowski 空間上の相対論的場の量子論と Euclid 空間上の場の量子論の同等性が示せたことになり[重版のとき追加：ラプラス変換に対する (2.6.10) に代わる条件 (Z) で $[(\mathrm{W1})-(\mathrm{W6})] \Longleftrightarrow [(\mathrm{OS1})-(\mathrm{OS5}),\ (\mathrm{Z})]$ とするものを Zinoviev (1995) が見いだした]．今までの結果をまとめると：



これまでに述べた結果は，スピノル場やテンソル場の理論の場合にも拡張される．また，これまで‘粒子の描像’が登場しなかったが，これは Gårding-Wightman の公理系に基づく **Haag-Ruelle の散乱理論**によって得られる*)．§1.3 に一端を述べたが，時刻 $t\to\pm\infty$ で場 $\phi(t,x)$ が自由場のようにふるまうことが証明され，これにより，$t\to\pm\infty$ での漸近的状態において粒子の描像をつくることができ，また，それによって，実験と直接に結びつく散乱行列——S 行列ともよばれ，$t\to-\infty$ での入射粒子の状態と $t\to+\infty$ での出ていく粒子の状態の間の遷移確率をあたえる——を定義することができる．さらに，公理論の枠組のなかで，*TCP* 不変性（空間，時間および荷電反転の積に対する不変性）やスピンと統計の関係——整数スピンの粒子は Bose 統計（波動関数が対称）に，半整数スピンの粒子は Fermi 統計（波動関数が反対称）

*) ボゴリューボフ他 (1972)，Reed and Simon (1979) を参照．

にしたがう――など物理的に興味のある多くの結果を得ることができる．こうした公理論的アプローチの成果については，ボゴリューボフ他（1980）を参照．

●演習問題

2.1　K を Hilbert 空間とする．ベクトルの列 $\{\psi_m \in \mathsf{K}\}$ は，任意の $\chi \in \mathsf{K}$ に対して

$$\lim_{m\to\infty} \langle \psi_m, \chi \rangle = \langle \psi_\infty, \chi \rangle$$

をみたすとき ψ_∞ に弱収束するといい

$$w\text{-}\lim_{m\to\infty} \psi_m = \psi_\infty$$

と書く．K の正規直交基底を $\{u_m\}$ とすれば，u_m は $m\to\infty$ で 0 ベクトルに弱収束することを示せ．

2.2　ハミルトニアン (2.1.3) を $\hat{\phi}, \hat{\pi}$ の Fock 空間 H_F における演算子として，そのスペクトルの下限が点スペクトルであることを示し，それに属する固有状態 Ω_η を決定せよ．ただし，$\tilde{\eta}(\boldsymbol{k})$ を $\eta(\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換

$$\tilde{\eta}(\boldsymbol{k}) = \int \eta(\boldsymbol{x}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x}$$

とし，はじめ

$$\int d\boldsymbol{k} \frac{|\tilde{\eta}(\boldsymbol{k})|^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}} < \infty \qquad (\omega_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \mu^2})$$

を仮定する．つぎに

$$\eta(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \exp[-\alpha \boldsymbol{x}^2] \qquad (\alpha > 0)$$

とし $w\text{-}\lim_{\alpha\to\infty} \Omega_\eta = 0$ を示せ．

2.3　$P_0, \boldsymbol{P}$ の結合スペクトル $\sigma_\mathrm{J}(P)$ の $\mathsf{L}_+^\uparrow$ 不変性を示せ．

2.4　(GW 5) と $U(a, I)\Omega = \Omega, a \in \mathbf{R}^4$，から (GW 2)-(b) を導け．

2.5　(GW 1)-(d) と (GW 2)-(b), (c) とから (GW 2)-(a) を導け．

2.6　K を一般の Hilbert 空間，$\{V(a) \mid a \in \mathbf{R}^n\}$ をその上における '$\mathbf{R}^n$ の並進群の任意の強連続ユニタリ表現' とする．さらに集合 $\mathsf{S} \in \mathbf{R}^n$ で $a \in \mathsf{S}$ ならば $-a \in \mathsf{S}$ となるようなものがあって，すべての $a \in \mathsf{S}$ に対して弱極限

$$w\text{-}\lim_{\lambda\to\infty} V(\lambda a) = Q$$

が存在し，Q は a に依存しないとする．このとき，Q は部分空間 $\{\Psi \mid V(a)\Psi = \Psi, a \in \mathsf{S}\}$ の上への直交射影演算子であることを示せ．ただし，有界な演算子 $\{A(\lambda)\}$ が $\lambda\to\infty$ で A に弱収束するとは，任意の $\Phi \in \mathsf{K}$ に対して

$$w\text{-}\lim_{\lambda\to\infty} A(\lambda)\Phi = A\Phi$$

となることをいう.

2.7 S_n が $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{\nu n})$ の元であり, 並進不変ならば (OS 1)′ はみたされることを示せ.

●文献

Bros, J., H. Epstein and V. Glaser (1967), On the connection between analyticity and Lorentz covariance of Wightman functions, Commun. Math. Phys. **6,** 77.

Bogolubov, N. N. und O. A. Parasiuk (1957), Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder, Acta Math. **97,** 227.

Bogolubov, N. N. and D. V. Shirkov (1976), *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, (3rd ed.), John Wiley & Sons, New York.

ボゴリューボフ, N. N., A. A. ログノフ, I. T. トドロフ (1972), (新版 1980),『場の量子論の数学的方法』, 江沢他訳, 東京図書.

E. R. Cohen and B. N. Taylor (1983), The 1986 adjustment of the fundamental physical constants, A Report of the CODATA Task Group.

Dyson, F. J. (1953), Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics, Phys. Rev. **75,** 486.

Edwards, S. F. (1953), A nonperturbative approach to quantum electrodynamics, Phys. Rev. **90,** 284.

Epstein, H. (1960), Generalization of the "Edge-of-the-Wedge theorem" J. Math. Phys. **1,** 524.

江沢 洋 (1978), 量子力学の構造, 湯川・豊田 (1978), 第 IV 部.

Ezawa, H. and S. Kamefuchi ed. (1986), ***Progress in Quantum Field Theory,*** North-Holland, Amsterdam.

江沢 洋・恒藤敏彦編 (1977),『量子物理学の展望——50年の歴史に立って (上)』, 岩波.

ファインマン (1968), (新装版1983),『物理法則はいかにして発見されたか』, 江沢訳, ダイヤモンド社.

Gårding, L. and A. S. Wightman (1964), Fields as operator-valued distributions in quantum field theory, Ark. f. Fys. **28,** 129.

ゲルファント, I. N., G. E. シロフ (1963),『超関数論入門』, 功力金二郎, 麦林布道訳, 共立全書.

Gel'fand, I. M., R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro (1963), *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Applications*, Pergamon, London.

Greenberg, O. W. (1959), Haag's theorem and clothed operators, Phys. Rev. **115,** 706.

Haag, R. (1955), On quantum field theories, Dan. Mat. Fys. Medd. **29,** 55.

Haag, R. (1959), The framework of quantum field theory, Nuovo Cim. Suppl. **14,** 131.

Haag, R. and B. Schroer (1962), Postulates of quantum field theory, J. Math. Phys. **3,** 248.

Haag, R. and D. Kastler (1964), An algebraic approach to quantum field theory, J. Math. Phys. **5,** 858.

Haag, R. (1986), Concepts in quantum field theory, *in* Ezawa and Kamefuchi (1986).

Heitler, W. (1954), *The Quantum Theory of Radiation*, Clarendon Press, Oxford.

Hepp, K. (1966), Proof of the Bogolubov-Parasiuk theorem on renormalization, Comm. Math. Phys. **2,** 301.

Jost, R. (1963), *The General Theory of Quantized Fields*, Am. Math. Soc. Publ., Providence.

Kamefuchi, S. et al. ed. (1984), *Proc. Int'l Conf. on 'Foundations of Quantum Mechanics——in the Light of New Technology'*, Tokyo 1983, Phys. Soc. of Japan, Tokyo.

Kamefuchi, S. and Y. Ohnuki (1982), *Quantum Field Theory and Parastatistics*, Univ. of Tokyo Press.

木下東一郎 (1977), 量子電磁力学の現状, 江沢-恒藤 (1977), 第12章.

Kinoshita, T. and W. B. Lindquist (1983), Eighth-order magnetic moment of the electron, Phys. Rev. **D27,** 867, 877, 866.

Kinoshita, T. (1984), How accurate are the predictions of quantum mechanics of many-body systems? *in* Kamefuchi et al. (1984).

Landau, L. D., A. A. Abrikosov, I. M. Khalatnikov (1954), Doklady Akad. Nauk SSSR **95,** 497, 773, 1174 : **96,** 261.

Landau, L. D. (1955), On the quantum theory of fields, *in* Pauli (1955).

町田 茂 (1958), 場の量子論の矛盾, 科学, **28,** 28.

Naimark, M. A. (1964), *Linear Representations of the Lorentz Group*, Pergamon, London.

大貫義郎 (1979)『ポアンカレ群と波動方程式』, 岩波書店.

Osterwalder, K. and R. Schrader (1973), Axioms for Euclidean Green's func-

tions I, Comm. Math. Phys. **31,** 83.

Osterwalder, K. and R. Schrader (1975), Axioms for Euclidean Green's functions II, Comm. Math. Phys. **42,** 281.

Pauli, W. ed. (1955), *Niels Bohr and the Development of Physics: Essays dedicated to Niels Bohr on the occasion of his seventieth birthday,* Pergamon, London.

Reed, M. and B. Simon (1975), *Methods of Modern Mathematical Physics II, Fourier Analysis, Self-adjointness,* Academic Press, New York.

Reed, M. and B. Simon (1979), *Methods of Modern Mathematical Physics III, Scattering Theory,* Academic Press, New York.

Simon, B. (1974), *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory,* Princeton University Press, Princeton.

Streater, R. and A. S. Wightman (1964), *P. C. T., Spin and Statistics and All That,* Benjamin, New York.

朝永振一郎 (1949), 無限大の困難をめぐって, 科学 **19,** 2; 江沢-恒藤 (1977), 第11章.

梅沢博臣・福田信之 (1959),『場の量子論特論——変換性および *S* 行列』, 岩波講座・現代物理学, 岩波.

梅沢博臣・江沢 洋・河原林 研 (1963),『素粒子論の話題』, 共立出版.

van Hove, L. (1952), Les difficultés des divergences pour un modèle particulier de champ quantifié, Physica **18,** 145.

Wightman, A. S. (1956), Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, Phys. Rev. **101,** 860–866.

Yukawa, H. (1947), On the theory of elementary particles, Prog. Theor. Phys. **2,** 209.

Yukawa, H. (1964), Internal structure and symmetry of elementary particles, Prog. Theor. Phys. **31,** 1167.

湯川秀樹 (1968), 素粒子の時空的記述,『創造への飛躍』(1969), 講談社.

湯川秀樹・豊田利幸編 (1978),『量子力学 II』, 岩波講座・現代物理学の基礎 4, 岩波.

Zinoviev, Yury M. (1995), Equivalence of Euclidean and Wightman Field Theories, Comm. Math. Phys. **174** 1.

第3章

数学的準備

3.1 抽象 Fock 空間

H を Hilbert 空間とし，その n 個のテンソル積を H^n としよう*)：

$$\mathsf{H}^n = \underbrace{\mathsf{H}\otimes\mathsf{H}\otimes\cdots\otimes\mathsf{H}}_{n\,個} \tag{3.1.1}$$

$\mathcal{P}_n$ を $\{1,\cdots,n\}$ の置換群とし，$\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ を H の完全正規直交系とする．したがって，

$$\{\Psi_{k_1\cdots k_n} \equiv \psi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\psi_{k_n}\}_{k_1,\cdots,k_n=1}^{\infty}$$

は，H^n の完全正規直交系をなす．各 $\pi\in\mathcal{P}_n$ に対して，H^n 上の有界演算子 T_π を次のようにしてつくる：まず，$\Psi_{k_1\cdots k_n}$ に対して

$$T_\pi\Psi_{k_1\cdots k_n} = \Psi_{k_{\pi(1)}\cdots k_{\pi(n)}}$$

とする．このとき，$\{T_\pi\Psi_{k_1\cdots k_n}\}$ も H^n の完全正規直交系をなす．したがって線形性によって，T_π は H^n 上のユニタリ演算子に一意的に拡張される．その結果を再び T_π と記す．これは H の完全正規直交系の選び方によらない．

H^n 上の有界演算子

$$S_n = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} T_\pi \tag{3.1.2}$$

を定義する．容易にわかるように，$S_n{}^2 = S_n$，$S_n{}^* = S_n$ が成立する（問題 3.1）．すなわち，S_n は直交射影演算子である．S_n の値域を $S_n\mathsf{H}^n$ と書き，H の **n 重対称テンソル積**（n-fold symmetric tensor product）とよぶ．

*) Hilbert 空間のテンソル積の定義と基本的な性質は，既知とする．たとえば，江沢 (1977), Reed and Simon (1972), § II.4 を見よ．

Hilbert 空間の列 $\{\mathscr{F}_n(\mathsf{H})\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{F}_0(\mathsf{H}) &= \mathbf{C} \quad (\text{複素数全体}) \\ \mathscr{F}_n(\mathsf{H}) &= S_n\mathsf{H}^n\end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

によって定義する．これから，Hilbert 空間

$$\mathscr{F} \equiv \mathscr{F}(\mathsf{H}) \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n(\mathsf{H}) \quad (\text{無限直和}) \tag{3.1.4}$$

をつくり，$\mathscr{F}$ を **H 上の対称 Fock 空間**，あるいは，**H 上のボソン Fock 空間**とよぶ．$\mathscr{F}_n(\mathsf{H})$ を ***n* 粒子部分空間** (n-particle subspace) とよび，$\mathscr{F}$ の稠密な部分空間である

$$\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H}) = \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F} \,\middle|\, \begin{array}{l}\Psi \text{ ごとにある } n_0 \geqslant 0 \text{ が存在} \\ \text{して } n \geqslant n_0 \text{ ならば } \Psi^{(n)} = 0\end{array} \right\} \tag{3.1.5}$$

を**粒子数有限のベクトル** (finite-particle vectors) の空間という．第0成分が1で，他の成分はすべて0のベクトル

$$\Omega_0 = \{1, 0, 0, 0, \cdots\cdots\} \tag{3.1.6}$$

を **Fock 真空** (Fock vacuum) とよぶ．

ボソン Fock 空間の典型例として，$\mathsf{H} = \mathsf{L}^2(\mathbf{V}_m{}^+, d\mu_m)$ 上のそれがある．ただし，$\mathbf{V}_m{}^+$ は，$m \geqslant 0$ に対して

$$\mathbf{V}_m{}^+ = \left\{ p = (p^0, p^1, p^2, p^3) \in \mathbf{R}^4 \,|\, (p^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (p^i)^2 = m^2, p^0 \geqslant 0 \right\} \tag{3.1.7}$$

であたえられる双曲面で，

$$d\mu_m(p) = \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p^0} \tag{3.1.8}$$

は，$\mathbf{V}_m{}^+$ 上の測度である．この Fock 空間は，自由な中性スカラー量子場の状態ベクトルの Hilbert 空間として用いられる (第4章参照)．

A を H において稠密に定義された可閉演算子とし (有界である必要はない)，$\mathscr{F}(\mathsf{H})$ における演算子 $d\Gamma(A)$ を

$$d\Gamma(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} d\Gamma_n(A) \tag{3.1.9}$$

によって定義する．ただし，$\mathscr{F}_n(\mathsf{H})$ における演算子 $d\Gamma_n(A)$ は，I を H 上

の単位演算子として，

$$dΓ_n(A) = A\otimes I\otimes\cdots\otimes I + I\otimes A\otimes I\otimes\cdots\otimes I + \cdots + I\otimes I\otimes\cdots\otimes I\otimes A, \quad n \geqslant 1, \tag{3.1.10}$$
$$dΓ_0(A) = 0$$

で定義される演算子である*)．A の定義域を $\mathsf{D}(A)$ とし，$\mathsf{D}_n(A) = \mathsf{D}(A)\otimes\cdots\otimes\mathsf{D}(A)$ (n 個の $\mathsf{D}(A)$ のテンソル積，$n \geqslant 1$)，$\mathsf{D}_0(A) = \mathbf{C}$，として，

$$\mathsf{D}_A = \{Ψ \in \mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H}) \mid Ψ^{(n)} \in \mathsf{D}_n(A)\}$$

とおけば，$dΓ(A)$ の定義域は D_A を含む．演算子 $dΓ(A)$ を A の**第2量子化**（演算子）とよぶ．A が自己共役のとき，$dΓ(A)$ も自己共役で，D_A は $dΓ(A)$ を本質的自己共役にする定義域となる．$A = I$ に対する第2量子化

$$N = dΓ(I) \tag{3.1.11}$$

を**個数演算子** (number operator) とよぶ．N は $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ 上で定義され，$(NΨ)^{(n)} = nΨ^{(n)}, Ψ \in \mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ となる．明らかに，$N \geqslant 0$ である**)．

次に，A を H 上の縮小演算子，すなわち，$\|A\| \leqslant 1$ をみたす演算子とする．このとき，$\mathcal{F}(\mathsf{H})$ 上の有界演算子 $Γ(A)$ を

$$Γ(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} Γ_n(A) \tag{3.1.12}$$

によって定義する．ただし，$Γ_n(A)$ は $\mathcal{F}_n(\mathsf{H})$ 上の有界演算子で

$$Γ_n(A) = A\otimes\cdots\otimes A, \quad n \geqslant 1,$$
$$Γ_0(A) = I \tag{3.1.13}$$

によってあたえられる．$Γ(A)$ は，実は縮小演算子になる．

なぜなら，$\|Γ_n(A)\| = \|A\|^n \leqslant 1$ により，任意の $Ψ \in \mathcal{F}(\mathsf{H})$ に対して

$$\|Γ(A)Ψ\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Γ_n(A)Ψ^{(n)}\|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|Ψ^{(n)}\|^2 = \|Ψ\|^2$$

となるからである．

次の命題によって記号 $dΓ(A), Γ(A)$ の‘正当性’が示される：

---

*) 演算子のテンソル積については，Reed and Simon (1972), § VIII. 10 参照.

**) 一般に，演算子 A に対し‘$A \geqslant 0$ とは $(Ψ, AΨ) \geqslant 0$, $Ψ \in \mathsf{D}(A)$’と定義する.

命題 3.1.1　A を H における自己共役演算子とする．このとき，すべての $t\in\mathbf{R}$ に対して

$$\Gamma(e^{itA}) = e^{itd\Gamma(A)}$$

証明　$\{e^{itA}\}_{t\in\mathbf{R}}$ は，H 上の強連続1パラメーター・ユニタリ群である．したがって，

$$\{\Gamma_n(e^{itA})\}_{t\in\mathbf{R}}$$

は，$\mathscr{F}_n(\mathsf{H})$ 上の強連続1パラメーター・ユニタリ群をあたえる．ゆえに，

$$\{U(t) \equiv \Gamma(e^{itA})\}_{t\in\mathbf{R}}$$

は $\mathscr{F}(\mathsf{H})$ 上の強連続1パラメーター・ユニタリ群である．Stone の定理*) によって，$\mathscr{F}(\mathsf{H})$ における自己共役作用素 S が存在して $U(t) = \exp(itS)$ と書ける．

$$\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\Psi-\Psi}{t} = iS\Psi, \qquad \Psi\in \mathsf{D}(S)$$

であり，逆に，左辺が存在するならば，$\Psi\in\mathsf{D}(S)$ であり，上式が成立する．そこで，$\Psi\in\mathsf{D}_n(A)$ に対して，上式の左辺を計算すると $id\Gamma_n(A)\Psi$ となることがわかるので（問題 3.2），D_A 上で $S=d\Gamma(A)$ となる．D_A は $d\Gamma(A)$ の本質的自己共役の定義域だったから，実際に，演算子として $S=d\Gamma(A)$ が結論される．∎

$f\in\mathsf{H}$ に対して，演算子 $B^\dagger(f):\mathscr{F}_n(\mathsf{H})\longrightarrow\mathscr{F}_{n+1}(\mathsf{H})$ を

$$B^\dagger(f)\Psi = \sqrt{n+1}\,S_{n+1}(f\otimes\Psi) \tag{3.1.14}$$

によって定義する．

$$\|B^\dagger(f)\Psi\| \leqslant \sqrt{n+1}\,\|f\|\,\|\Psi\| \tag{3.1.15}$$

だから，$B^\dagger(f)$ は，n をひとつ固定するとき，有界である．この $B^\dagger(f)$ を用いて，$\mathscr{F}_\mathrm{F}(\mathsf{H})$ における演算子 $A^\dagger(f)$ を次のように定義する：

$$\left.\begin{aligned}(A^\dagger(f)\Psi)^{(n)} &= B^\dagger(f)\Psi^{(n-1)}, \qquad n\geqslant 1,\\ (A^\dagger(f)\Psi)^{(0)} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{3.1.16}$$

$A^\dagger(f)$ を**生成演算子**（creation operator）とよぶ．$A^\dagger(f)$ は $\mathscr{F}_\mathrm{F}(\mathsf{H})$ 上でき

*) Reed and Simon (1972), § VIII. 4.

ちんと定義されており，(3.1.15) によって

$$\|A^\dagger(f)\Psi\| \leqslant \|f\|\,\|(N+1)^{\frac{1}{2}}\Psi\|, \qquad \Psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H}) \tag{3.1.17}$$

が成立する．$A^\dagger(f)$ は有界演算子ではない．

$A^\dagger(f)$ は稠密な定義域をもつので，それに共役な $A^\dagger(f)^*$ が存在する．それを粒子数有限の空間に制限して

$$A(f) = A^\dagger(f)^* \restriction \mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H}) \tag{3.1.18}$$

を定義し，**消滅演算子** (annihilation operator) とよぶ．$A(f)$ の具体的な演算は，特殊な形のベクトル $\Psi=\{\Psi^{(n)}\}$,

$$\begin{aligned}\Psi^{(k)} &= S_k(f_1\otimes\cdots\otimes f_k), \qquad f_1,\cdots,f_k\in\mathsf{H}\\ \Psi^{(n)} &= 0, \qquad n\neq k,\ k\geqslant 1\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

を考えてみるとわかりやすい．すなわち，この場合,

$$\begin{aligned}(A(f)\Psi)^{(n)} &= 0, \qquad n\neq k-1,\\ (A(f)\Psi)^{(k-1)} &= \frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{j=1}^{k}\langle f,f_j\rangle S_{k-1}(f_1\otimes\cdots\otimes\widehat{f_j}\otimes\cdots\otimes f_k)\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

となる．ここで，$\widehat{f_j}$ の $\wedge$ は f_j を除く記号であり，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は H の内積を表わす．また

$$A(f)\Omega_0 = 0, \qquad f\in\mathsf{H}, \tag{3.1.21}$$

である (問題 3.3)．さらに

$$\|A(f)\Psi\| \leqslant \|f\|\,\|N^{\frac{1}{2}}\Psi\|, \qquad \Psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H}) \tag{3.1.22}$$

を得る．これを示すには，次のようにすればよい．$\Psi=\{\Psi^{(n)}\}\in\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ として,

$$\Psi^{(n)} = \sum_{k_1\cdots k_n} a_{k_1\cdots k_n}S_n(\psi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\psi_{k_n}) \qquad (\text{有限項の和}) \tag{3.1.23}$$

となる形のものをとる．$\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ の直交性を用いると —— $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ の内積も $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で書くことにして

$$\begin{aligned}&\langle S_n(\psi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\psi_{k_n}), S_n(\psi_{l_1}\otimes\cdots\otimes\psi_{l_n})\rangle\\ &= \frac{1}{n!}\delta_{\{k_1,\cdots,k_n\},\{l_1,\cdots,l_n\}}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n}\delta_{k_1k_{\pi(1)}}\cdots\delta_{k_nk_{\pi(n)}}\\ &= \frac{m_1!\cdots m_j!}{n!}\delta_{\{k_1,\cdots,k_n\},\{l_1,\cdots,l_n\}}\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

となる．ただし，$\delta_{A,B}$ は $A=B$ のとき 1，$A\neq B$ ならば 0 である．$m_1,\cdots,m_j$ は，$\{k_1,\cdots,k_n\}$ の中に j 種 $(j\leqslant n)$ の番号があるとき，おのおのの種の番号の個数であり，したがって

$$m_1+\cdots+m_j=n$$

をみたす．(3.1.24) と (3.1.21) によって

$$\begin{aligned}\|(A\Psi)^{(n-1)}\|^2 &\leqslant n\|f\|^2\|\Psi^{(n)}\|^2\\ &=\|f\|^2\|(N^{1/2}\Psi)^{(n)}\|^2.\end{aligned}$$

両辺を n について加えることにより，(3.1.22) を得る．いま考えたベクトル Ψ の全体は $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ で稠密だから [(3.1.23) の型のベクトルは $\mathscr{F}_n(\mathsf{H})$ で稠密]，不等式 (3.1.21) は，すべての $\Psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ にまで拡張される．

$A^\dagger(f), A(f)$ はいずれも稠密に定義されていて，(3.1.18) の意味で互いに共役であるから，可閉な (closable) 演算子である．それらの閉包も同じ記号で書くことにする．(3.1.17), (3.1.22) により，$A^\dagger(f), A(f)$ の定義域は $\mathsf{D}(N^{1/2})$ を含み，不等式 (3.1.17), (3.1.22) は $\Psi\in\mathsf{D}(N^{1/2})$ まで拡張される．実際，任意の $\Psi\in\mathsf{D}(N^{1/2})$ に対して，

$$\|N^{1/2}\Psi_n-N^{1/2}\Psi\|\to 0,\qquad \|\Psi_n-\Psi\|\to 0\qquad (n\to\infty)$$

となるような $\Psi_n\in\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ がとれる．このとき，不等式 (3.1.17) によって，$\{A^\dagger(f)\Psi_n\}$ は $\mathscr{F}(\mathsf{H})$ における Cauchy 列をなす．$A^\dagger(f)$ は閉じているから $\Psi\in\mathsf{D}(N^{1/2})$ であり，

$$\|A^\dagger(f)\Psi_n-A^\dagger(f)\Psi\|\to 0\qquad (n\to\infty)$$

となる．$A(f)$ についても同様である．

生成・消滅演算子のきわだった特徴のひとつは，それらがみたす交換関係にある：

命題 3.1.2　任意の $f,g\in\mathsf{H}$ に対して，$A^\dagger(f), A(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ を不変にし，$\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ 上で次の交換関係をみたす．

$$\begin{aligned}&[A(f),A(g)]=0=[A^\dagger(f),A^\dagger(g)],\\&[A(f),A^\dagger(g)]=\langle f,g\rangle.\end{aligned}\qquad(3.1.25)$$

ただし，

$$[A,B]\equiv AB-BA.$$

証明　命題の前半は明らか．$A(f), A^\dagger(f)$ の線形性と n 粒子部分空間での

連続性によって，(3.1.25) は，(3.1.19) の型のベクトル $\Psi=\{\Psi^{(n)}\}$ に対して証明すれば十分である．そのような Ψ に対しては

$$\begin{aligned}(A^\dagger(g)\Psi)^{(k+1)} \\ &= \sqrt{k+1}\,S_{k+1}(g\otimes f_1\otimes\cdots\otimes f_k), \\ (A^\dagger(g)\Psi)^{(n)} &= 0, \qquad n\neq k+1\end{aligned}$$

となるから，(3.1.20) によって

$$\begin{aligned}(A(f)A^\dagger(g)\Psi)^{(k)} &= \Big\{\langle f,g\rangle S_k(f_1\otimes\cdots\otimes f_k) \\ &\quad +\sum_{j=1}^{k}\langle f,f_j\rangle S_k(g\otimes f_1\otimes\cdots\otimes\widehat{f_j}\otimes\cdots\otimes f_k)\Big\} \\ (A(f)A^\dagger(g)\Psi)^{(n)} &= 0, \qquad n\neq k.\end{aligned}$$

一方，(3.1.20) と (3.1.14) によって

$$\begin{aligned}(A^\dagger(g)A(f)\Psi)^{(k)} \\ &= \sum_{j=1}^{k}\langle f,f_j\rangle S_k(g\otimes f_1\otimes\cdots\otimes\hat{f}_j\otimes\cdots\otimes f_k) \\ (A^\dagger(g)A(f)\Psi)^{(n)} &= 0, \qquad n\neq k.\end{aligned}$$

したがって，(3.1.25) の第2式

$$[A(f),A^\dagger(g)]\Psi=\langle f,g\rangle\Psi$$

を得る．第1式についても同様である．∎

さて，H から $\mathscr{F}$(H) の演算子への写像

$$\Phi:\mathrm{H}\ni f\longrightarrow\Phi(f)$$

を

$$\Phi(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\{A^\dagger(f)+A(f)\} \tag{3.1.26}$$

によって定義しよう．容易にわかるように

$$\Phi(af+bg)=a\Phi(f)+b\Phi(g), \qquad a,b\in\mathbf{R}, \quad f,g\in\mathrm{H}. \tag{3.1.27}$$

がなりたつ．

すなわち，写像 Φ は**実線形**である．複素数の $a,b\in\mathbf{C}$ に対しては (3.1.27) は

成立しない．なぜなら，$A^\dagger(f)$ は f について線形だが，$A(f)$ は反線形だからである．$\Phi(f)$ は **Segal の場の演算子** (Segal's field operator) とよばれる．

定理 3.1.3

(1)（自己共役性）　各 $f \in \mathsf{H}$ に対して，$\Phi(f)$ は $\mathcal{F}_\mathrm{F}(\mathsf{H})$ 上で本質的に自己共役である（その唯一の自己共役拡張も同じ記号 $\Phi(f)$ で表わす）．

(2)（交換関係）　各 $\Psi \in \mathcal{F}_\mathrm{F}(\mathsf{H})$ と $f, g \in \mathsf{H}$ に対して，

$$[\Phi(f), \Phi(g)]\Psi = i\,\mathrm{Im}\langle f, g\rangle \Psi. \tag{3.1.28}$$

(3)　H 上のすべてのユニタリ演算子 U に対して

$$\Gamma(U) : \mathsf{D}(\Phi(f)) \longrightarrow \mathsf{D}(\Phi(Uf)) \tag{3.1.29}$$

（上への写像）

$$\Gamma(U)\Phi(f)\Gamma(U)^{-1}\Psi = \Phi(Uf)\Psi,$$
$$\Psi \in \mathsf{D}(\Phi(Uf)), \quad f \in \mathsf{H}. \tag{3.1.30}$$

証明

(1)　$\Phi(f)$ が $\mathcal{F}_\mathrm{F}(\mathsf{H})$ 上で対称なことは明らか．$\Phi(f)$ は $\mathcal{F}_\mathrm{F}(\mathsf{H})$ を不変にしているので，$\mathcal{F}_\mathrm{F}(\mathsf{H})$ のベクトルに対しては，$\Phi(f)$ の任意の有限個の積を作用させることができる．いま，$\Psi \in \mathcal{F}_\mathrm{F}(\mathsf{H})$ として $\Psi^{(k)}=0$, $k \neq n$, $\Psi^{(n)} \neq 0$ となるものを考えよう．このとき，(3.1.17), (3.1.22) によって，

$$\|\underbrace{A^\sharp(f)\cdots A^\sharp(f)}_{k\,個}\Psi\| \leqslant \sqrt{n+1}\cdots\cdots\sqrt{n+k}\,\|f\|^k\|\Psi\|.$$

ここで，$A^\sharp(f)$ は $A^\dagger(f)$ か $A(f)$ のどちらかを表わす．したがって，

$$\|\Phi(f)^k\Psi\| \leqslant \sqrt{2^k(n+k)!}\,\|f\|^k\|\Psi\|.$$

となり，無限級数

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{t^k\sqrt{2^k(n+k)!}\,\|f\|^k}{k!}$$

は，すべての $t>0$ に対して収束するから，

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{\|\Phi(f)^k\Psi\|}{k!}t^k < \infty.$$

すなわち，Ψ は $\Phi(f)$ の**解析ベクトル** (analytic vector) である．任意の $\Psi \in \mathcal{F}_\mathrm{F}(\mathsf{H})$ は，いま考えた型のベクトルの有限一次結合として表わされるから，$\Phi(f)$ の解析ベクトルであることがわかる．ゆえに，Nelson の解析ベクトル

の定理*)によって，$\Phi(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ 上で本質的に自己共役である．

（2） これは，命題3.1.2から容易にわかる．

（3） Ψ を (1) における型のベクトルとし，しかも

$$\Psi^{(n)} = S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$$

としよう．このとき，

$$(\Gamma(U)^{-1}\Psi)^{(k)} = \delta_{n,k} S_n(U^{-1}f_1 \otimes \cdots \otimes U^{-1}f_n)$$

であるから

$$(A^{\dagger}(f)\Gamma(U)^{-1}\Psi)^{(k)}$$
$$= \delta_{k,n+1}\sqrt{n+1}\, S_{n+1}(f \otimes U^{-1}f_1 \otimes \cdots \otimes U^{-1}f_n).$$

したがって，

$$(\Gamma(U)A^{\dagger}(f)\Gamma(U)^{-1}\Psi)^{(k)}$$
$$= \delta_{k,n+1}\sqrt{n+1}\, S_{n+1}(Uf \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$$
$$= (A^{\dagger}(Uf)\Psi)^{(k)}.$$

すなわち，

$$\Gamma(U)A^{\dagger}(f)\Gamma(U)^{-1}\Psi = A^{\dagger}(Uf)\Psi. \tag{3.1.31}$$

同様に（あるいは共役演算子に移って），

$$\Gamma(U)A(f)\Gamma(U)^{-1}\Psi = A(Uf)\Psi. \tag{3.1.32}$$

$\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ の任意の元は，いま考えた Ψ の型のベクトルの一次結合で近似できるから，(3.1.31), (3.1.32) はすべての $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ に対して成立する．したがって (3.1.30) が $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ について成立する．(1) によって $\Psi \in \mathsf{D}(\Phi(Uf))$ に対して，

$$\|\Psi_n - \Psi\| \to 0, \quad \|\Phi(Uf)\Psi_n - \Phi(Uf)\Psi\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる $\Psi_n \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ がとれる．このとき，(3.1.30) によって，

$$\|\Phi(f)\Gamma(U)^{-1}\Psi_n - \Gamma(U)\Phi(Uf)\Psi\| \to 0.$$

また，

$$\|\Gamma(U)^{-1}\Psi_n - \Gamma(U)^{-1}\Psi\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから，$\Phi(f)$ の閉性によって，$\Gamma(U)^{-1}\Psi \in \mathsf{D}(\Phi(f))$．ゆえに，$\Psi \in \mathsf{D}(\Phi(Uf))$ に対して (3.1.30) が示せたと同時に，$\Gamma(U)\mathsf{D}(\Phi(f)) \supset \mathsf{D}(\Phi(Uf))$ がわか

*) Reed and Simon (1975), § X. 6; 江沢 (1978), § 17. 1.

った．次に逆の包含関係を示そう．そのために，$\Psi \in \Gamma(U)\mathrm{D}(\Phi(f))$ とする．したがって，$\Gamma(U)^{-1}\Psi \in \mathrm{D}(\Phi(f))$ である．再び，(1) によって，

$$\|\tilde{\Psi}_n - \Gamma(U)^{-1}\Psi\| \to 0, \quad \|\Phi(f)\tilde{\Psi}_n - \Phi(f)\Gamma(U)^{-1}\Psi\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる $\tilde{\Psi}_n \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathrm{H})$ がとれる．$\Gamma(U)\tilde{\Psi}_n \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathrm{H})$ に対しては (3.1.30) が成立したから，

$$\|\Phi(Uf)\Gamma(U)\tilde{\Psi}_n - \Gamma(U)\Phi(f)\Gamma(U)^{-1}\Psi\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

したがって，$\Psi \in \mathrm{D}(\Phi(Uf))$ であって，$\Psi \in \Gamma(U)\mathrm{D}(\Phi(f))$ に対して (3.1.30) が成立する．ゆえに，

$$\Gamma(U)\mathrm{D}(\Phi(f)) \subset \mathrm{D}(\Phi(Uf))$$

となり，前の結果と合わせて，(3.1.29) を得る．∎

生成・消滅演算子の多項式に対する **Wick 積**を定義しよう．まず，

$$P = A^\dagger(f_1)^{n_1}A(g_1)^{m_1}A^\dagger(f_2)^{n_2}A(g_2)^{m_2} \times \cdots\cdots \times A^\dagger(f_k)^{n_k}A(g_k)^{m_k}, \qquad n_j, m_j = 0, 1, 2, \cdots$$

の形の積に対して，Wick 積 $:P:$ を

$$:P: = \left(\prod_{j=1}^{k} A^\dagger(f_j)^{n_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{k} A(g_j)^{m_j}\right) \tag{3.1.33}$$

によって定義する．$A^\dagger(\cdot)$ どうし，$A(\cdot)$ どうしは互いに可換であるから，記号 :　: の中では‘すべての演算子は可換である’; この記号の中で交換関係 (3.1.25) による変形をすると誤った結果になるから注意しなければならない．P のような演算子の有限一次結合に対しては，線形性によって :　: を拡張する．

命題 3.1.4 $f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_m \in \mathrm{H}$ とする．このとき，(3.1.26) の Φ に対して

$$\begin{aligned}&\langle :\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n): \Omega_0,\ :\Phi(g_1)\cdots\Phi(g_m): \Omega_0\rangle \\ &= 2^{-n}\delta_{nm}\sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} \langle f_1, g_{\pi(1)}\rangle \cdots \langle f_n, g_{\pi(n)}\rangle.\end{aligned} \tag{3.1.34}$$

証明 $A(f)\Omega_0 = 0$ によって

$$:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n): \Omega_0 = 2^{-n/2}A^\dagger(f_1)\cdots A^\dagger(f_n)\Omega_0. \tag{3.1.35}$$

$A^\dagger$ の定義を用いて，右辺を計算すると左辺のベクトルの第 m 成分は

$$\begin{aligned}&(:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):\Omega_0)^{(m)} \\ &= 2^{-n/2}\delta_{mn}\sqrt{n!}\, S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

となる．したがって，$:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):\Omega_0\in\mathscr{F}_n(\mathsf{H})$ であるから，(3.1.34) の左辺は，$n\neq m$ ならば 0 であり，$n=m$ のとき，$S_n^*=S_n, S_n{}^2=S_n$ によって

$$\begin{aligned}&2^{-n}n!\langle S_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n), S_n(g_1\otimes\cdots\otimes g_n)\rangle\\&\quad=2^{-n}n!\langle f_1\otimes\cdots\otimes f_n, S_n(g_1\otimes\cdots\otimes g_n)\rangle\\&\quad=2^{-n}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n}\langle f_1, g_{\pi(1)}\rangle\cdots\langle f_n, g_{\pi(n)}\rangle\end{aligned}$$

となる．∎

命題 3.1.5 ベクトル $:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):\Omega_0$ $(f_1,\cdots,f_n\in\mathsf{H})$ によって生成される部分空間は $\mathscr{F}_n(\mathsf{H})$ で稠密である．

証明 (3.1.36) と $\{S_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)\mid f_1,\cdots,f_n\in\mathsf{H}\}$ が $\mathscr{F}_n(\mathsf{H})$ で稠密であることから明らか．∎

命題 3.1.6 任意の $n\geqslant 1$ と $f_1,\cdots,f_n\in\mathsf{H}$ に対して

$$\begin{aligned}&:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):\\&\quad=\Phi(f_1):\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):\\&\qquad-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\langle f_1,f_k\rangle:\Phi(f_2)\cdots\widehat{\Phi(f_k)}\cdots\Phi(f_n):\end{aligned}\tag{3.1.37}$$

が成立する．

証明

$$\begin{aligned}&\Phi(f_1):\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):\\&\quad=\frac{1}{\sqrt{2}}\{A^\dagger(f):\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):+A(f_1):\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):\}\\&\quad=\frac{1}{\sqrt{2}}\{:A^\dagger(f)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):+A(f_1):\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):\}\\&\quad=:\Phi(f_1)\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):\\&\qquad+\frac{1}{\sqrt{2}}[A(f_1),\ :\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):].\end{aligned}$$

一方，$\{2,\cdots,n\}=\mathsf{S}$ とすると

$$:\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):=2^{-(n-1)/2}\sum_{\mathsf{B}\subset\mathsf{S}}\prod_{i\in\mathsf{B}}A^\dagger(f_i)\prod_{j\in\mathsf{S}\setminus\mathsf{B}}A(f_j)$$

であるから（和には B$=\phi$（空集合）も含める），

$$\begin{aligned}A(f_1):\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):\\ &=2^{-(n-1)/2}\sum_{\mathrm{B}\subset\mathrm{S}}\sum_{k\in\mathrm{B}}\prod_{\substack{i\in\mathrm{B}\\ i\neq k}}A^{\dagger}(f_i)\langle f_1,f_k\rangle\prod_{j\in\mathrm{S}\backslash\mathrm{B}}A(f_j)\\ &\quad+:\Phi(f_2)\cdots\Phi(f_n):A(f_1).\end{aligned}$$

第1項は，和のとりかたを変えることにより

$$\begin{aligned}(\text{第1項})&=2^{-(n-1)/2}\sum_{k\in\mathrm{S}}\langle f_1,f_k\rangle\sum_{\substack{\mathrm{B}\subset\mathrm{S}\\ k\in\mathrm{B}}}\prod_{\substack{i\in\mathrm{B}\\ i\neq k}}A^{\dagger}(f_i)\prod_{j\in\mathrm{S}\backslash\mathrm{B}}A(f_j)\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=2}^{n}\langle f_1,f_k\rangle:\Phi(f_2)\cdots\widehat{\Phi(f_k)}\cdots\Phi(f_n):\end{aligned}$$

となるから，(3.1.37) を得る．∎

系 3.1.7　(真空の巡回性)

$$\mathscr{L}\{\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n)\Omega_0,\ \Omega_0\mid f_1,\cdots,f_n\in\mathsf{H},\ \ n=1,2,\cdots\}$$

は $\mathscr{F}(\mathsf{H})$ で稠密である．ただし，$\mathscr{L}\{\cdots\}$ は $\{\cdots\}$ の元の線形結合の全体を表わす．

証明　命題3.1.6によって，$:\Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n):$ は，$\Phi(f_1),\cdots,\Phi(f_n)$ の n 次以下の多項式の有限一次結合で表わされる．これと命題3.1.5を考慮すれば求める結果を得る．∎

注意　上の $\mathscr{L}\{\cdots\}$ は粒子数有限の空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ とも一致しない．そこでも稠密であるにとどまる．

系 3.1.8　すべての $\Psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ に対して，強収束の意味で

$$:e^{\alpha\Phi(f)}:\Psi\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n:\Phi(f)^n:\Psi}{n!}\tag{3.1.38}$$

が存在し，

$$:e^{\alpha\Phi(f)}:\Psi=e^{\alpha\Phi(f)}e^{-(\alpha^2/4)\|f\|^2}\Psi\tag{3.1.39}$$

が成立する．

証明　命題3.1.6によって，

$$:\Phi(f)^n:=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{k!(n-2k)!}\Phi(f)^{n-2k}\left(-\frac{1}{4}\|f\|^2\right)^k.$$

したがって，

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha^n:\Phi(f)^n:}{n!}=\sum_{k=0}^{[N/2]}\sum_{n=2k}^{N}\frac{\alpha^{n-2k}\Phi(f)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}\left(-\frac{\alpha^2}{4}\|f\|^2\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{[N/2]}\frac{\left(-\frac{\alpha^2}{4}\|f\|^2\right)^k}{k!}\sum_{j=0}^{N-2k}\frac{(\alpha\Phi(f))^j}{j!}.$$

$\Psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})$ は $\Phi(f)$ に対する解析的ベクトルであったから（定理 3.1.3 (1) の証明参照），

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(\alpha\Phi(f))^j\Psi}{j!}$$

は $n\to\infty$ のとき，$\{\exp[\alpha\Phi(f)]\}\Psi$ に強収束する．したがって，

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha^n:\Phi(f)^n:\Psi}{n!}$$

は $N\to\infty$ で，(3.1.39) の右辺に強収束する．∎

3.2 Gauss 超過程

Fock 空間の確率論的表現を得るために，ここで，確率論の言葉を最小限必要な形で準備しておく．

$(\mathbf{M},\Sigma,\mu)$ を確率空間とする．すなわち，Σ は空間 $\mathbf{M}$ 上の σ-加法族，μ は Σ で定義された確率測度（$\mu(\mathbf{M})=1$）とする．可測空間 $(\mathbf{M},\Sigma)$ で定義された実数値関数を**確率変数**という．確率変数 f に対して

$$\langle f\rangle\equiv\int_{\mathbf{M}}fd\mu \tag{3.2.1}$$

を f の（測度 μ に関する）**期待値**という．確率変数 $f_1,\cdots,f_n$ があたえられると

$$\mu_{f_1,\cdots,f_n}(A)=\mu((f_1\otimes\cdots\otimes f_n)^{-1}(A)),\quad A\in(\mathbf{R}^n\text{ のボレル集合体}) \tag{3.2.2}$$

によって，$\mathbf{R}^n$ 上の確率測度 $\mu_{f_1,\cdots,f_n}$ が定義される．ただし，$f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ は，

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(m) = (f_1(m), \cdots, f_n(m)), \qquad m \in \mathbf{M} \tag{3.2.3}$$

で定義される，$\mathbf{M}$ から $\mathbf{R}^n$ への可測関数である．測度 $\mu_{f_1,\cdots,f_n}$ は，$f_1, \cdots, f_n$ の**同時分布**，あるいは単に**分布**とよばれる．

$$\begin{aligned} C_{f_1,\cdots,f_n}&(t_1, \cdots, t_n) \\ &\equiv \int_{\mathbf{M}} e^{i\sum_{j=1}^{n} t_j f_j} d\mu \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\sum_{j=1}^{n} t_j x_j} d\mu_{f_1,\cdots,f_n}(x_1, \cdots, x_n) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

は，分布 $\mu_{f_1,\cdots,f_n}$ の**特性関数** とよばれる．

命題 3.2.1　$f_1, \cdots, f_n$ を確率変数とする．
このとき，すべてのモーメント

$$\langle f_1^{k_1} \cdots f_n^{k_n} \rangle, \qquad k_j = 0, 1, 2, \cdots, \ j = 1, 2, \cdots, n$$

が存在するための必要十分条件は，$C_{f_1,\cdots,f_n}(t_1, \cdots, t_n)$ が $t_1, \cdots, t_n$ について無限回微分可能であることであり，このとき

$$\left.\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} C_{f_1,\cdots,f_n}(t_1, \cdots, t_n)}{\partial t_1^{k_1} \cdots \partial t_n^{k_n}}\right|_{t_1=\cdots=t_n=0} = i^{k_1+\cdots+k_n} \langle f_1^{k_1} \cdots f_n^{k_n} \rangle. \tag{3.2.5}$$

がなりたつ．

証明は読者の演習とする．重要な点は，$C_{f_1,\cdots,f_n}(t_1, \cdots, t_n)$ の微分可能性から，モーメントの存在が導かれることである．

確率変数の有限個の組 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ は，特性関数が

$$C_{f_1,\cdots,f_n}(t_1, \cdots, t_n) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j} \tag{3.2.6}$$

という形をもつとき，**Gauss 型**であるという．ただし，$a = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ は成分が実数 ($a_{ij} \in \mathbf{R}$) の正定値行列であり，**分散行列** (covariance matrix) とよばれる．

注意　上に定義した Gauss 型確率変数は，各 f_j の期待値あるいは**平均**が 0，すなわち

$$\langle f_j \rangle = 0, \qquad j = 1, \cdots, n$$

をみたすものである．一般には，平均が0でない Gauss 型確率変数も定義される．すなわち，f_j の平均が m_j で，分散行列が a の Gauss 型確率変数 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ とは，

$$C_{f_1,\cdots,f_n}(t_1, \cdots, t_n) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_it_j + i\sum_{j=1}^{n} t_jm_j}$$

となるもののことをいう．しかし，本書に登場するのは，平均が0の Gauss 型確率変数のみなので，(3.2.6) のように Gauss 型確率変数を定義した．

以後，Gauss 型確率変数を G. R. V. (Gaussian Random Variable) と略称する．

命題 3.2.2 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ が G. R. V. であるための必要十分条件は，任意の $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ に対して $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$ が一変数の G. R. V. となることである．

証明は読者の演習とする．

G. R. V. $\{f_1, \cdots, f_n\}$ に対しては，Lévy-Haviland の反転公式*) によって，その分布を計算することができる：

$$d\mu_{f_1,\cdots,f_n}(x_1, \cdots, x_n) = (2\pi)^{-n/2}(\det\ a)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (a^{-1})_{ij}x_ix_j} dx_1 \cdots dx_n \qquad (3.2.7)$$

G. R. V. の基本的性質として

命題 3.2.3 G. R. V. $\{f_1, \cdots, f_{2n}\}$ に対して，

$$\langle f_1 \cdots f_{2n} \rangle = \sum_{\text{comb}} \langle f_{i_1} f_{j_1} \rangle \cdots \langle f_{i_n} f_{j_n} \rangle \qquad (3.2.8)$$

$$\langle f_1 \cdots f_{2n-1} \rangle = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad (3.2.9)$$

ここで，$\sum_{\text{comb}}$ は $(1, \cdots, 2n)$ を n 個の異なった（順序づけされていない）対 $(i_1, j_1), \cdots, (i_n, j_n)$ として書く仕方のすべて［$(2n)!/2^n n!$ 通り］にわたる和を表わす．ただし，$i_1 < i_2 < \cdots < i_n$,　$i_k < j_k$, $k = 1, \cdots, n$, とする．

証明 $\{f_1, \cdots, f_l\}$ が G. R. V. のとき，(3.2.7) によって

$$\langle f_1 \cdots f_l \rangle = (2\pi)^{-l/2}(\det a)^{-1/2}$$

*) たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』(裳華房，1963)，§30 を参照．

$$\times \int_{\mathbf{R}^l} x_1 \cdots x_l e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l}(a^{-1})_{ij}x_i x_j} dx_1 \cdots dx_l. \qquad (3.2.10)$$

となる．したがって，(3.2.9) を得る．また，(3.2.8) は

$$a_{ij} = \langle f_i f_j \rangle$$

として，(3.2.6) と命題 3.2.1 によって得られる．あるいは，公式 (3.2.10) を直接に使ってもよい．∎

$f_1, \cdots, f_k$ を互いに異なる確率変数とする（必ずしも G.R.V. である必要はない）．このとき，f_j の巾の積 $f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}$ に対して，Wick 積 $:f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}:$ を漸化式によって次のように定義する．

$$:f_1^0 \cdots f_k^0: = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial f_i} :f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}: = \begin{cases} n_i : f_1^{n_1} \cdots f_i^{n_i-1} \cdots f_k^{n_k}: & (n_i \geqq 1) \\ 0 & (n_i = 0) \end{cases}$$

$$\langle :f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k}: \rangle = 0 \qquad (n_1 + \cdots + n_k \neq 0).$$

ただし，演算 $\partial/\partial f_i$ は

$$\frac{\partial}{\partial f_i} f_1^{n_1} \cdots f_k^{n_k} = \begin{cases} n_i f_1^{n_1} \cdots f_i^{n_i-1} \cdots f_k^{n_k} & (n_i \geqq 1) \\ 0 & (n_i = 0) \end{cases}$$

によって定義し，$f_1, \cdots, f_k$ の任意の多項式に対しては線形性によって拡張する．

命題 3.2.4　G.R.V. f に対して

$$:f^n: = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!} f^{n-2k} \left(-\frac{1}{2} \langle f^2 \rangle \right)^k$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots. \qquad (3.2.11)$$

ただし，$[n/2]$ の [　] は Gauss の記号である．

証明　(3.2.11) の右辺を F_n とおいて，F_n が Wick 積 $:f^n:$ と同じ漸化式をみたすことを示そう．$F_0 = 1$ は明らか．$n \geqq 1$ のとき，

$$\frac{\partial}{\partial f} F_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(n-2k)n!}{k!(n-2k)!} f^{n-2k-1} \left(-\frac{1}{2} \langle f^2 \rangle \right)^k$$

$$= nF_{n-1}.$$

また，命題 3.2.3 によって

$$\langle F_n \rangle = 0$$

となることもわかる．ゆえに (3.2.11) が成立する．■

命題 3.2.5 f を G.R.V. とする．このとき，任意の複素数 $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して，

$$:e^{\alpha f}: \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{:f^n:}{n!} \alpha^n \tag{3.2.12}$$

は，$\mathbf{M}$ の各点 (a.e.) での絶対収束の意味で定義され

$$:e^{\alpha f}: = e^{-\frac{\alpha^2}{2}\langle f^2 \rangle} e^{\alpha f} \tag{3.2.13}$$

となる．(3.2.12) の右辺は，すべての $p \in [1, \infty)$ に対して，$\mathrm{L}^p(\mathbf{M}, d\mu)$ の意味で収束する．

証明 命題 3.2.4 の $n-2k$ を j とおき和の順序を変えれば

$$\begin{aligned} a_N &\equiv \sum_{n=0}^{N} \frac{:f^n:}{n!} \alpha^n \\ &= \sum_{k=0}^{[N/2]} \frac{\left(-\frac{\alpha^2}{2}\langle f^2 \rangle\right)^k}{k!} \sum_{j=0}^{N-2k} \frac{(\alpha f)^j}{j!} \\ &\xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\frac{\alpha^2}{2}\langle f^2 \rangle} e^{\alpha f} \quad (\mathbf{M} \text{ の各点 (a.e.) ごとに}) \end{aligned}$$

すなわち，(3.2.13) を得る．

また，$N>0$ と任意の $p \in (0, \infty)$ に対して

$$b_N \equiv \langle |a_N - :e^{\alpha f}:|^p \rangle$$

とおこう．

$$|a_N - :e^{\alpha f}:|^p \leqslant \exp\left\{p|\alpha|\left(|f| + \frac{|\alpha|}{2}\langle f^2 \rangle\right)\right\}$$

となり，$\exp\{p|\alpha||f|\}$ は可積分であるので，Lebesgue の収束定理によって，

$$\lim_{N\to\infty} b_N = 0$$

となる．すなわち，a_N は $:e^{\alpha f}:$ に $\mathrm{L}^p(\mathbf{M}, d\mu)$ の意味で収束する．■

μ, ν を $\mathbf{M}$ 上の 2 つの確率測度とし，f は両方の測度に関して G.R.V. であるとしよう．このとき，(3.2.13) によって，

$$:e^{\alpha f}:_{\mu}=:e^{\alpha f}:_{\nu}e^{(\alpha^2/2)(\langle f^2\rangle_\nu-\langle f^2\rangle_\mu)}$$

となる．ただし，$:\ :_\mu$, $:\ :_\nu$, $\langle\ \rangle_\mu$, $\langle\ \rangle_\nu$ はそれぞれ，μ,ν についての Wick 積，期待値を表わす．したがって，α についての展開係数を比較することにより，

$$:f^n:_{\mu}=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}:f^{n-2k}:_{\nu}(\langle f^2\rangle_\nu-\langle f^2\rangle_\mu)^k \tag{3.2.14}$$

を得る．

命題 3.2.6　$\{f,g\}$ を G.R.V. とする．このとき，

$$\langle :f^n::g^m:\rangle=n!\langle fg\rangle^n\delta_{nm}. \tag{3.2.15}$$

証明　(3.2.13) によって，任意の $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ に対して，

$$:e^{\alpha f}::e^{\beta g}:=:e^{\alpha f+\beta g}:e^{\alpha\beta\langle fg\rangle}$$

が成立する．したがって，

$$\langle :e^{\alpha f}::e^{\beta g}:\rangle=e^{\alpha\beta\langle fg\rangle} \tag{3.2.16}$$

左辺は，(3.2.12) の $\mathrm{L}^2(\mathbf{M},d\mu)$ の収束によって

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\beta^m}{n!m!}\langle :f^n::g^m:\rangle.$$

これは，α,β の正則関数であり，(3.2.16) の右辺もそうだから，$\alpha^n\beta^m$ の係数を比べることにより，(3.2.15) を得る．∎

注意　(3.2.15) は，命題 3.2.3 と 3.2.4 を用いる直接の計算によっても証明される．

命題 3.2.7　$\{f_1,\cdots,f_n,g_1,\cdots,g_m\}$ を G.R.V. とする．このとき

$$\begin{aligned}&\langle :f_1\cdots f_n::g_1\cdots g_m:\rangle\\&\quad=\delta_{nm}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n}\langle f_1g_{\pi(1)}\rangle\cdots\langle f_ng_{\pi(n)}\rangle\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

証明　命題 3.2.2 によって，任意の $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m\in\mathbf{R}$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_jf_j+\sum_{j=1}^{m}\beta_jg_j$$

は G.R.V. だから，命題 3.2.6 により

$$\left\langle :\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j\right)^n : : \left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j\right)^m : \right\rangle$$
$$= \delta_{nm} n! \left(\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\langle f_i g_j\rangle\right)^n.$$

上式の左辺は

$$n!\,m!\sum\frac{\alpha_1^{n_1}\cdots\alpha_n^{n_n}\,\beta_1^{m_1}\cdots\beta_m^{m_m}}{n_1!\cdots n_n!m_1!m_2!\cdots m_m!}\langle :f_1^{n_1}\cdots f_n^{n_n}: :g_1^{m_1}\cdots g_m^{m_m}:\rangle$$

であるから，$n_1=\cdots=n_n=m_1=\cdots=m_m=1$ の係数を比較することにより (3.2.17) を得る．∎

さて，いよいよ本節の主題に入る．

定義 3.2.8 $(\mathrm{M}, \Sigma, \mu)$ を確率空間，H を実 Hilbert 空間とする．H から，M 上の確率変数への写像 $\phi: \mathrm{H} \ni f \longrightarrow \phi(f)$ が **H を指標とする Gauss 超過程**であるとは，ϕ が次の条件 (1)～(4) をみたすことをいう：

(1)（線形性） すべての $f, g \in \mathrm{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して

$$\phi(\alpha f+\beta g) = \alpha\phi(f)+\beta\phi(g).$$

この等式は，M のほとんどいたるところ (almost everywhere, a.e.) の点で成立するものとする．

(2) Σ は，すべての $\phi(f)$ $(f \in \mathrm{H})$ が可測となるような最小の σ-加法族である．このことを $\{\phi(f)\,|\,f \in \mathrm{H}\}$ は full であるといい表わす．

(3) 各 $\phi(f)$ $(f \in \mathrm{H})$ は G. R. V. である．すなわち，

$$\langle e^{it\phi(f)}\rangle = e^{-(1/2)t^2\langle\phi(f)^2\rangle}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(4)

$$\langle\phi(f)\phi(g)\rangle = \frac{1}{2}\langle f, g\rangle_{\mathrm{H}}, \qquad f, g \in \mathrm{H}.$$

上の定義から，明らかなように，H を指標とする Gauss 超過程の実現する確率空間は，H に依存する．そこで，一般に，その実現する測度空間を $\mathbf{Q}_{\mathrm{H}}$，確率測度を $d\mu_{0,\mathrm{H}}$，超過程を $\phi_{\mathrm{H}}(f)$ と記す．添字 H をつけなくても混乱の恐れのないときは単に $\mathbf{Q}, d\mu_0, \phi(f)$ と書く．

Gauss 超過程の存在と一意性はあとで述べるとして，当面，その基本的構造

に注意を集中する.

補題 3.2.9　$\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$（$I$ は添字集合）を確率空間 $(\mathbf{M}, \Sigma, \mu)$ 上の確率変数の集合とし,

$$\mathsf{A} = \{F(f_{\alpha_1}, \cdots, f_{\alpha_n}) \mid F \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \alpha_i \in I, n \geqslant 1\}$$

とおく*). このとき, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ が full ならば, A は $\mathsf{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ で稠密である.

証明　$\mathsf{H} = \mathsf{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ とする. A は H 上の掛算演算子とみることができる. すなわち, $F \in \mathsf{A}$ の $\Psi \in \mathsf{H}$ への作用を

$$(F\Psi)(m) \equiv F(m)\Psi(m), \qquad m \in \mathbf{M},$$

によって定義して, A を H 上の有界演算子の集合と見る. A には, 位相として, 演算子の強収束によるものが入るから, この強収束についての A の閉包を A_S としよう. このとき, A_S は von Neumann 代数となる**). まず, von Neumann 代数として,

$$\mathsf{A}_S = \mathsf{L}^\infty(\mathbf{M}, d\mu)$$

（掛算演算子の空間と見る）を示そう. 有界な掛算演算子の, H における強収束の行き先はまた有界な掛算演算子となるから,

$$\mathsf{A}_S \subset \mathsf{L}^\infty(\mathbf{M}, d\mu)$$

となる. $\mathcal{P}$ を A_S の元で, H 上の直交射影演算子の集合としよう. 掛算演算子でかつ直交射影演算子となるものは $\mathbf{M}$ の部分集合の定義関数に限られるから, $\mathcal{P}$ に対応して, $\mathbf{M}$ の部分集合の族 $\Sigma_{\mathcal{P}}$ が1対1に定まる. $\Sigma_{\mathcal{P}}$ が Σ の部分 σ-加法族をなすことは, 容易にわかる. さらに, 各 f_α が $\Sigma_{\mathcal{P}}$ に関して可測であることも容易に示される.

たとえば,

$$\mathbf{B} \equiv \{m \in \mathbf{M} \mid a < f_\alpha(m) \leqslant b\} \in \Sigma_{\mathcal{P}}$$

を示すには, $(a, b]$ の定義関数 $\chi_{(a,b]}$ を考えて, これを一様有界な仕方で各点において近似する, $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ の関数列 $\{F_n\}$ をとる. このとき,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(f_\alpha(m)) = \chi_{(a,b]}(f_\alpha(m)), \qquad m \in \mathbf{M}$$

---

*) $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ は, 無限回微分可能で急減少な関数から生成される, 通常の Schwartz 空間.

**) von Neumann 代数については, たとえば, 江沢 (1978) を参照.

$$=\begin{cases}1 & m\in \mathbf{B}\\ 0 & m\notin \mathbf{B}.\end{cases}$$

したがって，$\chi_{(a,b]}(f_\alpha)\in \mathsf{A}_S$ であり，$\chi_{(a,b]}(f_\alpha)$ は $\mathbf{B}$ の定義関数である．ゆえに，$\mathbf{B}\in\Sigma_p$.

したがって，仮定によって，$\Sigma_p=\Sigma$ でなければならない．$\mathsf{L}^\infty(\mathbf{M}, d\mu)$ の元は，強収束の意味で，定義関数の一次結合で近似されるから，$\mathsf{A}_S=\mathsf{L}^\infty(\mathbf{M}, d\mu)$ を得る．

次に，定数関数 $1\in\mathsf{H}$ に A_S の元をかけて得られる H の部分空間を $\tilde{\mathsf{A}}_S$ としよう．このとき明らかに，$\tilde{\mathsf{A}}_S\subset\bar{\mathsf{A}}$ (H における A の閉包)．しかし，いま示したように，$\tilde{\mathsf{A}}_S=\mathsf{L}^\infty(\mathbf{M}, d\mu)$ (H の部分空間として) であり，$\mathsf{L}^\infty(\mathbf{M}, d\mu)$ は H で稠密だから，$\bar{\mathsf{A}}=\mathsf{H}$ を得る．すなわち，A は H で稠密である．∎

注意 証明はしないが，上の補題の逆も成立する．

定理 3.2.10 ϕ を実 Hilbert 空間 H を指標とする Gauss 超過程としよう．各 $n\geqslant 0$ に対して $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_\mathsf{H}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ の閉部分空間 $\Gamma_n(\mathsf{H})$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}&\Gamma_0(\mathsf{H})=\mathbf{C},\\ &\Gamma_n(\mathsf{H})=\{:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):\,|\,f_j\in\mathsf{H},\ j=1,\cdots,n\}^-\end{aligned}\tag{3.2.18}$$

ここに $\{\ \}^-$ は $\{\ \}$ の $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_\mathsf{H}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ での閉包を表わす．

このとき，

$$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_\mathsf{H}, d\mu_{0,\mathsf{H}})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\Gamma_n(\mathsf{H}).\tag{3.2.19}$$

証明 命題 3.2.7 によって，$n\neq m$ ならば，$\Gamma_n(\mathsf{H})$ と $\Gamma_m(\mathsf{H})$ は直交する．そこで，

$$\Gamma(\mathsf{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\Gamma_n(\mathsf{H})\tag{3.2.20}$$

とおこう．任意の $f\in\mathsf{H}$ に対して

$$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_\mathsf{H}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$$

の収束の意味で

$$:e^{i\phi(f)}:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}:\phi(f)^n:$$

となるから（命題3.2.5），$:e^{i\phi(f)}:\in\Gamma(\mathsf{H})$ である．したがって，(3.2.13) を使えば，$e^{i\phi(f)}\in\Gamma(\mathsf{H})$ となる．任意の $F\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ と $f_1,\cdots,f_n\in\mathsf{H}$ に対して

$$F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{F}(t_1,\cdots,t_n)e^{i\sum_{j=1}^{n}t_j\phi(f_j)}dt_1\cdots dt_n.$$

ここで，$\hat{F}$ は F の Fourier 変換を表わす．

右辺の積分は $\Gamma(\mathsf{H})$ で収束するから，$F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\in\Gamma(\mathsf{H})$ である．補題 3.2.9 によって，

$$\{F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\mid F\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n),\ f_j\in\mathsf{H},\ n\geqslant 1\}$$

は $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}},d\mu_{0,\mathsf{H}})$ で稠密だから，

$$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}},d\mu_{0,\mathsf{H}})\subset\Gamma(\mathsf{H}).$$

したがって，(3.2.19) を得る．∎

Gauss 超過程の一意性に関しては，次の定理がある：

定理 3.2.11　ϕ,ϕ' を H を指標とする2つの Gauss 超過程とし，それらが実現する確率空間をそれぞれ $(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}},d\mu_{0,\mathsf{H}})$，$(\mathbf{Q}'_{\mathsf{H}},d\mu'_{0,\mathsf{H}})$ とする．このとき，$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}},d\mu_{0,\mathsf{H}})$ から $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}'_{\mathsf{H}},d\mu'_{0,\mathsf{H}})$ の上へのユニタリ演算子 U が存在して，

$$U1=1 \tag{3.2.21}$$

$$U\phi(f)U^{-1}=\phi'(f),\qquad f\in\mathsf{H}. \tag{3.2.22}$$

となる．したがって，この意味で，H を指標とする Gauss 超過程は一意的である．

証明　$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}},d\mu_{0,\mathsf{H}})$ から $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}'_{\mathsf{H}},d\mu'_{0,\mathsf{H}})$ への演算子 U を

$$U:\phi(f_1)\cdots\phi(f_n):=:\phi'(f_1)\cdots\phi'(f_n):,\qquad n\geqslant 1$$
$$U1=1$$

によって定める．命題 3.2.7 によって，U は

$$\Gamma_{\mathrm{F}}(\mathsf{H})\equiv\left\{\Psi=\{\Psi^{(n)}\}\in\Gamma(\mathsf{H})\,\middle|\,\begin{array}{l}\Psi\text{ ごとにある }n_0\geqslant 0\text{ が存在}\\ \text{して }n\geqslant n_0\text{ ならば }\Psi^{(n)}=0\end{array}\right\} \tag{3.2.23}$$

から，$\Gamma_F'(H)$ (ϕ' に対応する $\Gamma_F(H)$) の上への等距離演算子となる．$\Gamma_F(H)$ ($\Gamma_F'(H)$) は $L^2(Q_H, d\mu_{0,H})$ ($L^2(Q'_H, d\mu'_{0,H})$) で稠密だから，U は $L^2(Q_H, d\mu_{0,H})$ から，$L^2(Q'_H, d\mu'_{0,H})$ の上へのユニタリ演算子に一意的に拡張される．命題 3.2.5 により，

$$Ue^{it\phi(f)}U^{-1} = e^{it\phi'(f)}, \qquad t \in \mathbf{R},\ f \in H.$$

$\phi(f), \phi'(f)$ は，それぞれ，$L^2(Q_H, d\mu_{0,H})$，$L^2(Q'_H, d\mu'_{0,H})$ 上の掛算演算子として自己共役だから，上式を t について微分することにより，(3.2.22) を得る．■

次に Gauss 超過程の存在を示そう．H を可分な実 Hilbert 空間とし，その完全正規直交系を $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする．

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \qquad (\mathbf{R}\ \text{のコンパクト化})$$

とし，$\mathbf{R}^{(n)}$ を $\dot{\mathbf{R}}$ のコピーとしよう．このとき，

$$\mathbf{Q} \equiv \bigtimes_{n=1}^{\infty} \mathbf{R}^{(n)}$$

は，Tychonoff の定理*)によって，コンパクト Hausdorff 空間である．$C(\mathbf{Q})$ を $\mathbf{Q}$ 上の連続関数の全体とし，有限個の変数にのみ依存する，$C(\mathbf{Q})$ の元の全体のつくるベクトル空間を $C_{\text{fin}}(\mathbf{Q})$ とする．$F \in C_{\text{fin}}(\mathbf{Q})$ に対して汎関数

$$l(F) = \pi^{-n/2}\int F(x_1, \cdots, x_n)e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}dx_1\cdots dx_n$$

を考える．$l(F)$ は F について線形であり，$|l(F)| \leqslant \|F\|_\infty$. したがって，$l(\cdot)$ は $C_{\text{fin}}(\mathbf{Q})$ 上の連続線形汎関数をあたえる．Stone-Weierstrass の定理*) によって $C_{\text{fin}}(\mathbf{Q})$ は $C(\mathbf{Q})$ で稠密だから，$l(\cdot)$ は $C(\mathbf{Q})$ 上の連続線形汎関数に一意的に拡張される．これをまた $l(\cdot)$ と書く．$F \geqslant 0$ ならば $l(F) \geqslant 0$ だから，$l(\cdot)$ は正値汎関数である．ゆえに，Riesz-Markov の定理*) によって，$\mathbf{Q}$ 上の確率測度 $d\mu_0$ がただひとつ存在して，

$$l(F) = \int_{\mathbf{Q}} F d\mu_0$$

---

*) たとえば，Reed and Simon (1972), §IV. 3, §IV. 4 を参照.

となる．各 e_n に対して，$\mathbf{Q}$ 上の実数値関数 $\phi(e_n)$ を

$$\phi(e_n)(q) = x_n, \qquad q = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbf{Q}$$

によって定義する．したがって，$\phi(e_n)$ は，$\mathbf{Q}$ 上の確率変数であり，明らかに，$\phi(e_n) \in \mathsf{L}^2(\mathbf{Q}, d\mu_0)$．先に述べたように $\mathsf{C}_{\mathrm{fin}}(\mathbf{Q})$ は $\mathsf{C}(\mathbf{Q})$ で稠密，したがって $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}, d\mu_0)$ でも稠密である．ゆえに，補題 3.2.9 の次の注意によって $\{\phi(e_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は full である．$f \in \mathsf{H}$ を $\{e_n\}$ で展開する：

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

これに対して

$$\phi_n(f) \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi(e_k)$$

とおく．$n > m$ とすると

$$\|\phi_n(f) - \phi_m(f)\|_{\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}, d\mu_0)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k{}^2 \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

すなわち，$\{\phi_n(f)\}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}, d\mu_0)$ で収束する．そこで，その $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}, d\mu_0)$ での極限を $\phi(f)$ としよう．上の計算と同様にして，

$$\langle \phi(f)\phi(g)\rangle = \frac{1}{2}\langle f, g\rangle_{\mathsf{H}}$$

を得る．また，$\langle \phi(f)^n \rangle$ を実際に計算することにより，$\phi(f)$ が G. R. V. であることがわかる．$f \longrightarrow \phi(f)$ の線形性は明らかである．よって，このようにして構成した $\phi(\cdot)$ は H を指標とする Gauss 超過程である．

最後に，空間 $\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}$ の有用なモデルをあたえておこう．$\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ を実数値の $\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ 関数の全体とし，その双対空間，すなわち，実の緩増加超関数の全体を $\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ とする．$\mathbf{R}^n$ の Borel 集合 $\mathbf{B}$ と $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ に対して，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ の部分集合

$$\{T \in \mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu) \mid (T(f_1), \cdots, T(f_n)) \in \mathbf{B}\}$$

を $\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ の筒集合[*)] (cylinder set) という．筒集合は，$\mathbf{R}^n$ の Borel 集合 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と n 個の $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ の元によって指定される．これからは，

---

*) 筒集合およびすぐあとに定義する筒集合測度はもっと一般の線形位相空間で考えられる．たとえば，Gel'fand and Vilenkin (1964)，第4章参照．

$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ の σ-加法族としては，筒集合から生成される最小の σ-加法族のみを考える．したがって，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ を測度空間として考えるときは，あたえられた測度は，つねに，筒集合から生成される最小の σ-加法族で定義されているものとする．

$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ 上の確率測度の存在については，次の定理がある．

定理 3.2.12 (Minlos の定理) $C(\cdot)$ を $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ 上の汎関数としよう．このとき，

$$C(f)=\int_{\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)} e^{iT(f)}d\mu(T), \qquad f\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$$

となる $\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ 上の確率測度が存在するための必要十分条件は，次の (1)～(3) であたえられる：

(1) $C(0)=1$;

(2) $f\longmapsto C(f)$ は $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ の強位相で連続．

(3) 任意の $f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ と $z_1,\cdots,z_n\in\mathbf{C}$, $n=1,2,\cdots$, に対して，

$$\sum_{i,j=1}^{n}\bar{z}_i z_j C(f_i-f_j)\geqslant 0. \tag{3.2.24}$$

条件の必要性を証明するのは，容易である．十分性の証明については，飛田 (1975), Gel'fand and Vilenkin (1964), Simon (1979) などを見よ*)．

命題 3.2.13 実 Hilbert 空間 H は次の 2 つの条件をみたすものとしよう：

(1) $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)\subset \mathsf{H}$ であり，しかも稠密である．

(2) $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ は H の中に連続的に埋め込まれている．すなわち，$\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ の強位相で

$$f_n\longrightarrow f \qquad (f_n,f\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu))$$

のとき，

$$\|f_n-f\|_{\mathsf{H}}\longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty).$$

このとき，H を指標とする Gauss 超過程 $\phi(\cdot)$ の実現する測度空間 $\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}$ として，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ をとることができ，$f\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ に対して，$\phi(f)$ は

---

*) Minlos の定理は，有限次元の確率分布に対する Bochner の定理の拡張である．後者については江沢 (1987) を参照．

$$\phi(f)(T) = T(f), \qquad T \in \mathscr{S}_r' \tag{3.2.25}$$

によってあたえられる．

証明　H を指標とする Gauss 超過程の特性関数は

$$C(f) \equiv \langle e^{i\phi(f)} \rangle = e^{-\frac{1}{4}\|f\|^2}$$

であたえられる．$\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu) \subset \mathrm{H}$ であるから，$C(\cdot)$ は $\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ 上の汎関数をあたえ，$C(0)=1$．また，仮定 (2) によって $f \longrightarrow C(f)$ は $\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ の強位相で連続である．$C(f)$ が (3.2.24) をみたすことは明らか．よって，$C(\cdot)$ は Minlos の定理の仮定をすべてみたすので，$\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ 上の確率測度 μ_0 が存在して

$$C(f) = \int_{\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)} e^{iT(f)} d\mu_0(T), \qquad f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$$

となる．そこで，$f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ に対して，$\phi(f)$ を (3.2.25) によって再定義すれば，$\phi(f)$ は $(\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^\nu), d\mu_0)$ 上の G.R.V. となり，しかも

$$\langle \phi(f)\phi(g) \rangle = \frac{1}{2}\langle f, g \rangle_{\mathrm{H}}, \qquad f, g \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu) \tag{3.2.26}$$

が成立する．$f \in \mathrm{H} \backslash \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ に対しては，仮定 (1) によって，

$$\|f_n - f\|_{\mathrm{H}} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる $\{f_n\} \subset \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ がとれるから，(3.2.26) によって，このとき $\{\phi(f_n)\}$ は $\mathrm{L}^2(\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^\nu), d\mu_0)$ において Cauchy 列をなす．ゆえに，$\mathrm{L}^2(\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^\nu), d\mu_0)$ の収束の意味で

$$\phi(f) \equiv \lim_{n\to\infty} \phi(f_n) \tag{3.2.27}$$

が存在する．この極限が f を近似する $\{f_n\}$ のとり方に依存しないことも容易に確かめられる．したがって，$\phi(f)$ はあいまいさなく定義される．$|e^{ix}-e^{iy}| \leqslant |x-y|$ $(x, y \in \mathbf{R})$，Schwarz の不等式および (3.2.27) を用いると

$$\lim_{n\to\infty} \langle e^{i\phi(f_n)} \rangle = \langle e^{i\phi(f)} \rangle$$

を得る．一方，$n \to \infty$ のとき

$$\exp[-\|f_n\|^2/4] \to \exp[-\|f\|^2/4]$$

であるから，

$$\langle e^{i\phi(f)}\rangle = \exp[-\|f\|^2/4]$$

となる.

したがって，$\phi(f)$ は G.R.V. である．こうして，もとめる結果を得る．∎

命題 3.2.13 の仮定をみたす H の例として，α 次 ($\alpha\in\mathbf{R}$) の実 Sobolev 空間 $\mathrm{H}_\alpha(\mathbf{R}^\nu)$ がある．これは，次の条件をみたす f の生成する実 Hilbert 空間である．すなわち，$f\in\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ で，その Fourier 変換 $\hat{f}$ がルベーグ可測関数となっており

$$\|f\|_\alpha{}^2 \equiv \int (1+|k|^2)^\alpha |\hat{f}(k)|^2 d^\nu k < \infty.$$

自由場の量子論では，$\alpha=-1/2, -1$ に対する $\mathrm{H}_\alpha(\mathbf{R}^\nu)$ が用いられる（第 4 章）.

3.3 Fock 空間と Gauss 超過程の同等性

準備として，実 Hilbert 空間 H があたえられたとき，**H の複素化** とよばれる複素 Hilbert 空間を定義しよう．H の元の対の集合

$$\mathrm{H_C} = \{\{f, g\} \mid f, g\in \mathrm{H}\}$$

を考え，$\mathrm{H_C}$ にスカラー倍と和を

$$\lambda\{f, g\} = \{\lambda f, \lambda g\}, \qquad i\lambda\{f, g\} = \{-\lambda g, \lambda f\}, \qquad \lambda\in\mathbf{R}$$
$$\{f, g\}+\{f', g'\} = \{f+f', g+g'\},$$
$$f, g, f', g'\in \mathrm{H}$$

によって定義する．このとき，$\mathrm{H_C}$ は複素ベクトル空間になる．そこで，$\mathrm{H_C}$ に内積を

$$\langle\{f, g\}, \{f', g'\}\rangle$$
$$=\langle f, f'\rangle+\langle g, g'\rangle+i[\langle f, g'\rangle-\langle g, f'\rangle]$$

によって導入する．実際，これが内積の性質をみたすことは容易に確かめられる．さらに，H の完備性のおかげで，$\mathrm{H_C}$ はこの内積から定義されるノルムに関して完備であり，したがって，$\mathrm{H_C}$ は複素 Hilbert 空間になる．この $\mathrm{H_C}$ を H の複素化とよぶ.

さて，この節の目的は，実 Hilbert 空間 H があたえられたとき，$\mathrm{H_C}$ 上の

Fock 空間 $\mathcal{F}(\mathsf{H_C})$ と H を指標とする Gauss 超過程に付随する Hilbert 空間 $\Gamma(\mathsf{H})$ ((3.2.20) 参照) とのユニタリ同値性を示すことである.

定理 3.3.1 $\mathcal{F}(\mathsf{H_C})$ から $\Gamma(\mathsf{H})$ の上へのユニタリ演算子 U で次の (1)～(3) をみたすものが存在する:

(1) $U\Omega_0 = 1$,

(2) $U\Phi(f)U^{-1} = \phi(f), \quad f \in \mathsf{H}$,

(3) $U\mathcal{F}_n(\mathsf{H_C}) = \Gamma_n(\mathsf{H})$.

証明 $f_1, \cdots, f_n \in \mathsf{H}$ とし, $\mathcal{F}_n(\mathsf{H_C})$ から $\Gamma_n(\mathsf{H})$ への演算子 U を

$$U : \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n) : \Omega_0 = : \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) :, \quad n \geqslant 1$$

$$U\Omega_0 = 1.$$

によって定義する. 命題 3.1.4 と命題 3.2.7 とによって, U は等距離演算子である. 系 3.1.5 と同様に, $\{: \Phi(f_1)\cdots\Phi(f_n) : \Omega_0 \mid f_j \in \mathsf{H}\}$ は $\mathcal{F}_n(\mathsf{H_C})$ で稠密であり, $\{: \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) : \mid f_j \in \mathsf{H}\}$ は $\Gamma_n(\mathsf{H})$ で稠密だから, U は $\mathcal{F}_n(\mathsf{H_C})$ から $\Gamma_n(\mathsf{H})$ の上へのユニタリ演算子に一意的に拡張される. したがって, U は $\mathcal{F}(\mathsf{H_C})$ から $\Gamma(\mathsf{H})$ の上へのユニタリ演算子に一意的に拡張される. (2) は, 系 3.1.8, 命題 3.2.5 を使えば, 定理 3.2.11 の ϕ と ϕ' の変換則の証明と同様に示される. ∎

3.4 演算子 $\Gamma(A)$ の性質

H を実 Hilbert 空間, H を指標とする Gauss 超過程を $\phi(\cdot)$, A を H 上の縮小演算子としよう. $\{f, g\} \in \mathsf{H_C}$ に対しては, $A\{f, g\} \equiv \{Af, Ag\}$ として, A は $\mathsf{H_C}$ 上の縮小演算子に拡張できるから, $\mathcal{F}(\mathsf{H_C})$ 上の演算子 $\Gamma(A)$ が定義できる (3.1 節参照). 定理 3.3.1 にいう '$\mathcal{F}(\mathsf{H_C})$ と $\Gamma(\mathsf{H})$ とのユニタリ同値' において, $\Gamma(A)$ は

$$U\Gamma(A)U^{-1} : \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) : = : \phi(Af_1)\cdots\phi(Af_n) :,$$
$$f_1, \cdots, f_n \in \mathsf{H},$$

と変換されることは明らかである.

そこで, 一般に, 2つの実 Hilbert 空間 H, H' ($\mathsf{H} = \mathsf{H}'$ の場合も含む) とそれらを指標とする Gauss 超過程 $(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, \phi_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$, $(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}'}, \phi_{\mathsf{H}'}, d\mu_{0,\mathsf{H}'})$ があたえら

れたとき，H から H' への縮小演算子 A に対応して，

$$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}}) \text{ から } \mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}'}, d\mu_{0,\mathsf{H}'}) \text{ への縮小演算子}$$

としての演算子 $\Gamma(A)$ を

$$\begin{aligned} &\Gamma(A):\phi_{\mathsf{H}}(f_1)\cdots\phi_{\mathsf{H}}(f_n): = :\phi_{\mathsf{H}'}(Af_1)\cdots\phi_{\mathsf{H}'}(Af_n): \quad n \geqslant 1, \\ &\Gamma(A)1 = 1 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

によって定義する*)．実際に $\Gamma(A)$ が $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ から $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}'}, d\mu_{0,\mathsf{H}'})$ への縮小演算子をあたえることは，Fock 空間における $\Gamma(A)$ の場合と同様にして証明される．$\mathsf{H}=\mathsf{H}'$ の場合，上の $\Gamma(A)$ は，$\mathscr{F}(\mathsf{H}_{\mathsf{C}})$ における $\Gamma(A)$ のユニタリ変換になっているわけである．また，H で稠密に定義された，H から H への可閉演算子（必ずしも有界である必要はない）A に対して，'$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ の中からそれ自身の中への演算子' として $d\Gamma(A)$ を

$$\begin{aligned} d\Gamma(A)&:\phi_{\mathsf{H}}(f_1)\cdots\phi_{\mathsf{H}}(f_n): \\ &= :\phi_{\mathsf{H}}(Af_1)\phi_{\mathsf{H}}(f_2)\cdots\phi_{\mathsf{H}}(f_n): \\ &\quad + :\phi_{\mathsf{H}}(f_1)\phi_{\mathsf{H}}(Af_2)\cdots\phi_{\mathsf{H}}(f_n): \\ &\quad + \cdots\cdots \\ &\quad + :\phi_{\mathsf{H}}(f_1)\cdots\phi_{\mathsf{H}}(Af_n):, \qquad n \geqslant 1, \\ &\qquad\qquad f_1, \cdots, f_n \in \mathsf{D}(A), \\ d\Gamma(A)\,1 &= 0, \end{aligned} \tag{3.4.1$'$}$$

によって，定義する．この $d\Gamma(A)$ は，$\mathscr{F}(\mathsf{H}_{\mathsf{C}})$ における $d\Gamma(A)$ のユニタリ変換になる．以後，Gauss 超過程にかかわる演算子 $\Gamma(A), d\Gamma(A)$ は上のものとする．

定義 3.4.1 $(\mathbf{M}, d\mu)$ を測度空間とする．$\mathsf{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ 上の有界演算子 T は，

$$f \geqslant 0 \quad \text{ならば} \quad Tf \geqslant 0,$$

をみたすとき，**正値性保存演算子**（positivity preserving operator, 略して P.P.O.）とよばれる．また，

$$f \geqslant 0 \quad \text{ならば} \quad Tf > 0,$$

をみたすとき，T を**正値性改良演算子**（positivity improving operator, 略して P.I.O.）という．

---

*) 本来なら $\Gamma(A)$ と異なる記号を使うべきであるが混乱の恐れはないであろう．

注意　上の定義で，$f \geqslant 0, Tf \geqslant 0, Tf > 0$ というのは，'ほとんどいたるところで' という意味である．また，$f \geqslant 0$ と書くとき，恒等的に 0 の関数は除外する．

上の定義から簡単にわかる性質として

命題 3.4.2　T が P.P.O. (P.I.O.) であるための必要十分条件はすべての非負値関数 $f, g \in \mathsf{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ に対して

$$\langle f, Tg \rangle \geqslant 0 \quad (>0) \tag{3.4.2}$$

がなりたつことである．したがって，特に，T が P.P.O. (P.I.O) ならば T^* も P.P.O. (P.I.O.) である．

証明は読者の演習とする．

命題 3.4.3　T が P.P.O. ならば，すべての $f \in \mathsf{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ に対して

$$|(Tf)(m)| \leqslant (T|f|)(m) \qquad \text{a.e. } m. \tag{3.4.3}$$

証明　f が実数値関数ならば，$|f| \pm f \geqslant 0$ がなりたつから (3.4.3) を得る．次に f を複素数値とし，$\mathbf{Q}$ を有理数の集合とする．このとき，一般に，

$$\sup_{\theta \in \mathbf{Q}} \mathrm{Re}[e^{i\theta} f(m)] = |f(m)|$$

がなりたつことに注意しよう．T は P.P.O. であるので，実数値関数を実数値関数にうつす．したがって，任意の定数 $\theta \in \mathbf{Q}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[e^{i\theta} Tf] &= \mathrm{Re}[Te^{i\theta} f] \\ &= T\ \mathrm{Re}[e^{i\theta} f]. \end{aligned}$$

$\mathrm{Re}[e^{i\theta} f]$ に前半の結果を適用すれば，$\mu(\mathbf{S}_\theta) = 0$ となる $\mathbf{S}_\theta \subset \mathbf{M}$ があって

$$\mathrm{Re}[e^{i\theta}(Tf)(m)] \leqslant (T|f|)(m), \qquad m \in \mathbf{S}_\theta{}^c \tag{3.4.4}$$

となる*)．一方，$\mathbf{S} = \bigcup_{\theta \in \mathbf{Q}} \mathbf{S}_\theta$ とおけば，$\mathbf{Q}$ の濃度は可算だから，$\mu(\mathbf{S}) = 0$ であり，すべての $\theta \in \mathbf{Q}$ に対して，不等式 (3.4.4) が，$m \in \mathbf{S}^c$ として，成立することになる．そこで，$\theta \in \mathbf{Q}$ について sup をとれば，左辺は $|Tf(m)|$ とな

*) 不等式 (3.4.4) を成立させる a.e. の点集合は，θ に依存することに注意．

るから，(3.4.3) を得る．■

定理 3.4.4 任意の縮小演算子 A に対して，$\Gamma(A)$ は P.P.O. である．

証明 $\phi\in\Gamma(\mathsf{H})$ が非負ならば，

$$\begin{aligned}\langle 1, \Gamma(A)\phi\rangle &= \langle \Gamma(A^*)1, \phi\rangle \\ &= \langle 1, \phi\rangle > 0.\end{aligned}$$

したがって，$\Gamma(A)\phi \not\equiv 0$．ゆえに，$\Gamma(A)\phi$ がほとんどいたるところ非負であることを示せばよい．命題3.2.5によって

$$\Gamma(A):\exp[\alpha\phi(f)]:=:\exp[\alpha\phi(Af)]:, \qquad \alpha\in\mathbf{C}.$$

したがって，(3.2.13) によって

$$\Gamma(A)\exp[\alpha\phi(f)] = \exp[\alpha\phi(Af)]\exp\left[\frac{1}{4}\alpha^2\langle f, (1-A^*A)f\rangle\right].$$

ゆえに，任意の $F\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ と $f_1, \cdots, f_n\in\mathsf{H}$ に対して

$$\begin{aligned}&\Gamma(A)F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \\ &\quad = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{F}(t_1, \cdots, t_n)\Gamma(A)\exp\left[i\sum_{j=1}^n t_j\phi(f_j)\right]dt_1\cdots dt_n \\ &\quad = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{F}(t_1, \cdots, t_n)\exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n \langle f_i, (1-A^*A)f_j\rangle t_i t_j\right] \\ &\qquad\qquad \times\exp\left[i\sum_{j=1}^n t_j\phi(Af_j)\right]dt_1\cdots dt_n.\end{aligned}$$

$\|A\|\leqslant 1$ によって，$a\equiv\{\langle f_i, (1-A^*A)f_j\rangle\}_{i,j}$ は半正定値行列であるから，

$$D(t_1, \cdots, t_n) = \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n t_i t_j a_{ij}\right]$$

の Fourier 変換は存在し，Gauss 型になる（a の固有値の中に 0 がある場合には δ 関数が生じるが，これは Gauss 型関数の極限とみられる）．

$$\begin{aligned}&\Gamma(A)F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \\ &\quad = (2\pi)^{-n/2}(F*\check{D})(\phi(Af_1), \cdots, \phi(Af_n))\end{aligned}$$

となることに注意すると（ここで，$*$ はたたみこみを表わし，$\check{D}$ は D の逆 Fourier 変換である），いま述べたように $\check{D}\geqslant 0$ となるから，$F\geqslant 0$ ならば，

$$\Gamma(A)F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))\geqslant 0$$

となる．したがって，任意の非負の $\psi \in \Gamma(\mathsf{H})$ がいま考えた F のような関数の極限になっていることを示せばよい．

補題3.2.9によって，

$$\mathsf{A} \equiv \{F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \mid F \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), f_j \in \mathsf{H}, n \geqslant 1\}$$

は $\Gamma(\mathsf{H})$ で稠密だから，$F_n \to \psi$ となる $\{F_n\} \subset \mathsf{A}$ が存在する．$\{F_n\}$ の適当な部分列 $\{F_{n'}\}$ をとれば，

$$F_{n'} \to \psi \qquad \text{a.e.}$$

となる．

したがって，$\psi \geqslant 0$ ならば，

$$|F_{n'}| \to \psi \qquad \text{a.e.}$$

この $F_{n'}$ をあらためて F_n と書くことにしよう．$|F_n|(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$ を $G_n(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)), G_n \geqslant 0, G_n \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ で近似したいわけであるが，このために次のような手続きをとる．すなわち

$$\rho \in \mathsf{C}_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$$

で，

$$\rho(x) \geqslant 0, \qquad |x| \geqslant 1 \text{ ならば } \rho(x) = 0, \quad \int \rho(x)dx = 1$$

の3つの条件をみたすものをとり（実際このような ρ は存在する），

$$\rho_\varepsilon(x) = \rho(x/\varepsilon)/\varepsilon^n, \qquad \varepsilon > 0$$

を考える．$\rho_\varepsilon(x)$ は $\varepsilon \to 0$ のとき，超関数の意味で n 次元 δ 関数 $\delta(x)$ に収束する関数である．この ρ_ε を使って，

$$G_n^{(\varepsilon)}(x) \equiv \int_{R^n} \rho_\varepsilon(x-y)|F_n|(y)dy$$

を定義する．このとき，

$$G_n^{(\varepsilon)} \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \qquad G_n^{(\varepsilon)} \geqslant 0$$

であり，任意の $1 \leqslant p < \infty$ に対して

$$\|G_n^{(\varepsilon)} - |F_n|\|_{\mathsf{L}^p(\mathbf{R}^n)} \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0)$$

となることが示される*)．したがって，$\Gamma(\mathsf{H})$ において，

*) これは，いわゆる Friedrichs の‘軟化演算子’に関する一般論からの結果である．たとえば，黒田成俊（1980）の第6章を見よ．

$$G_n^{(\varepsilon)}(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \to |F_n|(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \qquad (\varepsilon \to 0)$$

となるから，ψ は $G_n^{(\varepsilon)}(\cdots)$ によって，$\Gamma(\mathsf{H})$ で近似される．このとき，$\Gamma(A)G_n^{(\varepsilon)}(\cdots)$ は $\Gamma(A)\psi$ に収束するから前半の結果によって $\Gamma(A)\psi \geqslant 0$ でなければならない．∎

定理 3.4.5 A を狭義の縮小演算子，すなわち，$\|A\| < 1$ としよう．このとき，$\Gamma(A)$ は P.I.O. である．

証明 まず，A が自己共役でしかも $A > 0$ の場合を考えよう．このとき，スペクトル定理によって，$A = e^{-B}$ となる自己共役演算子（一般には非有界演算子であり得る）$B > 0$ が存在する（実際，$B \geqslant -\ln\|A\| > 0$ となる）．

$\psi, \varphi \in \Gamma(\mathsf{H}), \psi \geqslant 0, \varphi \geqslant 0$ に対して

$$f(z) = \langle \psi, e^{-zd\Gamma(B)}\varphi \rangle$$

とおこう．$d\Gamma(B)$ のスペクトルは $[0, \infty)$ の中に含まれるので，$f(z)$ は，$\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$ で解析的であり，$d\Gamma(B)1 = 0$ であるから，

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ t \in \mathbf{R}}} f(t) = \langle \psi, 1 \rangle \langle 1, \varphi \rangle > 0.$$

ゆえに，f が恒等的に 0 ということはない．したがって，f の零点は孤立点である．任意の $t \in (0, 1]$ に対して，e^{-tB} は縮小演算子になるから，定理 3.4.4 によって，$\Gamma(e^{-tB})$ は P.P.O. である．命題 3.1.1 と同様にして

$$\Gamma(e^{-tB}) = e^{-td\Gamma(B)}$$

が示されるので，$t \in (0, 1]$ に対して $f(t) \geqslant 0$ となる．したがって，$f(t_0) > 0$ となる $t_0 \in (0, 1)$ が存在する．すなわち，

$$\psi' = \Gamma(e^{-1/2t_0B})\psi,$$
$$\varphi' = \Gamma(e^{-1/2t_0B})\varphi$$

とすれば，$\langle \psi', \varphi' \rangle > 0$ となるから，

$$\psi'\varphi' \geqslant 0, \qquad \psi'\varphi' \not\equiv 0$$

である．そこで $\eta = \min(\psi', \varphi') \geqslant 0$ とおけば，$\eta \not\equiv 0$. $\Gamma(e^{(t_0-1)B})$ は P.P.O. だから，

$$\langle \psi, \Gamma(e^{-B})\varphi \rangle = \langle \psi', \Gamma(e^{(t_0-1)B})\varphi' \rangle$$
$$\geqslant \langle \eta, \Gamma(e^{(t_0-1)B})\eta \rangle$$

$$= \|\Gamma(e^{\frac{1}{2}(t_0-1)B})\eta\|^2 > 0.$$

ゆえに，$\Gamma(A)$ は P.I.O. である．

次に，A は自己共役で $A \geqslant 0$ とし，A の核*)

$$N_A \equiv \{f \in \mathsf{H} \mid Af = 0\}$$

の上への射影演算子を P とする．このとき，

$$A = A'(1-P)$$

と書ける．ただし，$A' = \left(A + \dfrac{1}{2}P\right)$．容易にわかるように，$A'$ は自己共役で，$A' > 0$,

$$\|A'\| \leqslant \max\left\{\frac{1}{2}, \|A\|\right\} < 1.$$

したがって，上に示したことによって，$\Gamma(A')$ は P.I.O. である．$\|1-P\| \leqslant 1$ だから，$\Gamma(1-P)$ は P.P.O. であり，

$$\Gamma(A) = \Gamma(A')\Gamma(1-P)$$

となるから，$\Gamma(A)$ は P.I.O. である．

最後に，A を単に $\|A\| < 1$ をみたす演算子としよう．このとき部分的等距離演算子 U が存在して，$A = U|A|$ と書ける**)．$|A|$ は正の自己共役演算子 ($|A| \geqslant 0$) だから，上に示したことによって $\Gamma(|A|)$ は P.I.O. である．また $\|U^*\| \leqslant 1$ だから，$\Gamma(U^*)$ は P.P.O. である．したがって，$\psi \geqslant 0, \varphi \geqslant 0$, $\psi, \varphi \in \Gamma(\mathsf{H})$ に対して，

$$\langle\psi, \Gamma(A)\varphi\rangle = \langle\psi, \Gamma(U)\Gamma(|A|)\varphi\rangle$$
$$= \langle\Gamma(U^*)\psi, \Gamma(|A|)\varphi\rangle > 0,$$

すなわち，$\Gamma(A)$ は P.I.O. である．▮

次に，Banach 空間 $\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$, $(p \in [1, \infty))$ における $\Gamma(A)$ の性質を調べる．$\Gamma(A)$ は P.P.O. であったが，それに加えて，$\Gamma(A)1 = 1 = \Gamma(A)^*1$ という性質をもつ．このような演算子の特性を調べるために次の定義をする．

---

*) 演算子 A の核 (Kernel) とは，Hilbert 空間 H の元のうちで A を作用させたとき 0 ベクトルとなるもののなす線形部分空間のことである．

**) いわゆる極分解 (polar decomposition). Reed and Simon (1972), § VI. 4 を参照.

定義 3.4.6 $(\mathbf{M},\mu)$ を確率空間とし，T を $\mathrm{L}^2(\mathbf{M},d\mu)$ 上の有界演算子とする．T は，次の 2 つの条件をみたすとき 2 重 Markov 型 (doubly Markovian) であるという：

（1） T は P.P.O.，すなわち，$f \geqslant 0$ ならば $Tf \geqslant 0$；

（2） $T1 = T^*1 = 1$.

定理 3.4.7 T を $\mathrm{L}^2(\mathbf{M},d\mu)$ 上の 2 重 Markov 型演算子とする．このとき，すべての $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{M},d\mu)\cap\mathrm{L}^p(\mathbf{M},d\mu)$ （$p \in [1,\infty]$）に対して

$$\|Tf\|_p \leqslant \|f\|_p. \tag{3.4.5}$$

ここで，$\|\ \|_p$ は $\mathrm{L}^p(\mathbf{M},d\mu)$ のノルムを表わす．したがって，T は $\mathrm{L}^p(\mathbf{M},d\mu)$ 上の縮小演算子に一意的に拡張される．

証明 $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{M},d\mu), f \geqslant 0$ とすれば，$Tf \geqslant 0$ だから，

$$\begin{aligned}\|Tf\|_1 &= \langle 1, Tf\rangle \\ &= \langle T^*1, f\rangle \\ &= \langle 1, f\rangle = \|f\|_1.\end{aligned}$$

一般的な $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{M},d\mu)$ に対しては，命題 3.4.3 を使うと

$$\begin{aligned}\|Tf\|_1 &\leqslant \|T|f|\|_1 \\ &= \||f|\|_1, \\ &= \|f\|_1.\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

$\mathrm{L}^2(\mathbf{M},d\mu)$ は $\mathrm{L}^1(\mathbf{M},d\mu)$ の部分空間として稠密だから，不等式 (3.4.6) によって，T は $\mathrm{L}^1(\mathbf{M},d\mu)$ 上の縮小演算子に一意的に拡張される．命題 3.4.2 によって，T^* も P.P.O. だから，

$$\|T^*f\|_1 \leqslant \|f\|_1, \qquad f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{M},d\mu).$$

したがって，$f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{M},d\mu), g \in \mathrm{L}^2(\mathbf{M},d\mu)$ に対して，

$$\begin{aligned}|\langle Tf, g\rangle| &= |\langle f, T^*g\rangle| \\ &\leqslant \|f\|_\infty \|T^*g\|_1 \\ &\leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1.\end{aligned}$$

ゆえに，Tf は $\mathrm{L}^1(\mathbf{M},d\mu)$ の双対空間 $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{M},d\mu)$ の元であり，

$$\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \tag{3.4.7}$$

となる．(3.4.6) と (3.4.7) は T が

$$\mathsf{L}^\infty(\mathbf{M}, d\mu)\cap \mathsf{L}^1(\mathbf{M}, d\mu)$$

から，それ自身への縮小演算子であることを示しているから，Riesz-Thorin の補間定理*)によって，不等式 (3.4.5) を得る．∎

系 3.4.8 A を実 Hilbert 空間 H 上の縮小演算子とするとき，$\Gamma(A)$ は，すべての $p\in[1,\infty]$ に対して，$\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_\mathsf{H}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ 上の縮小演算子である．

証明 $\Gamma(A)$ が2重 Markov 型であることと定理3.4.7によって明らか．∎

演算子 $\Gamma(A)$ は，**超縮小性** (hypercontractivity) とよばれる，さらに強い性質をもっている：

定理 3.4.9 A, H を系3.4.8と同じとする．$p, q\in(1,\infty)$ は，$q\leqslant p$,

$$\|A\|\leqslant\frac{(q-1)^{1/2}}{(p-1)^{1/2}} \tag{3.4.8}$$

をみたすものとしよう．このとき，$\Gamma(A)$ は $\mathsf{L}^q(\mathbf{Q}_\mathsf{H}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ から $\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_\mathsf{H}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ への縮小演算子である．すなわち，すべての $\psi\in\mathsf{L}^q(\mathbf{Q}_\mathsf{H}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ に対して

$$\|\Gamma(A)\psi\|_p\leqslant\|\psi\|_q \tag{3.4.9}$$

がなりたつ．

この定理の証明は長くなるので省略する．原論文 Nelson (1973) を参照されたい．

定理3.4.9の単純な応用として

定理 3.4.10 すべての $\psi\in\bigoplus_{n=0}^{m}\Gamma_n(\mathsf{H})$ とすべての $p>2$ に対して

$$\|\psi\|_p\leqslant(p-1)^{m/2}\|\psi\|_2 \tag{3.4.10}$$

がなりたつ．したがって，

$$\Gamma_\mathrm{F}(\mathsf{H})\subset\bigcap_{p<\infty}\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_\mathsf{H}, d\mu_{0,\mathsf{H}}).$$

証明 $p>2$ として $A=(p-1)^{-1/2}$ (定数 $(p-1)^{-1/2}$ をかける演算子) とすれば，(3.4.8) は $q=2$ としてなりたち

*) Reed and Simon (1975), §IX. 4 を参照.

$$\|\Gamma(A)\psi\|_p \leqslant \|\psi\|_2, \qquad \psi \in \mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$$

を得る．任意の $\psi \in \bigoplus_{n=0}^{m} \Gamma_n(\mathsf{H})$ に対して，$\psi = \Gamma(A)\varphi$ となる $\varphi \in \bigoplus_{n=0}^{m} \Gamma_n(\mathsf{H})$ が存在する．上に示した不等式から

$$\begin{aligned}\|\psi\|_p &= \|\Gamma(A)\varphi\|_p \\ &\leqslant \|\varphi\|_2 = \|\Gamma(A)^{-1}\psi\|_2\end{aligned}$$

$\Gamma(A)^{-1} \restriction \Gamma_n(\mathsf{H}) = (p-1)^{1/2}$ だから

$$\|\Gamma(A)^{-1}\psi\|_2 \leqslant (p-1)^{m/2}\|\psi\|_2.$$

よって，(3.4.10) を得る．したがって，特に，

$$\Gamma_{\mathrm{F}}(\mathsf{H}) \subset \bigcap_{2 \leqslant p < \infty} \mathsf{L}^p.$$

一方，

$$\Gamma_{\mathrm{F}}(\mathsf{H}) \subset \bigcap_{p<2} \mathsf{L}^p$$

は明らかだから，結局，

$$\Gamma_{\mathrm{F}}(\mathsf{H}) \subset \bigcap_{p<\infty} \mathsf{L}^p$$

を得る．∎

3.5 正値性保存演算子の固有値

$(\mathbf{M}, \mu)$ を確率測度空間とし，T を $\mathsf{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ 上の P.P.O. とする．この節では，T がそのノルム $\|T\|$ を固有値としてもつための十分条件を述べて，T が P.I.O. である場合には固有値 $\|T\|$ の多重度は 1 であることを示す．目標とする定理は：

定理 3.5.1 T を自己共役な P.P.O. とし，定数 $p > 2$ と $c > 0$ が存在して，すべての $f \in \mathsf{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ に対して

$$\|Tf\|_p \leqslant c\|f\|_2 \tag{3.5.1}$$

がなりたつとする．このとき，$\|T\|$ は T の固有値であり，その多重度 s は有限で

$$s \leqslant (c/\|T\|)^{2p(p-2)} \tag{3.5.2}$$

と評価される．

定理 3.5.2 T を自己共役な P.I.O. とする．このとき，もし $\|T\|$ が固有

値であれば，その多重度は1で，その固有関数として，ほとんどいたるところ正であるものがとれる．

定理の証明に入る前に

定義 3.5.3　$(\mathbf{M}, \mu)$ の**有限分割** (finite partition) とは，$\mathbf{M}$ の可測集合の有限集合 $\alpha = \{\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n\}$ で，

$$\mu(\mathbf{E}_j) > 0, \quad j = 1, \cdots, n,$$

$$\mathbf{M} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{E}_j, \quad \mathbf{E}_i \cap \mathbf{E}_j = \phi \quad (i \neq j)$$

をみたすものをいう．

α, β を $(\mathbf{M}, \mu)$ の有限分割とする．このとき，もし，β が α の細分になっているならば，$\alpha < \beta$ として'順序' $<$ を定義する．この順序 $<$ によって，$(\mathbf{M}, \mu)$ の有限分割全体は有向集合 (directed system) になる．

定理 3.5.1 の証明　$\alpha = \{\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n\}$ を $(\mathbf{M}, \mu)$ の有限分割とし，$q \geqslant 1$ として $\mathrm{L}^q(\mathbf{M}, d\mu)$ 上の演算子 P_α を

$$(P_\alpha f)(m) = \sum_{j=1}^{n} \mu(\mathbf{E}_j)^{-1} \chi_{\mathbf{E}_j}(m) \int_{\mathbf{E}_j} f d\mu$$

によって定義する．ただし，$\chi_{\mathbf{E}}$ は $\mathbf{E}$ の定義関数である．Hölder の不等式によって，

$$\left| \int_{\mathbf{E}_j} f d\mu \right| \leqslant \|f \chi_{\mathbf{E}_j}\|_q \mu(\mathbf{E}_j)^{1-1/q}$$

だから，

$$\|P_\alpha f\|_q \leqslant \|f\|_q$$

となる．したがって，この P_α は $\mathrm{L}^q(\mathbf{M}, d\mu)$ 上の縮小演算子である．また，$P_\alpha{}^2 = P_\alpha$ である．さらに，P_α は $\mathrm{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ 上の自己共役な P.P.O. である．以下，3 段に分けて証明を進めよう．

［第1段］　$T_\alpha = P_\alpha T P_\alpha$ とおくと，

$$T_\alpha f_\alpha = \|T_\alpha\| f_\alpha, \quad f_\alpha \geqslant 0, \ \text{a.e.}$$

となる $f_\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ が存在する．

(証明) T_α が $\mathrm{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ 上の自己共役な P.P.O. であることは明らか. P_α の値域 $\mathrm{R}(P_\alpha)$ を F_α とすると, $\{\chi_{\mathbf{E}_j}\}$ は有限次元ベクトル空間 F_α の基底をなし, T_α は F_α を不変にし, $T_\alpha \upharpoonright F_\alpha$ は, この基底に対して有限次元の非負行列となる (すなわち, T_α の成分はすべて非負). したがって, Perron-Frobenius の定理によって,

$$T_\alpha f_\alpha = \|T_\alpha \upharpoonright F_\alpha\| f_\alpha, \qquad f_\alpha \geqslant 0 \text{ a.e.}$$

となる $f_\alpha \in F_\alpha$ が存在する. 一方, $T_\alpha \upharpoonright F_\alpha{}^\perp = 0$ だから,

$$\|T_\alpha \upharpoonright F_\alpha\| = \|T_\alpha\|$$

となる.

[第2段]

$$\|T_\alpha\| \to \|T\|, \qquad T_\alpha \xrightarrow{s} T.$$

ただし, $\xrightarrow{s}$ は $\mathrm{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ での強収束を表わす.

(証明) 任意の可測集合 $\mathbf{E} \subset \mathbf{M}$ に対して, $\beta = \{\mathbf{E}, \mathbf{E}^c\}$ とすれば, すべての $\alpha > \beta$ に対して,

$$P_\alpha \chi_{\mathbf{E}} = \chi_{\mathbf{E}}$$

となる. 定義関数の全体は $\mathrm{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ で稠密だから, α の増大にともない

$$P_\alpha \xrightarrow{s} 1$$

となる. これと第1段でした定義から得られる $\|T_\alpha\| \leqslant \|T\|$ を使うと,

$$T_\alpha \xrightarrow{s} T$$

となることがわかる (まず, 定義関数に対して証明し, そのあと稠密性を使って拡張する. そのさい, $\|T_\alpha\| \leqslant \|T\|$ (α に依存しない限界) が必要となる). 次に, 演算子ノルム $\|T\|$ の定義によって, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対して,

$$\|Tf\| \geqslant \|T\| - \varepsilon$$

となる $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{M}, d\mu)$ ($\|f\| = 1$) が存在する. $T_\alpha \xrightarrow{s} T$ によって $\|T_\alpha f\| \to \|Tf\|$ であるから, ある有限分割 α_0 が存在して, $\alpha > \alpha_0$ ならば,

$$\varepsilon + \|T_\alpha f\| \geqslant \|Tf\|.$$

したがって,

$$\|T_\alpha\| + \varepsilon > \|T\| - \varepsilon,$$

すなわち,

$$0 \leqslant \|T\| - \|T_\alpha\| < 2\varepsilon.$$

ゆえに

$$\|T_\alpha\| \to \|T\|.$$

［第3段］ $Tf = \|T\|f$ となる $f \neq 0$ が存在する．

（証明） f_α を第1段のものとし，$\|f_\alpha\|_2 = 1$ と規格化しておく．Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{M}, d\mu)$ における単位球の弱コンパクト性によって，$\{f_\alpha\}$ の部分集合 $\{f_{\alpha'}\}$ とある $f \in L^2(\mathbf{M}, d\mu)$ が存在して，$L^2(\mathbf{M}, d\mu)$ の弱収束の意味で

$$f_{\alpha'} \to f$$

となる．したがって，任意の $g \in L^2(\mathbf{M}, d\mu)$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle g, Tf \rangle &= \lim_{\alpha'} \langle Tg, f_{\alpha'} \rangle \\
&= \lim_{\alpha'} \langle T_{\alpha'} g, f_{\alpha'} \rangle \qquad (T_{\alpha'} \xrightarrow{s} T \text{ による}) \\
&= \lim_{\alpha'} \|T_{\alpha'}\| \langle g, f_{\alpha'} \rangle \qquad (\text{第1段による}) \\
&= \|T\| \langle g, f \rangle. \qquad (\|T_{\alpha'}\| \to \|T\| \text{ による})
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$Tf = \|T\|f.$$

次に $f \neq 0$ を示す．任意の $g \in L^2(\mathbf{M}, d\mu)$ に対して，

$$|g|^2 = |g|^{(p-2)/(p-1)} |g|^{p/(p-1)}$$

と書いて，Hölder の不等式を用いると，

$$\|g\|_2 \leqslant \|g\|_1{}^{(p-2)/2(p-1)} \|g\|_p{}^{p/2(p-1)}. \tag{3.5.3}$$

一方，P_α は $L^p(\mathbf{M}, d\mu)$ 上の縮小演算子であったから，このことと定理の仮定 (3.5.1) とを使えば

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha\| \|f_\alpha\|_p &= \|T_\alpha f_\alpha\|_p \\
&\leqslant \|Tf_\alpha\|_p \\
&\leqslant c\|f_\alpha\|_2 = c.
\end{aligned}$$

したがって，(3.5.3) を用いて，

$$\begin{aligned}
1 &= \|f_\alpha\|_2 \\
&\leqslant \|f_\alpha\|_1{}^{(p-2)/2(p-1)} \left(\frac{c}{\|T_\alpha\|} \right)^{p/2(p-1)},
\end{aligned}$$

すなわち，

$$\|f_\alpha\|_1 \geqslant \left(\frac{\|T_\alpha\|}{c}\right)^{p/(p-2)}$$

となる．ゆえに，

$$\begin{aligned}\langle f, 1\rangle &= \lim_{\alpha'}\langle f_{\alpha'}, 1\rangle \\ &= \lim_{\alpha'}\|f_{\alpha'}\|_1 \qquad (f_{\alpha'} \geqslant 0 \quad \text{a.e. による}) \\ &\geqslant \left(\frac{\|T\|}{c}\right)^{p/(p-2)} \\ &> 0.\end{aligned}$$

すなわち，$f \not\equiv 0$.

以上によって，$\|T\|$ は T の固有値であることがわかった．次に，多重度の評価 (3.5.2) であるが，これに対する証明は本書では重要でないので，省略する（Gross (1972) 参照）．∎

定理 3.5.2 の証明 $\lambda = \|T\|, Tf = \lambda f, f \neq 0$ とする．T は実数値関数を実数値関数にうつすから，

$$T\,\mathrm{Re}\,f = \lambda\,\mathrm{Re}\,f,$$
$$T\,\mathrm{Im}\,f = \lambda\,\mathrm{Im}\,f \tag{3.5.4}$$

となる．したがって，はじめから，f は実数値としてよい．このとき，まず

$$T|f| = \lambda|f|, \tag{3.5.5}$$

を示そう．

$$f_\pm(m) = \max\{\pm f(m), 0\}$$

とおけば $f_\pm \geqslant 0$ a.e. で，

$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-$$

と表わされる．したがって，

$$\begin{aligned}\lambda\langle|f|, |f|\rangle &= \lambda\langle f, f\rangle \\ &= \langle Tf, f\rangle \\ &= \langle Tf_+, f_+\rangle + \langle Tf_-, f_-\rangle - \langle Tf_+, f_-\rangle - \langle Tf_-, f_+\rangle \\ &\leqslant \langle Tf_+, f_+\rangle + \langle Tf_-, f_-\rangle + \langle Tf_+, f_-\rangle + \langle Tf_-, f_+\rangle \\ &= \langle T|f|, |f|\rangle \\ &\leqslant \lambda\langle|f|, |f|\rangle.\end{aligned}$$

ここで，$\langle Tf_{\pm}, f_{\mp}\rangle \geqslant 0$ を用いた．ゆえに

$$\langle T|f|, |f|\rangle = \lambda\langle |f|, |f|\rangle$$

となる．$\lambda - T \geqslant 0$ だから，上式は

$$\|(\lambda - T)^{1/2}|f|\,\|^2 = 0$$

を意味し，したがって，

$$(\lambda - T)|f| = 0$$

が得られる．これは，(3.5.5) に他ならない．(3.5.5) から，$|f|\pm f$ も λ に対する固有ベクトルであるから，T が P.I.O. であるため

$$|f|\pm f > 0 \qquad \text{a.e.}$$

となる．これは，

$$f > 0 \qquad \text{a.e.}$$

か

$$f < 0 \qquad \text{a.e.}$$

のどちらかを意味する．したがって，$Tf = \lambda f$ を みたす実数値関数 f は，$f > 0$ a.e. か $f < 0$ a.e. のどちらかをみたす関数である．このことから，$Tf = \lambda f$ をみたす実数値関数 f は定数倍を除いてただひとつであることがわかる*)．さて，はじめにもどって，$Tf = \lambda f$ をみたす複素数値関数を考えると，上に示したことと，(3.5.4) によって

$$\mathrm{Im}\, f = a\, \mathrm{Re}\, f$$

となる $a \in \mathbf{R}$ が存在するから，

$$f = (1 + ia)g, \qquad g = \mathrm{Re}\, f,$$

となる．g は定数倍を除いてただひとつしかないから，$Tf = \lambda f$ をみたす f は定数倍をのぞいてただひとつだけ存在し，しかも，上に見たように，

$$f > 0 \quad \text{a.e.}$$

をみたすようにとることができる．∎

---

*) 一次独立な2つの固有ベクトルがあるなら，それらは直交するとして一般性を失わない．ところが，いま，どの f も定符号であるから互いに直交することはない．

●演習問題

3.1 (3.1.2) で定義される演算子 S_n は次の性質をもつことを示せ．

$$S_n^2 = S_n, \qquad S_n^* = S_n.$$

3.2 A を自己共役演算子とするとき，$\Psi \in \mathrm{D}_n(A)$ に対して

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Gamma_n(e^{itA})\Psi - \Psi}{t} = id\Gamma_n(A)\Psi$$

となることを証明せよ．

3.3 生成演算子 $A^\dagger(f)$ の作用を (3.1.16) のようにきめるとき，(3.1.18) で定義される消滅演算子 $A(f)$ は (3.1.20) をみたすことを確かめよ．

3.4 場の演算子 Φ の Wick 積に対して次式を証明せよ．

$$\Phi(f_1)\Phi(f_2) = :\Phi(f_1)\Phi(f_2): + \frac{1}{2}\langle f_1, f_2\rangle,$$

$$\Phi(f_1)\Phi(f_2)\Phi(f_3) = :\Phi(f_1)\Phi(f_2)\Phi(f_3):$$
$$+\frac{1}{2}[\langle f_1, f_2\rangle\Phi(f_3) + \langle f_2, f_3\rangle\Phi(f_1) + \langle f_3, f_1\rangle\Phi(f_2)]$$

3.5 場の演算子 Φ に対して

$$H_n(x) \equiv \left(\frac{2}{\|f\|}\right)^n :\Phi(f)^n:, \qquad x \equiv \frac{\Phi(f)}{\|f\|}$$

とおけば，H_n は Hermite 多項式の漸化式

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}, \qquad H_0 = 1$$

をみたす．これを証明せよ．

3.6 Minlos の定理 (定理 3.2.12) の‘必要’の部分を証明せよ．

●文献

Cook, J. M. (1953), The mathematics of second quantization, Trans. Amer. Math. Soc. **74**, 222–245.

江沢 洋 (1978), 量子力学の構造, 湯川・豊田 (1978), 第IV部.

江沢 洋 (1987),『フーリエ解析』, 講談社.

Gel'fand, I. M. and N. Ya. Vilenkin (1964), *Generalized Functions; Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, New York.

Gross, L. (1972), Existence and uniqueness of physical ground states, J. Func. Anal. **10**, 52–109.

飛田武幸 (1975),『ブラウン運動』, 岩波書店.

黒田成俊 (1980),『関数解析』, 共立出版.

Nelson, E. (1973), The free Markov field, J. Func. Anal. **12**, 211–227.

Reed, M. and B. Simon (1972), *Methods of Modern Mathematical Physics, I, Functional Analysis*, Academic Press, New York.

Reed, M. and Simon, B. (1975), *Methods of Modern Mathematical Physics, II, Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York.

Simon, B. (1979), *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York.

Simon, B. (1974), *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, Princeton.

第4章

自由場の量子論

本章では，場の量子論の最も単純なモデル，すなわち，相互作用のない自由な中性スカラー場の量子論を構成する．このモデルに対する Wightman 超関数および Schwinger 関数を具体的に求め，Schwinger 関数をそのモーメントとしてあたえる Gauss 超過程として，自由な Euclid スカラー場を導入する．

4.1 Fock 空間を用いる構成

古典的な——'量子化' されていない——自由な中性スカラー場は，線形 Klein-Gordon 方程式

$$(\Box+m^2)\phi(x) = 0, \qquad x\in \mathbf{R}^4, \tag{4.1.1}$$

の実数値関数解として特徴づけられる*)．ここで

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}-\frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2}-\frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2}-\frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}$$

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3)\in \mathbf{R}^4,$$

で，$m\geqslant 0$ は，パラメーターである（後に，m は，量子場に付随する量子——このモデルの場合，**ボソン**とよばれる——の質量を表わすことがわかるであろう）．われわれの目的は，方程式 (4.1.1) をみたし，かつ Gårding-Wightman の公理を満足する演算子値超関数 $\phi(x)$ を数学的に厳密な方法で構成することである．そのような $\phi(x)$ のことを**質量 m の自由な中性スカラー**

*) 簡単のため，時空を4次元ときめて考える．一般の次元での議論もまったく同様である．ただし，$m=0$ で時空が2次元の場合は多少の変更が必要である（Wightman (1967), § IV).

量子場 (free neutral scalar field of mass m) とよぶ*).

まず，状態ベクトルの Hilbert 空間を構成する．

$$\mathsf{H} = \mathsf{L}^2(\mathbf{V}_m{}^+, d\mu_m) \tag{4.1.2}$$

としよう．ただし，$\mathbf{V}_m{}^+$ は，

$$(p^1, p^2, p^3) \equiv \boldsymbol{p}, \qquad (p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2 = \boldsymbol{p}^2$$

と書いて

$$\mathbf{V}_m{}^+ = \{p = (p^0, \boldsymbol{p}) \in \mathbf{R}^4 \mid p^0 \geqslant 0, (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2\} \tag{4.1.3}$$

で定義される $\mathbf{R}^4$ の中の双曲面で，$d\mu_m$ は

$$d\mu_m(p) = \frac{d\boldsymbol{p}}{p^0}, \qquad d\boldsymbol{p} = dp^1dp^2dp^3 \tag{4.1.4}$$

であたえられる $\mathbf{V}_m{}^+$ 上の測度である．H 上のボソン Fock 空間を $\mathscr{F}$，有限粒子部分空間を $\mathscr{F}_\mathrm{F}$，n 粒子空間を $\mathscr{F}_n$ とする（第3章参照）．$\mathbf{V}_m{}^+$ の n 個の直積を $(\mathbf{V}_m{}^+)^n$，測度 $d\mu_m$ の n 個の直積——これは $(\mathbf{V}_m{}^+)^n$ 上の測度をあたえる——を $d\mu^{(n)}$ とすれば，$\mathscr{F}_n$ は，具体的には，$\mathsf{L}^2((\mathbf{V}_m{}^+)^n, d\mu^{(n)})$ の元 Ψ で

$$\Psi(p_1, \cdots, p_n) = \Psi(p_{\pi(1)}, \cdots, p_{\pi(n)}), \qquad \pi \in \mathscr{P}_n,$$
$$(p_1, \cdots, p_n) \in (\mathbf{V}_m{}^+)^n$$

をみたすものから生成される Hilbert 空間としてあたえられる．第3章と同様に，Fock 真空を Ω_0，Segal の場の演算子を $\Phi(\cdot)$ で表わそう．$f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ に対して，$Ef \in \mathsf{H}$ を

$$Ef = \sqrt{2\pi}\, \hat{f} \restriction \mathbf{V}_m{}^+ \tag{4.1.5}$$

によって定義する．ただし，ここでの4次元の Fourier 変換 $\hat{f}$ は

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^4} e^{i(p,x)} f(x)dx \qquad dx = dx^0dx^1dx^2dx^3 \tag{4.1.6}$$

によって定義する．なお，(p, x) は Minkowski 内積で

$$(p, x) = p^0x^0 - \sum_{j=1}^3 p^jx^j, \qquad p = (p^0, \boldsymbol{p}),$$
$$x = (x^0, \boldsymbol{x}), \tag{4.1.7}$$

---

*)　'自由' は相互作用のないこと，'中性' は演算子値超関数として $\phi(x)$ が対称であること，'スカラー' は Lorentz 変換に対し，$\phi(x)$ がスカラーであることを表わす．後述参照．

であたえられる．$f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)$（実数値の $\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ 関数）に対して

$$\Phi_m(f) = \Phi(Ef) \tag{4.1.8}$$

によって，演算子 $\Phi_m(f)$ を定義する．一般の $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ に対しては，$\Phi_m(f)$ を

$$\Phi_m(f) = \Phi_m(\mathrm{Re}\, f) + i\Phi_m(\mathrm{Im}\, f) \tag{4.1.9}$$

として定義する．

定理 4.1.1

（1） 各 $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ に対して，写像 $f \longrightarrow \langle \Psi_1, \Phi_m(f)\Psi_2 \rangle$, $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ は緩増加超関数である．すなわち，

$$\langle \Psi_1, \Phi_m(\cdot)\Psi_2 \rangle \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^4).$$

（2） $f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)$ ならば，$\Phi_m(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ 上で本質的に自己共役である．

（3） $\Phi_m(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ を不変にする．すなわち，$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ ならば

$$\Phi_m(f)\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}.$$

（4） $\{\Omega_0, \Phi_m(f_1)\cdots\Phi_m(f_n)\Omega_0 \mid f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4), n \geqslant 1\}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ で稠密である．

証明

(1) 生成・消滅演算子に対する評価式によって（第3章参照），$f \in \mathrm{H}$ に対し

$$\|\Phi(f)\Psi\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|\{\|(N+1)^{1/2}\Psi\| + \|N^{1/2}\Psi\|\}, \quad \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}. \tag{4.1.10}$$

となる．ここで，N は個数演算子である．したがって，$f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ に対して

$$\|\Phi_m(f)\Psi\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(\|E\,\mathrm{Re}\, f\| + \|E\,\mathrm{Im}\, f\|) \times \{\|(N+1)^{1/2}\Psi\| + \|N^{1/2}\Psi\|\} \quad \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}, \tag{4.1.11}$$

となる．$f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)$ に対しては，

$$\omega(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{4.1.12}$$

とおけば，

$$\|Ef\|^2 = (2\pi)\int_{\mathbf{R}^3} \frac{|\hat{f}(\omega(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p})|^2}{\omega(\boldsymbol{p})} d\boldsymbol{p}$$

であるから，各 $k > 1$ に対して，定数 $c_k > 0$ が存在して

$$\|Ef\| \leqslant c_k \sup_{p \in \mathbf{R}^4} |\{(1-\Delta)^k f\}^{\wedge}(p)|$$

となる．したがって，$\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ のあるセミノルム $|||f|||$ と定数 $c>0$ が存在して
$$\|Ef\| \leqslant c|||f|||$$
と評価される．ゆえに，任意の $f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ に対して
$$\|\Phi_m(f)\Psi\| \leqslant c_\Psi|||f|||. \tag{4.1.13}$$
ただし，$c_\Psi>0$ は Ψ に依存する定数である．

したがって，
$$|\langle\Psi_1, \Phi_m(f)\Psi_2\rangle| \leqslant \|\Psi_1\|c_{\Psi_2}|||f|||$$
となるから，もとめる結果を得る．

（2） $\Phi(Ef)$ が $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ 上で本質的に自己共役であること（定理 3.1.3）から明らか

（3） $\Phi(f)$ $(f\in\mathsf{H})$ が $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ を不変にすることにより，明らか．

（4） (4.1.10) によって，
$$\|f_n-f\| \to 0,\ \ f_n, f\in\mathsf{H} \qquad (n\to\infty)$$
のとき，
$$\|\{\Phi(f_n)-\Phi(f)\}\Psi\| \to 0, \qquad \Psi\in\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$$
となる．一方，演算子 E の値域
$$\mathsf{R}(E) = \{Ef \mid f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)\}$$
は H で稠密であることがわかるので [$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ が $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ で稠密であることを利用する（問題 4.1)]，
$$\{\Omega_0, \Phi_m(f_1)\cdots\Phi_m(f_n)\Omega_0 \mid f_1, \cdots, f_n\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^4), n\geqslant 1\}$$
は，
$$\{\Omega_0, \Phi(g_1)\cdots\Phi(g_n)\Omega_0 \mid g_1, \cdots, g_n\in\mathsf{H},\ \ n\geqslant 1\}$$
で稠密となる．後者は $\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ で稠密であるから，求める結果が得られる．∎

次に，固有 Poincaré 群 $\mathsf{P}_+^\uparrow$（第2章参照）の Fock 空間 $\mathscr{F}$ 上における表現を考えよう．

まず，H 上のユニタリ表現を構成する．$(a,\Lambda)\in\mathsf{P}_+^\uparrow$ に対して，H 上の演算子 $u(a,\Lambda)$ を
$$(u(a,\Lambda)f)(p) = e^{i(p,a)}f(\Lambda^{-1}p) \tag{4.1.14}$$
によって定義する．測度 $d\mu_m(p)$ は固有 Lorentz 変換に対して不変な測度で

あるから，$u(a,\Lambda)$ は H 上のユニタリ演算子となることがわかる．さらに，任意の $(a_1,\Lambda_1),(a_2,\Lambda_2)\in \mathrm{P}_+^\uparrow$ に対して，単純な計算によって，

$$u(a_1,\Lambda_1)u(a_2,\Lambda_2)=u(a_1+\Lambda_1a_2,\Lambda_1\Lambda_2) \tag{4.1.15}$$

となる．また，$u(a,\Lambda)$ の (a,Λ) についての強連続性もわかる．そこで

$$U(a,\Lambda)=\Gamma(u(a,\Lambda)) \tag{4.1.16}$$

とおこう．

定理 4.1.2

（1）$\{U(a,\Lambda)\}$ は，$\mathrm{P}_+^\uparrow$ の，$\mathscr{F}$ 上での強連続なユニタリ表現であり，$\mathscr{F}_\mathrm{F}$ を不変にする．

（2）すべての $f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ と $\Psi\in\mathscr{F}_\mathrm{F}$ に対して

$$U(a,\Lambda)\Phi_m(f)U(a,\Lambda)^{-1}\Psi=\Phi_m(f_{(a,\Lambda)})\Psi. \tag{4.1.17}$$

ただし，

$$f_{(a,\Lambda)}(x)=f(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{4.1.18}$$

（3）すべての $a\in\mathbf{R}^4$ に対して，$U(a,1)\Psi=\Psi$ となる $\Psi\in\mathscr{F}$ $(\Psi\neq 0)$ は，Ω_0 の定数倍に限られる．

証明　（1）$U(a,\Lambda)$ のユニタリ性および強連続性は $u(a,\Lambda)$ のそれから導かれる．また，表現となっていることは演算子 Γ の乗法性

$$\Gamma(AB)=\Gamma(A)\Gamma(B)$$

を(4.1.15) に適用することによって示される．$U(a,\Lambda)$ が $\mathscr{F}_\mathrm{F}$ を不変にすることは，演算子 Γ の基本的性質のひとつである．

（2）これは，定理 3.1.3 の (3) と，$f\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)$ のとき，

$$Ef_{(a,\Lambda)}=u(a,\Lambda)Ef$$

を使って示される．

（3）
$$(U(a,1)\Psi)^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)=e^{i\sum_{j=1}^{n}(p_j,a)}\Psi^{(n)}(p_1,\cdots,p_n),\quad n\geqslant 1 \tag{4.1.19}$$

となるから，もし，$U(a,1)\Psi=\Psi$ で，$\Psi^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)\neq 0$ とすると

$$e^{i\sum_{j=1}^{n}(p_j,a)}=1.$$

しかし，これをすべての $a\in\mathbf{R}^4$ に対して成立させることは不可能である．したがって，すべての $n\geqslant 1$ に対して，$\Psi^{(n)}=0$ でなければならない．ゆえに，

ある定数 c があって $\Psi = c\Omega_0$.

$$U(a, 1)\Omega_0 = \Omega_0, \qquad a \in \mathbf{R}^4,$$

は明らかだから，もとめる結果を得る. ∎

$U(a, 1)$ は a について強連続なユニタリ群であるから，Stone の定理の一般化*) によって，4個の互いに可換な自己共役演算子 P^0, P^1, P^2, P^3 が存在して，

$$U(a, 1) = e^{i(P, a)} \tag{4.1.20}$$

と書ける（第2章参照）．ただし，$P = (P^0, P^1, P^2, P^3)$ とした．P^0 を**自由ハミルトニアン**，$\boldsymbol{P} = (P^1, P^2, P^3)$ を**運動量演算子**とよぶ．これらの演算子のスペクトルについて次の定理が成立する．ただし，$\sigma(A), \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ は，それぞれ，演算子 A のスペクトル，点スペクトルを表わす．

定理 4.1.3

（1）

$$\sigma(P^0) = \{0\} \cup [m, \infty), \qquad \sigma_{\mathrm{p}}(P^0) = \{0\},$$

ただし，点スペクトル 0 の多重度は 1 である．

（2） 各 $j = 1, 2, 3$ に対して

$$\sigma(P^j) = \mathbf{R}, \qquad \sigma_{\mathrm{p}}(P^j) = \{0\}.$$

ただし，点スペクトル 0 の多重度は 1 である．

証明　$U(a, 1)$ は (4.1.19) のように作用するから，

$$P^\mu = d\Gamma(\hat{p}^\mu), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{4.1.21}$$

となることがわかる．ここで，$\hat{p}^\mu$ は H における掛算演算子で

$$(\hat{p}^\mu f)(p) = p^\mu f(p), \qquad p \in \mathbf{V}_m{}^+,$$

によって定義される．

$$\sigma(\hat{p}^0) = [m, \infty),$$
$$\sigma(\hat{p}^j) = \mathbf{R},$$
$$\sigma_{\mathrm{p}}(\hat{p}^\mu) = \phi,$$

と自己共役演算子のテンソル積のスペクトルに対する性質**) によって，もとめる結果を得る．

---

*) Reed and Simon (1972), § VIII. 4 を参照.

**) 前掲書, § VIII. 10 を参照.

$$P^\mu \Omega_0 = 0, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

であるから，Ω_0 は P^μ の固有値 0 に対する固有ベクトルであるが，定理 3.1.2 (3) によって $P^\mu \Psi = 0$ となる Ψ $(\neq 0)$ は Ω_0 の定数倍に限られることがわかる．すなわち，$\hat{p}^\mu$ の点スペクトル 0 の多重度は 1 である．∎

定理 4.1.4 $P = (P^0, \boldsymbol{P})$ の結合スペクトル $\sigma_J(P)$ は前方光円錐

$$\overline{\mathbf{V}^+} = \{p \in \mathbf{R}^4 \mid p^0 \geqslant 0, (p, p) \geqslant 0\}$$

に含まれる．さらに詳しくいえば

$$\sigma_J(P) = \{0\} \cup \mathbf{V}_m{}^+ \cup \{p \in \mathbf{V}^+ | (p, p) \geqslant (2m)^2\}. \tag{4.1.22}$$

証明 $\Psi^{(n)} \in \mathscr{F}_n$ とすれば，(4.1.19) によって

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi^{(n)}, U(a, 1) \Psi^{(n)} \rangle \\
&= \int_{\mathbf{V}_m{}^+} \cdots \int_{\mathbf{V}_m{}^+} e^{i\left(\sum_{j=1}^n p_j, a\right)} |\Psi^{(n)}(p_1, \cdots, p_n)|^2 \prod_{j=1}^n d\mu_m(p_j) \\
&= \int_{\mathbf{R}^4} e^{i(p,a)} d\mu_{\Psi^{(n)}}(p)
\end{aligned}$$

ここで，$\mu_{\Psi^{(n)}}$ は $\Psi^{(n)}$ に対するスペクトル測度で

$$d\mu_{\Psi^{(n)}}(p) = \int_{\mathbf{V}_m{}^+} \cdots \int_{\mathbf{V}_m{}^+} \delta\left(p - \sum_{j=1}^n p_j\right) |\Psi^{(n)}(p_1, \cdots, p_n)|^2 \left[\prod_{j=1}^n d\mu_m(p_j)\right] dp.$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$\mu_{\Psi^{(0)}}(\mathbf{S}) = \begin{cases} |\Psi^{(0)}|^2, & 0 \in \mathbf{S} \\ 0 & 0 \notin \mathbf{S} \end{cases}$$

であたえられる．したがって，

$$\operatorname{supp} \mu_{\Psi^{(0)}} = \{0\},$$

$$\operatorname{supp} \mu_{\Psi^{(n)}} = \left\{ p = \sum_{j=1}^n p_j \,\middle|\, p_j \in \mathbf{V}_m{}^+, j = 1, \cdots, n \right\}.$$

簡単な計算によって，$n \geqslant 2$ のときは，

$$\operatorname{supp} \mu_{\Psi^{(n)}} = \{p \in \mathbf{V}^+ \mid (p, p) \geqslant (nm)^2\}$$

となることがわかるので，

$$\bigcup_{n=2}^\infty \operatorname{supp} \mu_{\Psi^{(n)}} = \{p \in \mathbf{V}^+ \mid (p, p) \geqslant (2m)^2\}$$

を得る．一方，$U(a,1)$ は $\mathscr{F}_n$ を不変にしているから，任意の $\Psi=\{\Psi^{(n)}\}\in\mathscr{F}$ に対して

$$\mu_\Psi=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{\Psi^{(n)}}$$

である．ゆえに

$$\mathrm{supp}\,\mu_\Psi=\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathrm{supp}\,\mu_{\Psi^{(n)}}}$$

となって，supp μ_Ψ は (4.1.22) の右辺に等しくなる．したがって，$\sigma_J(P)$ は (4.1.22) によってあたえられる．∎

次に，場の交換関係を調べよう．(4.1.8) と定理 3.1.3 (2) によって，$f, g\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)$ とすれば，

$$\begin{aligned}[\Phi_m(f),\Phi_m(g)]&=i\,\mathrm{Im}\langle Ef, Eg\rangle\\&=\frac{2\pi}{2}\int_{V_m^+}\{\overline{\hat{f}(p)}\hat{g}(p)-\hat{f}(p)\overline{\hat{g}(p)}\}d\mu_m(p)\\&=\int_{\mathbf{R}^4}\int_{\mathbf{R}^4}\frac{1}{i}\Delta_m(x-y)f(x)g(y)dxdy.\end{aligned}\tag{4.1.23}$$

ここで，

$$\Delta_m(x)=\frac{i}{2(2\pi)^3}\int_{V_m^+}\{e^{-i(p,x)}-e^{i(p,x)}\}d\mu_m(p).\tag{4.1.24}$$

(4.1.23) は，$\mathscr{F}_F$ 上で成立する．(4.1.9) を使えば，任意の $f,g\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ に対しても，(4.1.23) がなりたつことがわかる．関数 $\Delta_m(x)$ は **Pauli-Jordan 関数**とよばれ，Lorentz 不変である：

$$\Delta_m(\Lambda x)=\Delta_m(x),\qquad x\in\mathbf{R}^4,\ \Lambda\in\mathrm{L}_+^\uparrow.\tag{4.1.25}$$

もし，$(x,x)\leqslant 0$，すなわち，x が空間的ならば，ある $\Lambda\in\mathrm{L}_+^\uparrow$ が存在して，$\Lambda x=(0,\boldsymbol{y})$ となる．

$$\Delta_m(0,\boldsymbol{y})=0$$

であるから，(4.1.25) を使うと $\Delta_m(x)=0$ を得る．以上から次の結果を得る：

定理 4.1.5 (局所性あるいは微視的因果性)　$f,g\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ とする．f の台

と g の台が空間的に離れているならば，すなわち，

$$(x-y, x-y) \leqslant 0, \qquad x \in \operatorname{supp} f,$$
$$y \in \operatorname{supp} g,$$

ならば，すべての $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ に対して

$$[\Phi_m(f), \Phi_m(g)]\Psi = 0.$$

以上の結果をまとめると

定理 4.1.6 Fock 空間 $\mathscr{F}$，Fock 真空 Ω_0，場 $\Phi_m(\cdot)$，Poincaré 群のユニタリ表現 $U(\cdot,\cdot)$ からなる四つ組 $\{\mathscr{F}, \Omega_0, \Phi_m, U\}$ は，中性スカラー量子場に対する Gårding-Wightman の公理をすべてみたす．さらに，$\Phi_m(\cdot)$ は，$\mathscr{F}_{\mathrm{F}}$ 上で方程式

$$\Phi_m((\Box+m^2)f) = 0, \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4), \tag{4.1.26}$$

をみたす．

証明 前半は，定理 4.1.1, 4.1.2, 4.1.4, 4.1.5 の結果である．(4.1.26) は，すべての $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ に対して，

$$\begin{aligned} E(\Box+m^2)f &= \sqrt{2\pi}[\{-(p,p)+m^2\}\hat{f}(p)] \restriction \mathbf{V}_m{}^+ \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることによる．∎

$\Phi_m(\cdot)$ は演算子値超関数であったから，記号的に $\Phi_m(x)$ を

$$\Phi_m(f) = \int_{\mathbf{R}^4} \Phi_m(x) f(x) dx$$

によって定義すれば，(4.1.26) は，演算子値超関数の意味で

$$(\Box+m^2)\Phi_m(x) = 0 \tag{4.1.27}$$

と同等である．これは，$\Phi_m(x)$ がはじめに述べた意味で質量 m の自由な中性スカラー量子場であることを示すものである．しかし，$\Phi_m(x)$ は各点 $x \in \mathbf{R}^4$ できちんと定義された演算子ではないので，それを試験関数 $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ で均してできる演算子 $\Phi_m(f)$ を質量 m の自由な中性スカラー量子場ということもある．

4.2　自由場の真空期待値——Wightman 超関数

自由場 $\Phi_m(\cdot)$ に対する Wightman 超関数を求めよう. n 点 Wightman 超関数 $W_n(f_1, \cdots, f_n)$, $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ は

$$W_n(f_1, \cdots, f_n) = \langle \Omega_0,\ \Phi_m(f_1) \cdots \Phi_m(f_n) \Omega_0 \rangle \tag{4.2.1}$$

によって定義される. 前節で見たように, $\Phi_m(\cdot)$ は Gårding-Wightman の公理にしたがうので, 一般的な議論（第2章参照）によって, W_n は $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{4n})$ の元に一意的に拡張され, Wightman の公理をみたす.

W_n の計算には次の補題を利用するとよい.

補題 4.2.1　$\Phi(\cdot)$ を Segal の場の演算子とする. このとき,

$$\langle \Omega_0,\ \Phi(f_1) \cdots \Phi(f_{2n-1}) \Omega_0 \rangle = 0, \tag{4.2.2}$$

$$\langle \Omega_0,\ \Phi(f_1) \cdots \Phi(f_{2n}) \Omega_0 \rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{\text{comb}} \langle f_{i_1}, f_{j_1} \rangle \cdots \langle f_{i_n}, f_{j_n} \rangle \qquad f_1, \cdots, f_{2n} \in \mathsf{H}, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots. \tag{4.2.3}$$

ただし, $\sum_{\text{comb}}$ は $(1, \cdots, 2n)$ を n 個の異なる（順序づけされていない）対 $(i_1, j_1), \cdots, (i_n, j_n)$ に分ける仕方の全体 $[(2n)!/2^n n!$ 通り$]$ にわたる和を表わす.

証明　$A(f)\Omega_0 = 0$ と交換関係,

$$[A(f), \Phi(g)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle f, g \rangle,$$

および (3.1.26) を用いると

$$\begin{aligned}
&\langle \Omega_0,\ \Phi(f_1) \cdots \Phi(f_n) \Omega_0 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Omega_0,\ A(f_1) \Phi(f_2) \cdots \Phi(f_n) \Omega_0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle f_1, f_2 \rangle \langle \Omega_0,\ \Phi(f_3) \cdots \Phi(f_n) \Omega_0 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Omega_0,\ \Phi(f_2) A(f_1) \Phi(f_3) \cdots \Phi(f_n) \Omega_0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} \langle f_i, f_j \rangle \langle \Omega_0,\ \Phi(f_2) \cdots \widehat{\Phi(f_j)} \cdots \Phi(f_n) \Omega_0 \rangle.
\end{aligned}$$

ここで，$\wedge$はその下にある対象を除くことを示す記号である．したがって，n が奇数のときは，上に示した手続きをくり返してゆくと，和の各項に必ず $\langle \Omega_0, \Phi(f)\Omega_0 \rangle$ という型の項が残る．しかし，これは 0 であるので，(4.2.2) が得られる．n が偶数のときは，上に示した手続きのくり返しにより (4.2.3) を得ることができる．▮

定理 4.2.2 $f_1, \cdots, f_{2n} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ とする．このとき，

$$W_{2n-1}(f_1, \cdots, f_{2n-1}) = 0, \tag{4.2.4}$$

$$\begin{aligned} &W_{2n}(f_1, \cdots, f_{2n}) \\ &\quad = \sum_{\text{comb}} W_2(f_{i_1}, f_{j_2}) \cdots W_2(f_{i_n}, f_{j_n}), \\ &\qquad\qquad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

2点 Wightman 超関数は，

$$W_2(f, g) = \int \frac{1}{i} \Delta_m{}^{(+)}(x-y) f(x) g(y) dx dy \tag{4.2.6}$$

であたえられる．ただし，

$$\Delta_m{}^{(+)}(x) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_{\mathrm{V}_m{}^+} e^{-i(p,x)} d\mu_m(p). \tag{4.2.7}$$

証明 $f_1, \cdots, f_{2n} \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^4)$ のときを示せば十分である．補題4.2.1 によって，

$$\begin{aligned} &W_{2n-1} = 0, \\ &W_{2n}(f_1, \cdots, f_{2n}) \\ &\quad = \frac{1}{2^n} \sum_{\text{comb}} \langle Ef_{i_1}, Ef_{j_1} \rangle \cdots \langle Ef_{i_n}, Ef_{j_n} \rangle, \qquad n = 2, 3, \cdots, \\ &W_2(f, g) = \frac{1}{2} \langle Ef, Eg \rangle, \qquad f, g \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^4) \end{aligned}$$

であるから，(4.2.5) を得る．一方，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle Ef, Eg \rangle &= \frac{(2\pi)}{2} \int_{\mathrm{V}_m{}^+} \overline{\hat{f}(p)} \hat{g}(p) d\mu_m(p) \\ &= \int \frac{1}{i} \Delta_{m^2}{}^{(+)}(x-y) f(x) g(y) dx dy \end{aligned}$$

となる．▮

4.3 $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ 上のボソン Fock 空間での表現

$\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ 上のボソン Fock 空間を $\mathcal{F}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))$ とする.

$f\in\mathsf{L}^2(\mathbf{V}_m{}^+, d\mu_m)$ に対して

$$(uf)(\boldsymbol{p})=\frac{f(\omega(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p})}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{p})}} \tag{4.3.1}$$

によって, 演算子 u を定義する. 容易にわかるように u は $\mathsf{L}^2(\mathbf{V}_m{}^+, d\mu_m)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ の上へのユニタリ演算子をあたえる. したがって, $\Gamma(u)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))$ の上へのユニタリ変換となる*). $\mathcal{F}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))$ 上の生成・消滅演算子を $\tilde{a}^\dagger(f), \tilde{a}(f)$ (3.1節の定義による) とすれば,

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a}^\dagger(uf)&=\Gamma(u)A^\dagger(f)\Gamma(u)^{-1}\\ \tilde{a}(uf)&=\Gamma(u)A(f)\Gamma(u)^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{4.3.2}$$

となっているが, 標準的な記号に一致させるために, $\mathcal{F}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))$ 上の生成・消滅演算子 $a^\dagger(f), a(f)$ を新しく次のように定義する: $f\in\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ に対して

$$\left.\begin{aligned}a^\dagger(f)&=\Gamma(u)A^\dagger(u^{-1}f)\Gamma(u)^{-1}\\ a(f)&=\Gamma(u)A(\overline{u^{-1}f})\Gamma(u)^{-1}\end{aligned}\right\}. \tag{4.3.3}$$

$a^\dagger(\cdot)$ の方はもともとの定義と同じであるが, $a(\cdot)$ は少し違う. $a^\dagger(\cdot)$ と $a(\cdot)$ はもはや $\mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))$ 上で互いに共役の関係にはなく

$$a^\dagger(f)\restriction\mathcal{F}_{\mathrm{F}}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))=a(\bar{f})^* \tag{4.3.4}$$

となる. さらに交換関係は,

$$[a(f), a^\dagger(g)]=\int f(\boldsymbol{p})g(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p} \tag{4.3.5}$$

となる.

$\mathcal{F}_n(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))$ は $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{3n})$ の関数 $\Psi(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$ で

$$\Psi(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=\Psi(\boldsymbol{p}_{\pi(1)},\cdots,\boldsymbol{p}_{\pi(n)}),\qquad \pi\in\mathcal{P}_n$$

をみたすものが生成する Hilbert 空間としてあたえられる. $a^\dagger(f), a(f)$ の作

*) $\Gamma(A)$ は, もともと, Hilbert 空間 H からそれ自身への縮小演算子 A に対して定義されたが, A が H から別の Hilbert 空間への縮小演算子の場合でも, まったく同様に定義される.

用は，$\Psi=\{\Psi^{(n)}\}\in\mathscr{F}_{\mathrm F}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))$ に対して

$$(a^\dagger(f)\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}f(\boldsymbol{p}_j)\Psi^{(n-1)}(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\widehat{\boldsymbol{p}_j},\cdots,\boldsymbol{p}_n),\quad n\geqslant 1, \tag{4.3.6}$$

$$(a^\dagger(f)\Psi)^{(0)}=0, \tag{4.3.7}$$

$$(a(f)\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=\sqrt{n+1}\int f(\boldsymbol{p})\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)d\boldsymbol{p},\quad n\geqslant 0, \tag{4.3.8}$$

によってあたえられる．

3.1節によって

$$\|a(f)\Psi\|\leqslant\|f\|\,\|N^{1/2}\Psi\|, \tag{4.3.9}$$

$$\|a^\dagger(f)\Psi\|\leqslant\|f\|\,\|(N+1)^{1/2}\Psi\| \tag{4.3.10}$$

がすべての $f\in\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3)$，$\Psi\in\mathsf{D}(N^{1/2})$ に対して成立する．ただし，N は $\mathscr{F}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))$ における個数演算子である．

$a^\sharp(f)$ を，$a(f), a^\dagger(f)$ のどちらかを表わす記号としよう．$f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^3)$ に対して，写像 $f\longmapsto a^\sharp(f)$ は $\mathsf{D}(N^{1/2})$ 上で演算子値超関数をあたえることが，不等式 (4.3.9)，(4.3.10) からわかる（$\mathscr{S}(\mathbf{R}^3)$ の強位相で $f_n\to f$ ならば，$\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ で $f_n\to f$）．したがって，記号的な演算子，$a^\dagger(\boldsymbol{p}), a(\boldsymbol{p})$ が存在して

$$a^\dagger(f)=\int a^\dagger(\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p} \tag{4.3.11}$$

$$a(f)=\int a(\boldsymbol{p})f(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p} \tag{4.3.11$'$}$$

と書ける．(4.3.5) によって

$$[a(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{q})]=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{4.3.12}$$

が成立する．この形式的演算子 $a^\sharp(\boldsymbol{p})$ [$a^\sharp(\boldsymbol{p})$ は $a(\boldsymbol{p})$ または $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ を表わす] が本書の第1章でも用い，通常の物理の文献でも用いられている生成・消滅演算子にほかならない．それらは，試験関数 $f\in\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ で均されてはじめて，Fock 空間における意味のある演算子となるのである*)．

*) $a(\boldsymbol{p})$ の方は各 $\boldsymbol{p}$ に対して演算子の意味をもたせることができるが，可閉演算子にならない．

参考のために，$a^{\dagger}(\boldsymbol{p})$ の形式的な作用を書いておこう．

$$(a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_j)\Psi^{(n-1)}(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\widehat{\boldsymbol{p}_j},\cdots,\boldsymbol{p}_n),$$

$$n\geqslant 1, \tag{4.3.13}$$

$$(a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\Psi)^{(0)}=0, \tag{4.3.14}$$

$$(a(\boldsymbol{p})\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=\sqrt{n+1}\,\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n),$$

$$n\geqslant 0. \tag{4.3.15}$$

これらは，(4.3.6～8) と (4.3.11) から容易にわかる．

$\mathscr{F}(\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3))$ での自由場を $\phi(f)$ とすれば，(4.3.2)，(4.3.3) によって，

$$\begin{aligned}\phi(f)&=\Gamma(u)\Phi_m(f)\Gamma(u)^{-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a^{\dagger}\left(\frac{Ef}{\sqrt{\omega}}\right)+a\left(\frac{Ef}{\sqrt{\omega}}\right)\right\},\qquad f\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

となる．これを記号的に書けば，

$$\phi(f)=\int_{\mathbf{R}^4}\phi(x)f(x)dx, \tag{4.3.17}$$

$$\phi(x)=\int_{\mathbf{R}^3}d\boldsymbol{p}\frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega(\boldsymbol{p})}}\left\{a^{\dagger}(\boldsymbol{p})e^{i(\omega(\boldsymbol{p})x^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}+a(\boldsymbol{p})e^{-i(\omega(\boldsymbol{p})x^0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\right\} \tag{4.3.18}$$

となる．(4.3.18) であたえられる形式的演算子 $\phi(x)$ が通常，物理の文献で質量 m の自由な中性スカラー量子場とよばれているものである*)．

時刻 t の場 $\phi_t(f)$ は，(4.3.18) から暗示されるように，

$$\phi_t(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a^{\dagger}\left(\frac{e^{i\omega t}\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right)+a\left(\frac{e^{-i\omega t}\tilde{\hat{f}}}{\sqrt{\omega}}\right)\right\} \tag{4.3.19}$$

で定義される．ただし，

$$\tilde{\hat{f}}(\boldsymbol{p})=\hat{f}(-\boldsymbol{p}). \tag{4.3.20}$$

$a^{\sharp}(g)$ が定義されるためには，$g\in\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ でなければならないから，$\phi_t(f)$ は $\hat{f}/\sqrt{\omega}\in\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ となるようなものに対してだけ定義される．

さて，$\phi_0(\cdot)$ と $\phi_t(\cdot)$ の関係を調べよう．そのために，

---

*) (1.1.18) は物理空間 $\mathbf{R}^3$ を有界な V に制限した場合である．

$$H_0 = \Gamma(u) P^0 \Gamma(u)^{-1} \tag{4.3.21}$$

とおこう．H_0 の作用が

$$(H_0\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n) = \left[\sum_{j=1}^{n} \omega(\boldsymbol{p}_j)\right] \Psi^{(n)}(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n), \quad n \geqslant 1 \tag{4.3.22}$$

$$(H_0\Psi)^{(0)} = 0 \tag{4.3.23}$$

となることは容易にわかる．また，(4.3.13〜15) を使えば記号的に

$$H_0 = \int d\boldsymbol{p}\, a^\dagger(\boldsymbol{p}) a(\boldsymbol{p}) \omega(\boldsymbol{p}) \tag{4.3.24}$$

と書ける．

$\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ 上で，$f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ に対して

$$e^{itH_0} a(f) e^{-itH_0} = a(e^{-i\omega t} f), \tag{4.3.25}$$

$$e^{itH_0} a^\dagger(f) e^{-itH_0} = a^\dagger(e^{i\omega t} f), \tag{4.3.26}$$

となることを確かめるのは容易である．よって

$$\phi_t(f) = e^{itH_0} \phi_0(f) e^{-itH_0}. \tag{4.3.27}$$

$f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)$ に対して $\mathbf{R}^3$ 上の関数

$$f_t(\boldsymbol{x}) = f(t, \boldsymbol{x}), \qquad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^4$$

を定義し，

$$\hat{f}_t(\boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-3/2} \int f(t, \boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x}$$

とおく．このとき，$e^{-i\omega t}\hat{f}_t/\sqrt{\omega}$ は $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ のノルムで t について強連続だから，(4.3.9)，(4.3.10) によって

$$a(e^{-i\omega t}\hat{f}_t/\sqrt{\omega})\Psi,$$

$$a^\dagger(e^{i\omega t}\hat{f}_t/\sqrt{\omega})\Psi, \qquad \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)),$$

は，t について，$\mathscr{F}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ で強連続，しかも

$$\int \|\hat{f}_t/\sqrt{\omega}\|_{\mathrm{L}^2} dt < \infty$$

だから，$\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ に対して

$$I(f)\Psi \equiv \int dt\, e^{itH_0} \phi_0(f_t) e^{-itH_0} \Psi$$

は，$\mathscr{F}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ の値をとる Riemann 積分として定義され，(4.3.25) および (4.3.26) によって

$$I(f)\Psi = \phi(f)\Psi$$

となる．ただし，ここで，

$$\int dt a^{\sharp}(e^{\pm i\omega t}\hat{f}_t/\sqrt{\omega})\Psi = a^{\sharp}\left(\int dt e^{\pm i\omega t}\hat{f}_t/\sqrt{\omega}\right)\Psi$$

とできることを用いた．これは，

$$\int dt e^{\pm i\omega t}\hat{f}_t/\sqrt{\omega}$$

が $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ の値をとる絶対可積分関数であることと $a^{\sharp}(f)$ の f についての連続性 —— ($\|f_n-f\|_{\mathrm{L}^2}\to 0$ ならば $\|a(f_n)\Psi-a(f)\Psi\|\to 0$, $\Psi\in \mathrm{D}(N^{1/2})$ —— による [(4.3.9) と (4.3.10) を参照]．こうして，$\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ 上で

$$\phi(f) = \int dt e^{itH_0}\phi_0(f_t)e^{-itH_0} \qquad f\in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4) \tag{4.3.28}$$

となることが示された [f が実数値でないときは，$\phi(f)=\phi(\mathrm{Re}\,f)+i\phi(\mathrm{Im}\,f)$ によって (4.3.28) が得られる]．

次に $\phi_t(f)$ の t についての微分可能性を調べよう．

命題 4.3.1　$f\in \mathscr{S}(\mathbf{R}^3)$, $\Psi\in \mathrm{D}(N^{1/2})$ ならば，$\phi_t(f)\Psi$ は t について強位相で無限回微分可能であり，その n 階微分は

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}\phi_t(f)\Psi = \frac{i^n}{\sqrt{2}}\{&a^{\dagger}(\omega^n e^{i\omega t}\hat{f}/\sqrt{\omega})\\ &+(-1)^n a(\omega^n e^{-i\omega t}\tilde{\hat{f}}/\sqrt{\omega})\}\Psi\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

であたえられる．特に，$\phi_t(f)$ は，方程式

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_t(f)+\phi_t((-\Delta+m^2)f)\right\}\Psi = 0 \tag{4.3.30}$$

をみたす．

証明　すべての $n\geqq 0$ に対して $\omega^n g\in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ となる関数 g をとり，$\Psi\in \mathrm{D}(N^{1/2})$ として，ベクトル

$$A_t^{\dagger}(g) = a^{\dagger}(ge^{i\omega t})\Psi,$$
$$A_t(g) = a(ge^{-i\omega t})\Psi$$

を考える．このとき，

$$\left\|\frac{A^\dagger{}_{t+\varepsilon}(g)-A_t(g)}{\varepsilon}-iA^\dagger{}_t(\omega g)\right\|=\left\|a^\dagger\left(ge^{i\omega t}\left(\frac{e^{i\omega\varepsilon}-1}{\varepsilon}-i\omega\right)\right)\Psi\right\|$$

$$\leqslant\left\|g\left|\frac{e^{i\omega\varepsilon}-1}{\varepsilon}-i\omega\right|\right\|_{L^2}\|(N+1)^{1/2}\Psi\|.$$

一方，

$$\left|\frac{e^{i\omega\varepsilon}-1}{\varepsilon}\right|=\left|\int_0^\omega e^{i\varepsilon x}dx\right|\leqslant\omega$$

であり，$\omega g\in L^2(\mathbf{R}^3)$ だから，Lebesgue の収束定理により，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|g\left|\frac{e^{i\omega\varepsilon}-1}{\varepsilon}-i\omega\right|\right\|_{L^2}=0$$

となる．したがって，$A_t{}^\dagger(g)$ は t について微分可能で

$$\frac{d}{dt}A_t{}^\dagger(g)=iA_t{}^\dagger(\omega g).$$

この手続きをくり返せば，$A_t{}^\dagger(g)$ は t について無限回微分可能であり，その n 階微分は

$$\frac{d^n}{dt^n}A_t{}^\dagger(g)=i^nA_t{}^\dagger(\omega^n g)$$

となることがわかる．$A_t(g)$ の方も同様で

$$\frac{d^n}{dt^n}A(g)=(-i)^nA_t(\omega^n g)$$

となる．そこで，

$$g=\hat{f}/\sqrt{\omega},\qquad f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$$

ととれば，(4.3.29) を得る．(4.3.30) は (4.3.29) と

$$\omega^2\hat{f}=\{(-\Delta+m^2)f\}^\wedge$$

によって得られる．∎

$\phi_t(f)$ の1階の微分を $\pi_t(f)$ と書き，$\phi_t(f)$ の**共役場**とよぶ：

$$\pi_t(f)=\frac{i}{\sqrt{2}}\{a^\dagger(\sqrt{\omega}e^{i\omega t}\hat{f})-a(\sqrt{\omega}e^{-i\omega t}\tilde{\hat{f}})\}.\qquad(4.3.31)$$

$a^\sharp(\cdot)$ の交換関係によって，$\mathcal{F}_F(L^2(\mathbf{R}^3))$ 上で

$$[\phi_t(f), \pi_t(g)] = i\int dx f(x)g(x),$$
$$f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3), \qquad (4.3.32)$$

が成立する．この交換関係は場の**正準交換関係**（CCR：canonical commutation relations）とよばれ，第1章に述べたとおり‘正準形式’の場の量子論の基本的な要素のひとつである．

最後に，$a^\sharp(f)$ の他の有用な基本的性質を挙げておこう．

命題 4.3.2

$$\Psi \in \mathrm{D}(H_0^{1/2}), \qquad f, f/\sqrt{\omega} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$$

に対して

$$\|a^\dagger(f)\Psi\| \leqslant \|f/\sqrt{\omega}\|_{\mathrm{L}^2}\|H_0^{1/2}\Psi\| + \|f\|_{\mathrm{L}^2}\|\Psi\|, \qquad (4.3.33)$$
$$\|a(f)\Psi\| \leqslant \|f/\sqrt{\omega}\|_{\mathrm{L}^2}\|H_0^{1/2}\Psi\| \qquad (4.3.34)$$

が成立する*)．

証明

$$f(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\omega(\boldsymbol{p})}\cdot(f(\boldsymbol{p})/\sqrt{\omega(\boldsymbol{p})})$$

として Schwarz の不等式を使うと

$$\begin{aligned}
&\|(a(f)\Psi)^{(n)}\|^2 \\
&\leqslant \|f/\sqrt{\omega}\|_{\mathrm{L}^2}^2(n+1)\int \omega(\boldsymbol{p})|\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n)|^2 d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{p}_1\cdots d\boldsymbol{p}_n \\
&= \|f/\sqrt{\omega}\|_{\mathrm{L}^2}^2\int\left(\sum_{j=1}^{n+1}\omega(\boldsymbol{p}_j)\right)|\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{n+1})|^2\prod_{j=1}^{n+1}d\boldsymbol{p}_j \\
&= \|f/\sqrt{\omega}\|_{\mathrm{L}^2}^2\|(H_0^{1/2}\Psi)^{(n+1)}\|^2.
\end{aligned}$$

ここで，上の第一の等号で $\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{n+1})$ の $\{\boldsymbol{p}_j\}$ に関する置換対称性を用いた．したがって，$\Psi \in \mathrm{D}(H_0^{1/2})$ ならば，上の不等式の両辺を n について加えることによって (4.3.34) を得る．$a^\dagger(f)$ については

$$\begin{aligned}
\|a^\dagger(f)\Psi\|^2 &= \langle\Psi, a(\bar{f})a^\dagger(f)\Psi\rangle \\
&= \|f\|_{\mathrm{L}^2}^2\|\Psi\|^2 + \langle\Psi, a^\dagger(f)a(\bar{f})\Psi\rangle \\
&= \|a(\bar{f})\Psi\|^2 + \|f\|_{\mathrm{L}^2}^2\|\Psi\|^2
\end{aligned}$$

---

*) $m>0$ のときは，$f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ ならば $f/\sqrt{\omega} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$ であるが，$m=0$ のときには，必ずしもそうはならない．

$$\leqslant \|f/\sqrt{\omega}\|_{L^2}\|H_0^{1/2}\Psi\|^2 + \|f\|_{L^2}^2\|\Psi\|^2.$$

ここで，第2の等号は $a^\sharp(f)$ の交換関係による． ∎

命題 4.3.3 $f, f/\sqrt{\omega}, \sqrt{\omega}f, \omega f \in L^2(\mathbf{R}^3)$ のとき，$a^\sharp(f)$ は $D(H_0^{3/2})$ を $D(H_0)$ の中へうつし，$D(H_0^{3/2})$ 上で

$$[H_0, a(f)] = -a(\omega f) \tag{4.3.35}$$

$$[H_0, a^\dagger(f)] = a^\dagger(\omega f) \tag{4.3.36}$$

が成立する．

証明 f を仮定のようにとり，$\Psi \in D(H_0^{3/2})$ とする．いま，$l \geqslant 1$ に対して，$\Psi_l \in \mathscr{F}_F(L^2(\mathbf{R}^3)) \cap D(H_0^{3/2})$ を

$$\Psi_l^{(n)} = \begin{cases} \Psi^{(n)} & 0 \leqslant n \leqslant l \\ 0 & n \geqslant l+1 \end{cases}$$

によって定義する．このとき，$l \to \infty$ で

$$\Psi_l \xrightarrow{s} \Psi$$

$$H_0^\alpha \Psi_l \xrightarrow{s} H_0^\alpha \Psi, \qquad \alpha \in (0, 3/2]$$

となる．ここで，$\xrightarrow{s}$ は $\mathscr{F}(L^2(\mathbf{R}^3))$ の強収束を示す記号である．したがって，命題4.3.2によって，$l \to \infty$ で

$$a^\sharp(f)\Psi_l \xrightarrow{s} a^\sharp(f)\Psi \tag{4.3.37}$$

となる．直接の計算によって

$$H_0 a^\dagger(f)\Psi_l = a^\dagger(f)H_0\Psi_l + a^\dagger(\omega f)\Psi_l.$$

右辺は，上に述べたことと命題4.3.2とによって $l \to \infty$ のとき

$$\Psi' \equiv a^\dagger(f)H_0\Psi + a^\dagger(\omega f)\Psi$$

に収束する．したがって，$H_0 a^\dagger(f)\Psi_l$ は Ψ' に収束する．これと (4.3.37) および H_0 が閉演算子であることから，

$$a^\dagger(f)\Psi \in D(H_0) \qquad H_0 a^\dagger(f)\Psi = \Psi'$$

が得られる．したがって，

$$a^\dagger(f) : D(H_0^{3/2}) \longrightarrow D(H_0)$$

で，(4.3.36) が成立する．$a(f)$ についても同様である． ∎

命題 4.3.4 すべての $n = 0, 1, 2, \cdots,$ に対して，$\omega^n f, \omega^{n-1/2} f \in L^2(\mathbf{R}^3)$ とす

る．このとき，$a^\dagger(f), a(f)$ は，$\mathrm{D}(H_0{}^{n+1/2})$ を $\mathrm{D}(H_0{}^n)$ の中へうつす．特に，

$$\mathrm{C}^\infty(H_0) \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathrm{D}(H_0{}^n)$$

をそれ自身の中へうつす．

証明　$a^\dagger(f)$ の場合だけを証明する．$a(f)$ の場合も同様である．次の主張を帰納法によって証明する：

$$(\mathrm{S}_n)\quad \begin{cases} a^\dagger(f) \text{ は } \mathrm{D}(H_0{}^{n+1/2}) \text{ を } \mathrm{D}(H_0{}^n) \text{ の中へうつし,} \\ \text{すべての } \Psi \in \mathrm{D}(H_0{}^{n+1/2}) \text{ に対して} \\ \quad H_0{}^n a^\dagger(f)\Psi = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^\dagger(\omega^r f) H_0{}^{n-r}\Psi \end{cases} \tag{4.3.38}$$

(S_0) は命題4.3.2による．(S_n) がなりたつとしよう．$\Psi \in \mathrm{D}(H_0{}^{n+3/2})$ とすれば，

$$H_0{}^{n-r}\Psi \in \mathrm{D}(H_0{}^{3/2}), \qquad r = 0, 1, \cdots, n$$

であるから，(4.3.38) の右辺は，命題4.3.3によって $\mathrm{D}(H_0)$ に属する．したがって

$$H_0{}^n a^\dagger(f)\Psi \in \mathrm{D}(H_0)$$

であり，

$$\begin{aligned} H_0{}^{n+1} a^\dagger(f)\Psi &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r H_0 a^\dagger(\omega^r f) H_0{}^{n-r}\Psi \\ &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r \{a^\dagger(\omega^{r+1} f) + a^\dagger(\omega^r f) H_0\} H_0{}^{n-r}\Psi \\ &= \sum_{r=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_r a^\dagger(\omega^r f) H_0{}^{n+1-r}\Psi. \end{aligned}$$

$H_0{}^n a^\dagger(f)\Psi \in \mathrm{D}(H_0)$ は $a^\dagger(f)\Psi \in \mathrm{D}(H_0{}^{n+1})$ を意味するから，したがって，(S_{n+1}) がなりたつ．∎

系 4.3.5

（1）　$\omega^r \hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)$，　$r = -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2$ とする．このとき，$\mathrm{D}(H_0{}^{3/2})$ 上で次の交換関係が成立する：

$$[H_0, \phi_0(f)] = -i\pi_0(f), \tag{4.3.39}$$

$$[H_0, \pi_0(f)] = i\phi_0((-\Delta+m^2)f). \tag{4.3.40}$$

（2） $\omega^r\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3), r = -1, -1/2, 0, 1/2$ とし，f を実数値とする．このとき，$\mathrm{D}(H_0)$ 上で

$$e^{i\phi_0(f)}H_0e^{-i\phi_0(f)} = H_0 - \pi_0(f) + \frac{1}{2}\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2. \tag{4.3.41}$$

証明　(1) は命題4.3.3による．(2) を示すために，まず，

$$\omega^n\hat{f}, \omega^{n+1/2}\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3), \qquad n = -1, 0, 1, 2, \cdots,$$

となるような f を考える．このとき，命題4.3.4によって，任意の $n = 1, 2, \cdots$, に対して，$\phi_0(f)^n$ は $\mathrm{C}^\infty(H_0)$ 上で意味をもつ．そこで，

$$\psi, \eta \in \mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)) \cap \mathrm{C}^\infty(H_0)$$

とすれば，ψ, η は $\phi_0(f)$ に対する解析ベクトルであったから，

$$\begin{aligned}
&\langle\psi, e^{i\phi_0(f)}H_0e^{-i\phi_0(f)}\eta\rangle \\
&= \sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{i^n(-i)^k}{n!k!}\langle\phi_0(f)^n\psi, H_0\phi_0(f)^k\eta\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r(-1)^{n-r}\langle\phi_0(f)^r\psi, H_0\phi_0(f)^{n-r}\eta\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\langle\psi, (\mathrm{Ad}\,\phi_0(f))^nH_0\eta\rangle
\end{aligned}$$

となる．ただし，$(\mathrm{Ad}\,\phi_0(f))^nH_0$ は，帰納的に

$$(\mathrm{Ad}\,\phi_0(f))^0H_0 = H_0$$

$$(\mathrm{Ad}\,\phi_0(f))^nH_0 = [\phi_0(f), (\mathrm{Ad}\,\phi_0(f))^{n-1}H_0], \quad n = 1, 2, \cdots$$

によって定義される．ところが

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}\,\phi_0(f))^1H_0 &= i\pi_0(f) \\
(\mathrm{Ad}\,\phi_0(f))^2H_0 &= [\phi_0(f), i\pi_0(f)] \\
&= -\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2 \\
(\mathrm{Ad}\,\phi_0(f))^nH_0 &= 0, \qquad n = 3, 4, \cdots
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\langle\psi, e^{i\phi_0(f)}H_0e^{-i\phi_0(f)}\eta\rangle \\
&= \left\langle\psi, \left(H_0 - \pi_0(f) + \frac{1}{2}\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2\right)\eta\right\rangle
\end{aligned}$$

となる．$\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)) \cap \mathrm{C}^\infty(H_0)$ は $\mathscr{F}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ で稠密だから，

$$e^{i\phi_0(f)} H_0 e^{-i\phi_0(f)} \eta = (H_0 - \pi_0(f) + \frac{1}{2}\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2)\eta \tag{4.3.42}$$

を得る．$\mathscr{F}_{\mathrm{F}}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)) \cap \mathrm{C}^\infty(H_0)$ は H_0 のコアであるから，(4.3.42) はすべての $\eta \in \mathrm{D}(H_0)$ まで拡張される．

$$\|(\hat{f}_n - \hat{f})/\sqrt{\omega}\|_{\mathrm{L}^2} \to 0, \qquad \|(\hat{f}_n - \hat{f})/\omega\|_{\mathrm{L}^2} \to 0$$

のとき，$\eta \in \mathrm{D}(H_0)$ に対して

$$\|(e^{-i\phi_0(f_n)} - e^{-i\phi_0(f)})\eta\| \to 0$$

となることなどを用いると，(4.3.42) はさらに，(2) の仮定をみたす f まで拡張される．∎

4.4 Gauss 超過程としての時刻 0 の場

実 Hilbert 空間

$$\mathrm{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3) = \{f \in \mathscr{S}_r{}'(\mathbf{R}^3) \mid \hat{f}/\sqrt{\omega} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)\} \tag{4.4.1}$$

を考える*)．内積は

$$(f, g)_{-1/2} = \int \frac{\overline{\hat{f}(\boldsymbol{p})}\hat{g}(\boldsymbol{p})}{\omega(\boldsymbol{p})} d\boldsymbol{p} \tag{4.4.2}$$

であたえられる(誤解のおそれがないときは添字 $-1/2$ を省略することがある)．$\mathrm{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ を指標とする Gauss 超過程を $\{\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, \phi_{\mathrm{F}}(\cdot), d\mu_{0,\mathrm{F}}\}$ としよう**)．

定理 4.4.1　$\mathscr{F}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ から $\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ の上へのユニタリ変換 U で次の3つの条件をみたすものが存在する：

(1)　$U\Omega_0 = 1$,

(2)　$U\phi_0(f)U^{-1} = \phi_{\mathrm{F}}(f), \quad f \in \mathrm{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$,

(3)　$U\mathscr{F}_n(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)) = \Gamma_n(\mathrm{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3))$.

証明　$f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ とし，$\mathscr{F}_n(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3))$ から，$\Gamma_n(\mathrm{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3))$ への演算子 U を

$$U : \phi_0(f_1)\cdots\phi_0(f_n) : \Omega_0 = : \phi_{\mathrm{F}}(f_1)\cdots\phi_{\mathrm{F}}(f_n) :, \qquad n \geqslant 1,$$

---

*)　次数 $-1/2$ の実 Sobolev 空間である．

**)　添字 F は Fock 空間を意味する．

$$U\Omega_0 = 1$$

によって定義する．あとは，定理 3.3.1 の証明とまったく同様であるから，省略する．∎

上の定理の (2) について，ひとこと注意しておこう．$\phi_F(f)$ は確率変数だから，演算子としては，関数をかけるという，掛算演算子である．したがって，上の定理の (2) は，時刻 0 の自由場が $L^2(\mathbf{Q}_F, d\mu_{0,F})$ における掛算演算子として実現されることを示しており，自己共役演算子 $\phi_0(f)$ $(f \in H_{-1/2}(\mathbf{R}^3))$ の '対角化' と見ることができる．すなわち，$L^2(\mathbf{Q}_F, d\mu_{0,F})$ にうつることは，時刻 0 の自由場の CCR [(4.3.32) 参照] の 'Schrödinger 表現' を構成することに相当している．

念のためにいえば，有限自由度，たとえば n 自由度の量子力学の CCR は，

$$\begin{aligned} [q_j, p_k] &= i\delta_{jk}, \\ [q_j, q_k] = 0, &\quad [p_j, p_k] = 0 \end{aligned} \qquad j, k = 1, \cdots, n,$$

であるが，その Schrödinger 表現は，波動関数 $\psi(x_1, \cdots, x_n) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ に対して q_j を '座標 x_j をかける' 演算子，p_j を '微分' 演算子 $-i\partial/\partial x_j$ とする．

$$\begin{aligned} L^2(\mathbf{R}^n) &\longleftrightarrow L^2(\mathbf{Q}_F, d\mu_{0,F}) \\ \{q_j\} &\longleftrightarrow \phi_0(f) \\ \{p_j\} &\longleftrightarrow \pi_0(f) \end{aligned}$$

の対応に注意しよう．

次に，$L^2(\mathbf{Q}_F, d\mu_{0,F})$ で自由場のハミルトニアンがどのように表現されるかを見るために，$H_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ における自己共役演算子 $\hat{\omega}$ を

$$(\hat{\omega} f)^\wedge(\boldsymbol{p}) = \omega(\boldsymbol{p})\hat{f}(\boldsymbol{p}) \tag{4.4.3}$$

によって定義する*)．$\hat{\omega}$ の定義域は

$$D(\hat{\omega}) = \{f \in H_{-1/2}(\mathbf{R}^3) \mid \sqrt{\omega(\boldsymbol{p})}\,\hat{f} \in L^2(\mathbf{R}^3)\}$$

であたえられる．命題 3.1.4 の証明によって，$f_1, \cdots, f_n \in D(\hat{\omega})$ のとき，

$$\begin{aligned} H_0 &: \phi_0(f_1) \cdots \phi_0(f_n) : \Omega_0 \\ &= : \phi_0(\hat{\omega} f_1)\phi_0(f_2) \cdots \phi_0(f_n) : \Omega_0 \end{aligned}$$

---

*) $\hat{\omega} = (-\Delta + m^2)^{1/2}$ である．

$$+ :\phi_0(f_1)\phi_0(\hat{\omega}f_2)\phi_0(f_3)\cdots\phi_0(f_n):\Omega_0$$
$$+\cdots+ :\phi_0(f_1)\cdots\phi_0(\hat{\omega}f_n):\Omega_0$$

となるから，これを用いて，

$$UH_0U^{-1}=d\Gamma(\hat{\omega}) \tag{4.4.4}$$

を示すことができる．ここで右辺の演算子は $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ における $\hat{\omega}$ の第2量子化である（3.4節参照）．

同様にして，時刻 t の自由場 $\phi_t(\cdot)$ に対しても $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ での表示を得ることができるが，省略する．

4.5 Schwinger 関数と Euclid 場

Schwinger 関数は，Wightman 超関数の虚時間への解析接続として定義される（第2章参照）．質量 m の自由な中性スカラー量子場の Wightman 超関数は，Wightman の公理をみたすことが示されたから（4.2節），一般論（Osterwalder-Schrader の再構成定理）によって，その Schwinger 関数の存在は保証される．そこで，その具体的な形をもとめよう．

定理 4.5.1　$\{S_n(x_1,\cdots,x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を質量 m の自由・中性スカラー量子場の Schwinger 関数とする．これらは，次の形であたえられる：

$$S_{2n+1}(x_1,\cdots,x_{2n+1})=0,$$
$$(x_1,\cdots,x_{2n+1})\in\mathbf{R}^{4(2n+1)},\quad x_i\neq x_j\ (i\neq j), \tag{4.5.1}$$

$$S_{2n}(x_1,\cdots,x_{2n})=\sum_{\mathrm{comb}}S_2(x_{i_1},x_{j_1})\cdots S_2(x_{i_n},x_{j_n}),$$
$$(x_1,\cdots,x_{2n})\in\mathbf{R}^{4(2n)},\quad x_i\neq x_j\ (i\neq j). \tag{4.5.2}$$

2点 Schwinger 関数は

$$S_2(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+m^2}d^4p \tag{4.5.3}$$

であたえられる．ここで px は $\mathbf{R}^4$ のベクトル p と x の Euclid 内積を表わす．すなわち，$px=p^0x^0+p^1x^1+\cdots+p^3x^3$.

証明に入る前に，(4.5.3) の右辺であたえられる関数を $C(x-y)$ とおき，

その基本的な性質を見ておこう.

公式

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{ita}}{t^2+a^2}dt = \frac{\pi e^{-a|\alpha|}}{a} \tag{4.5.4}$$

を用いると

$$C(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{-\omega(\boldsymbol{p})|x^0|+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{\omega(\boldsymbol{p})} d^3\boldsymbol{p}. \tag{4.5.5}$$

そこで, C の Euclid 的回転不変性を用いると

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{-\omega(\boldsymbol{p})|x|}}{\omega(\boldsymbol{p})} d^3\boldsymbol{p} \qquad (|x| \equiv \sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\omega(p)|x|}}{\omega(p)} p^2 dp. \end{aligned}$$

したがって, 特に

$$C(x) \geqslant 0, \qquad x \in \mathbf{R}^4.$$

$p = m\sinh t$ $(t \geqslant 0)$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{m^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dt \sinh^2 t\, e^{-m|x|\cosh t} \\ &= \frac{m}{(2\pi)^2|x|}\int_0^\infty dt \cosh t\, e^{-m|x|\cosh t}. \end{aligned}$$

右辺の積分は次数 1 の変形 Bessel 関数 K_1 の積分表示にほかならないので*)

$$C(x) = \frac{m}{(2\pi)^2|x|} K_1(m|x|) \tag{4.5.6}$$

となる. したがって, $C(x)$ は $\mathbf{R}^4\setminus\{0\}$ で実解析的な関数である.

定理 4.5.1 の証明　まず, $C(x-y)$ が 2 点 Schwinger 関数であることを示す. 2 点 Wightman 超関数核を $W_2(x,y) \equiv W_2(x-y)$ とすれば, 定理 4.2.2 によって

$$W_2(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{p}\, \frac{e^{-i\omega(\boldsymbol{p})x^0+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}}{\omega(\boldsymbol{p})}.$$

*) 森口繁一ら,『数学公式 III』, 岩波全書 244, 岩波書店.

したがって，$z \in \mathcal{T}_1{}^+$（記号については第2章参照）に対して

$$\widetilde{W}_2(z) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{p}\,\frac{e^{+i\omega(\boldsymbol{p})z^0 - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{z}}}{\omega(\boldsymbol{p})}$$

は $W_2(x)$ を境界値とする $\mathcal{T}_1{}^+$ 上の解析関数をあたえる．とくに，

$$z = (ix^0, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{T}_1{}^+$$

を考えると (4.5.5) によって，

$$\widetilde{W}_2(ix^0, \boldsymbol{x}) = C(x^0, \boldsymbol{x})$$

となる．$\widetilde{W}_2(i(x^0-y^0), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は，定義によって，領域

$$\mathbf{R}_+{}^8 \equiv \{(y, x) \in \mathbf{R}^8 \mid y^0 < x^0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^3\}$$

における2点 Schwinger 関数であり，他方，さきに見たように $C(x^0-y^0, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は $\mathbf{R}_+{}^8$ において実解析的であったから，$C(x-y)$ は $\mathbf{R}_+{}^8$ における2点 Schwinger 関数でなければならない．さらに

$$C(y-x) = C(x-y)$$

であり，2点 Schwinger 関数も同じ性質をもつので，結局，すべての点 $(x, y) \in \mathbf{R}^8$ $(x^0 \neq y^0)$ で $C(x-y)$ は2点 Schwinger 関数に一致することが結論される．

次に，

$$\widetilde{W}_{2n}(z_1, \cdots, z_{2n}) = \sum_{\text{comb}} \widetilde{W}_2(z_{i_1}-z_{j_1}) \cdots\cdots \widetilde{W}_2(z_{i_n}-z_{j_n})$$

とすれば，$\widetilde{W}_{2n}(z_1, \cdots, z_{2n})$ は，$2n$ 点 Wightman 超関数の，前方管状領域 $\mathcal{T}_{2n}{}^+$ への解析接続をあたえる．上に見たように，$\mathbf{R}_+{}^8$ で

$$\widetilde{W}_2(i(x^0-y^0), \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = S_2(x, y)$$

だったから，

$$\mathbf{R}_+{}^{4(2n)} \equiv \{(x_1, \cdots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{4(2n)} \mid x_1{}^0 < \cdots < x_{2n}{}^0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{2n} \in \mathbf{R}^3\}$$

において，

$$\widetilde{W}_{2n}((ix_1{}^0, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (ix_{2n}{}^0, \boldsymbol{x}_{2n})) = S_{2n}(x_1, \cdots, x_{2n})$$

となる．$S_{2n}(x_1, \cdots, x_{2n})$ は

$$x_i \neq x_j \qquad (i \neq j), \qquad i, j = 1, \cdots, 2n,$$

で解析的であり，$(x_1, \cdots, x_{2n})$ の任意の置換に対して不変であるから，

$$x_i \neq x_j \qquad (i \neq j), \qquad i, j = 1, \cdots, 2n$$

となるすべての点 $(x_1,\cdots,x_{2n})$ で S_{2n} は $2n$ 点 Schwinger 関数に一致しなければならない $[\widetilde{W}_{2n}((ix_1{}^0,x_1),\cdots,(ix_{2n}{}^0,x_{2n}))$ は定義によって $\mathbf{R}_+{}^{4(2n)}$ における $2n$ 点 Schwinger 関数である]. $S_{2n+1}=0$ となることは自明である. ∎

さて, 質量 m の自由な中性スカラー量子場の Schwinger 関数をその '真空期待値' としてあたえるような '場' の理論を考えよう. これに対する手がかりは, 定理 4.5.1 であたえた Schwinger 関数の形にある. 特に 2 点 Schwinger 関数は正定値であることに注意する: 任意の $f,g\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^4)$ に対して

$$\int dxdy\overline{f(x)}S_2(x,y)f(y)=\int dp\frac{|\hat{f}(p)|^2}{p^2+m^2}\geqslant 0.$$

そこで, 実 Hilbert 空間

$$\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)=\left\{f\in\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^4)\;\middle|\;\|f\|_{-1}^2\equiv 2\int\frac{|\hat{f}(p)|^2}{p^2+m^2}dp<\infty\right\}\qquad(4.5.7)$$

を考え, 以下に述べる定理 4.5.3 の結果をみこして, 次の定義をする:

定義 4.5.2 $\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)$ を指標とする Gauss 超過程 $\phi(\cdot)$ を**自由な Euclid 場**とよぶ. 自由な Euclid 場が実現する測度空間を $(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}},d\mu_{0,\mathrm{E}})$, 状態空間を $\mathcal{E}=\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}},d\mu_{0,\mathrm{E}})$ $(=\Gamma(\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)))$ と書く.

定理 4.5.3 $f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^4)$ に対して

$$\begin{aligned}&S_n(f_1,\cdots,f_n)\\&=\int S_n(x_1,\cdots,x_n)f(x_1)\cdots f(x_n)dx_1\cdots dx_n\end{aligned}\qquad(4.5.8)$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned}&S_n(f_1,\cdots,f_n)\\&=\int\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)d\mu_{0,\mathrm{E}},\qquad n=1,2,\cdots.\end{aligned}\qquad(4.5.9)$$

証明 Gauss 超過程の性質によって,

$$\int\phi(f_1)\cdots\phi(f_{2n+1})d\mu_{0,\mathrm{E}}=0,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

$$\int \phi(f_1)\cdots\phi(f_{2n})d\mu_{0,\mathrm{E}} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{\mathrm{comb}}\langle f_{i_1}, f_{j_1}\rangle_{-1}\cdots\langle f_{i_n}, f_{j_n}\rangle_{-1}$$
$$= \sum_{\mathrm{comb}} S_2(f_{i_1}, f_{j_1})\cdots S_2(f_{i_n}, f_{j_n}).$$

定理4.5.1によって，最後の量は $S_{2n}(f_1, \cdots, f_{2n})$ に等しい．∎

上の定理は，$1\in\mathscr{E}$ を‘真空’とみなせば，(均された) Schwinger 関数が自由な Euclid 場の真空期待値であたえられることを示すものである．Euclid 場 $\phi(\cdot)$ が4.1節で構成した場 $\Phi_m(\cdot)$——これを Euclid 場との対比において，Minkowski 場とよぶ——と本質的に異なる点は，その可換性にある．すなわち，任意の $f, g\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)$ に対して，Euclid 場では $[\phi(f), \phi(g)]=0$ であるが，Minkowski 場では $[\Phi_m(f), \Phi_m(g)]$ は必ずしも0にならない．

$\mathbf{E}^4$ を4次元 Euclid 群としよう．$\mathbf{E}^4$ は，並進，回転および鏡映から生成される．$\mathscr{E}$ 上には，$\mathbf{E}^4$ の自然なユニタリ表現があたえられる．それを見るために，まず，$\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)$ 上でのユニタリ表現を考える．すなわち，$\alpha\in\mathbf{E}^4$ に対して，$\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)$ 上の演算子 u_α を

$$(u_\alpha f)(x) = f(\alpha^{-1}x) \tag{4.5.10}$$

によって定義する．$\{u_\alpha \mid \alpha\in\mathbf{E}^4\}$ が実際 $\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^3)$ 上のユニタリ表現をあたえることは容易に確かめられる．そこで

$$U(\alpha) = \Gamma(u_\alpha) \tag{4.5.11}$$

とすれば，$\{U(\alpha) \mid \alpha\in\mathbf{E}^4\}$ は $\mathscr{E}$ 上のユニタリ表現をあたえる．

ところで，$\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)$ は $\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)$ で稠密であり，連続的に埋め込まれているので，命題3.2.13によって

$$\mathbf{Q}_\mathrm{E} = \mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^4) \tag{4.5.12}$$

ととれる．**以後，本章を通して，このように $\mathbf{Q}_\mathrm{E}$ をとる**．このようにとる利点のひとつは，$\mathbf{Q}_\mathrm{E}$ の各点に Euclid 群の作用があたえられるということである．すなわち $\alpha\in\mathbf{E}^4$ があたえられたとき，$T\in\mathbf{Q}_\mathrm{E}$ の変換 $\hat{u}_\alpha T\in\mathbf{Q}_\mathrm{E}$ を

$$\hat{u}_\alpha T(f) = T(u_\alpha^{-1}f), \qquad f\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4) \tag{4.5.13}$$

によって定義する．$\mathbf{Q}_\mathrm{E}$ 上の変換 $\hat{u}_\alpha$ に対応して，測度 $d\mu_{0,\mathrm{E}}$ の変換が考えられるが，$d\mu_{0,\mathrm{E}}$ は，この変換に対して不変である：

命題 4.5.4　任意の可測集合 $A \subset \mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ に対して

$$\mu_{0,\mathrm{E}}(\hat{u}_\alpha[A]) = \mu_{0,\mathrm{E}}(A), \qquad \alpha \in \mathbf{E}^4. \tag{4.5.14}$$

ここで，$\hat{u}_\alpha[A]$ は $\hat{u}_\alpha$ による A の像を表わす．

証明　$f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)$，$F \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ とし，

$$\tilde{F}(T) = F(\phi(f_1)(T), \cdots, \phi(f_n)(T)), \qquad T \in \mathbf{Q}_{\mathrm{E}},$$

とする．したがって，

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\hat{u}_\alpha T) &= F(\phi(f_1)(\hat{u}_\alpha T), \cdots, \phi(f_n)(\hat{u}_\alpha T)) \\ &= F(T(u_\alpha{}^{-1} f_1), \cdots, T(u_\alpha{}^{-1} f_n)) \\ &= F(\phi(u_\alpha{}^{-1} f_1)(T), \cdots, \phi(u_\alpha{}^{-1} f_n)(T)) \\ &= (\Gamma(u_\alpha{}^{-1})F)(\phi(f_1)(T), \cdots, \phi(f_n)(T)) \\ &= (U(\alpha)^{-1}F)(\phi(f_1)(T), \cdots, \phi(f_n)(T)).\end{aligned}$$

$U(\alpha)$ は $\mathscr{E}$ 上のユニタリ変換で，$U(\alpha)1 = 1, \alpha \in \mathbf{E}^4$ だから

$$\begin{aligned}\int \tilde{F}(\hat{u}_\alpha T) d\mu_{0,\mathrm{E}}(T) &= \langle 1, U(\alpha)^{-1}\tilde{F} \rangle_{\mathscr{E}} \\ &= \langle U(\alpha)1, \tilde{F} \rangle_{\mathscr{E}} \\ &= \int \tilde{F}(T) d\mu_{0,\mathrm{E}}(T).\end{aligned}$$

$\tilde{F}$ のような形の関数全体は $\mathscr{E}$ で稠密だから（補題 3.2.9），任意の可測集合 $A \subset \mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ の定義関数 χ_A で $\tilde{F}$ を置き換えた式を得ることができる．すなわち，(4.5.14) が成立する．■

命題4.5.4は $\{\hat{u}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{E}^4\}$ が $(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ 上の保測変換であることを示しているが，さらに次のことがいえる：

命題 4.5.5　$a \in \mathbf{R}^4$ による並進に対する (4.5.13) の $\hat{u}_\alpha$ を $\hat{u}_a$ と書く．このとき $\{\hat{u}_a \mid a \in \mathbf{R}^4\}$ は，エルゴード的に作用する．すなわち，すべての $\hat{u}_a$ によって不変な集合はほとんどいたるところ $\mathbf{Q}_E$ か空集合である．

証明

$$\Gamma(u_a) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) : = : \phi(u_a f_1) \cdots \phi(u_a f_n) :$$

であるから

$$I_a \equiv \langle : \phi(g_1) \cdots \phi(g_n) : \Gamma(u_a) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) : \rangle$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{\pi\in\mathcal{P}_n}\langle g_1, u_a f_{\pi(1)}\rangle_{-1}\cdots\langle g_n, u_a f_{\pi(n)}\rangle_{-1}.$$

一方,

$$\langle g, u_a f\rangle_{-1}=2\int\frac{\overline{\hat{g}(p)}\hat{f}(p)e^{-iap}}{p^2+m^2}dp, \qquad f, g\in \mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4),$$

であり, $|\overline{\hat{g}(p)}\hat{f}(p)/(p^2+m^2)|$ は可積分だから, Riemann-Lebesgue の定理によって

$$\lim_{a\to\infty}\langle g, u_a f\rangle_{-1}=0.$$

したがって,

$$\lim_{a\to\infty} I_a=0.$$

$\Gamma(u_a)$ は $\Gamma_n(\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4))$ を不変にしており,

$$\mathcal{E}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\Gamma_n(\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4))$$

だったから, $\Gamma_0(\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4))^{\perp}$ 上で

$$\text{w-}\lim_{a\to\infty}\Gamma(u_a)=0$$

となる. ただし, w-lim は $\mathcal{E}$ における弱収束を表わす. したがって

$$\text{w-}\lim_{a\to\infty}\Gamma(u_a)\Psi=\langle 1, \Psi\rangle_{\mathcal{E}}1, \qquad \Psi\in\mathcal{E}$$

となる. そこで, いま, すべての $a\in\mathbf{R}^4$ に対して, ある可測な $A\subset\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ が不変, すなわち $\hat{u}_a[A]=A$ であるとしよう. このとき,

$$\chi_A(\hat{u}_a T)=\chi_A(T), \qquad T\in\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$$

であり,

$$\chi_A(\hat{u}_a T)=(\Gamma(u_{-a})\chi_A)(T)$$

だから, $\Psi=\chi_A$ として, 上の結果を用いると

$$\int{\chi_A}^2 d\mu_{0,\mathrm{E}}=\left(\int\chi_A d\mu_{0,\mathrm{E}}\right)^2.$$

すなわち,

$$\mu_{0,\mathrm{E}}(A)=\mu_{0,\mathrm{E}}(A)^2.$$

ゆえに $\mu_{0,\mathrm{E}}(A)=1$ または0であるから，零集合の違いを除いて，$A=\mathbf{Q}_\mathrm{E}$ または $A=$ 空集合となる．∎

4.6 Feynman-Kac-Nelson (FKN) の公式

Wightman 超関数と Schwinger 関数は，公理論的なレベルでは，解析接続を通してつながっているわけであるが，具体的なモデルでは，それらの関係はもっとよく目に見えてしかるべきである．そこで，自由場の Wightman 超関数と Schwinger 関数との直接的な関係を導こう．

まず，準備として，実 Hilbert 空間 $\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ と $\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)$ との関係を調べる．各 $t\in\mathbf{R}$ に対して $\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ から $\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)$ への演算子 j_t を

$$j_t f=\delta_t\otimes f,\qquad f\in\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3) \tag{4.6.1}$$

によって定義する．ここで，$\delta_t\in\mathscr{S}_r{}'(\mathbf{R}^1)$ は

$$\delta_t(\tau)=\delta(t-\tau),\qquad \tau\in\mathbf{R}^1 \tag{4.6.2}$$

によってあたえられる．以後，しばしば，

$$\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)=\mathsf{H}_{-1/2},\qquad \mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^4)=\mathsf{H}_{-1}$$

と略記する．

命題 4.6.1 各 $t\in\mathbf{R}$ に対して，j_t は $\mathsf{H}_{-1/2}$ から H_{-1} の中への等距離演算子である．すなわち，すべての $f\in\mathsf{H}_{-1/2}$ に対して

$$\|j_t f\|_{-1}=\|f\|_{-1/2} \tag{4.6.3}$$

がなりたつ．

証明

$$(j_t f)^\wedge(p^0,\boldsymbol{p})=(2\pi)^{-1/2}\hat{f}(\boldsymbol{p})\exp[-itp^0]$$

であるから，

$$\begin{aligned}\|j_t f\|_{-1}{}^2&=\frac{1}{\pi}\int\frac{|\hat{f}(\boldsymbol{p})|^2}{p^2+m^2}d^4p\\&=\int\frac{|\hat{f}(\boldsymbol{p})|^2}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}}d^3\boldsymbol{p}\\&=\|f\|_{-1/2}.\end{aligned}$$

ここで，公式 (4.5.4) を用いた．∎

次に，演算子 j_t に付随するいくつかの性質を調べよう．命題4.6.1によって，j_t の値域 $\mathsf{R}(j_t)$ は H_{-1} の閉部分空間である．そこで

定義 4.6.2　H_{-1} から $\mathsf{R}(j_t)$ の上への射影演算子を e_t とする．

命題 4.6.3

（1）　$j_t{}^*j_t=1$;　　$j_tj_t{}^*=e_t$.　　(4.6.4)

（2）　$u_tj_\tau=j_{t+\tau}$　　(4.6.5)

ただし，u_t は，$\alpha=(t,\mathbf{0})\in\mathbf{R}^4$（'時間方向' への並進）に対する u_α とする．

（3）　$j_t{}^*j_\tau=\exp[-|t-\tau|\hat{\omega}]$　　(4.6.6)

ここで，演算子 $\hat{\omega}$ は (4.4.3) によって定義されるものである．

（4）　$t_1\leqslant t_2\leqslant t_3$ ならば

$$e_{t_1}e_{t_2}e_{t_3}=e_{t_1}e_{t_3}. \tag{4.6.7}$$

証明　(4.6.4) は j_t が $\mathsf{H}_{-1/2}$ から H_{-1} の中への等距離演算子であることの表現にほかならない．(4.6.5) は明らか．(4.6.6) は次のようにして得られる：

$f,g\in\mathsf{H}_{-1/2}$ とすれば，

$$\begin{aligned}&\langle j_tf,j_\tau g\rangle_{-1}\\&=\frac{1}{\pi}\int\frac{\overline{\hat{f}(p)}\hat{g}(p)e^{ip^0(t-\tau)}}{p^2+m^2}d^4p\\&=\int\frac{\overline{\hat{f}(\boldsymbol{p})}\hat{g}(\boldsymbol{p})e^{-|t-\tau|\omega(\boldsymbol{p})}}{\omega(\boldsymbol{p})}d^3\boldsymbol{p}\\&=\langle f,e^{-|t-\tau|\hat{\omega}}g\rangle_{-1/2}\end{aligned}$$

ここで，公式 (4.5.4) を用いた．

$$\langle j_tf,j_\tau g\rangle_{-1}=\langle f,j_t{}^*j_\tau g\rangle_{-1/2}$$

だから，(4.6.6) を得る．(4.6.4) と (4.6.6) を使うと，$t_1\leqslant t_2\leqslant t_3$ のとき，

$$\begin{aligned}e_{t_1}e_{t_2}e_{t_3}&=j_{t_1}j_{t_1}{}^*j_{t_2}j_{t_2}{}^*j_{t_3}j_{t_3}{}^*\\&=j_{t_1}e^{-(t_2-t_1)\hat{\omega}}e^{-(t_3-t_2)\hat{\omega}}j_{t_3}{}^*\\&=j_{t_1}e^{-(t_3-t_1)\hat{\omega}}j_{t_3}{}^*\end{aligned}$$

$$= j_{t_1} j_{t_1}{}^* j_{t_3} j_{t_3}{}^*$$
$$= e_{t_1} e_{t_3}.$$

すなわち，(4.6.7) を得る．■

定義 4.6.4 領域

$$\{(x^0, \boldsymbol{x}) \mid a \leqslant x^0 \leqslant b, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3\}$$

に台をもつ H_{-1} の元から生成される閉部分空間への射影を $e_{[a,b]}$ とする．

命題 4.6.5

(1) $\mathsf{R}(e_t)$ は，超平面

$$\{(x^0, \boldsymbol{x}) \mid x^0 = t, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3\}$$

に台をもつ H_{-1} の元からなる閉部分空間であり，任意の $f \in \mathsf{R}(e_t)$ は，

$$f = \delta_t \otimes g, \qquad g \in \mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$$

と表わされる．

(2) r を超平面 $t=0$ に関する鏡映とする．このとき u_r は $\mathsf{R}(e_0)$ を各点ごとに不変にする．すなわち，$f \in \mathsf{R}(e_0)$ ならば

$$(u_r f)(x) = f(x), \qquad x \in \mathbf{R}^4.$$

(3)

$$\{f \mid f \in \mathsf{R}(e_t), a < t < b\}$$

の，H_{-1} のノルムによる閉包は $\mathsf{R}(e_{[a,b]})$ である．

(4) $a \leqslant b \leqslant t \leqslant c \leqslant d$ ならば

$$e_{[a,b]} e_t e_{[c,d]} = e_{[a,b]} e_{[c,d]}.$$

証明

(1)

$$\{(x^0, \boldsymbol{x}) \mid x^0 = t, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3\}$$

に台をもつ $f \in \mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^4)$ は

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} g_j(\boldsymbol{x}) \delta^{(j)}(x^0 - t)$$

という形に表わされる（たとえば，Gel'fand and Shilov (1968)，第2章4.5節参照)．ただし，$g_j \in \mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^3)$ で，$\delta^{(j)}(t)$ は δ 関数の j 階の導関数，n は有

限の自然数である．したがって

$$\hat{f}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{n}\hat{g}_j(\boldsymbol{p})(ip^0)^j e^{-ip^0t}.$$

これから，$f\in \mathsf{H}_{-1}$ であるためには，

$$n=0 \quad \text{かつ} \quad g_0\in \mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$$

が必要十分であることがわかる．ゆえに，$f\in \mathsf{R}(e_{[t,t]})$ であるならば，ある $g\in \mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ が存在して，$f=\delta_t\otimes g$ となること，したがって，$f\in \mathsf{R}(e_t)$ が示せた．よって，

$$\mathsf{R}(e_{[t,t]})\subset \mathsf{R}(e_t)$$

となる．一方，

$$\mathsf{R}(e_t)\subset \mathsf{R}(e_{[t,t]})$$

となることは容易にわかる（H_{-1} のノルムで $f_n\to f$ ならば，超関数の意味で $f_n\to f$ となることを使えばよい）．こうして，

$$\mathsf{R}(e_t)=\mathsf{R}(e_{[t,t]})$$

を得る．

（2） これは (1) から明らか．

（3） 概略だけを述べる．まず，

(a)
$$\mathsf{A}_1=\{f\in \mathsf{H}_{-1}\mid \operatorname{supp} f\subset\{x\in\mathbf{R}^4\mid a<x^0<b\}\}$$

は，$\mathsf{R}(e_{[a,b]})$ で稠密であることを示そう．これは，$f\in \mathsf{R}(e_{[a,b]})$ に対して，$\lambda\in(1,\infty)$ として

$$f_\lambda(x)=f(\lambda x^0+(1-\lambda)(a+b)/2,\, \boldsymbol{x})$$

を定義すれば，$f_\lambda\in \mathsf{A}_1$ であり，$\|f_\lambda-f\|_{-1}\to 0$ $(\lambda\to 1)$ となることからわかる．

次に

(b)
$$\mathsf{A}_2=\{f\in C^\infty(\mathbf{R}^4)\cap \mathsf{A}_1\}$$

は $\mathsf{R}(e_{[a,b]})$ で稠密であることを示そう．そのために，$\rho\in C_0^\infty(\mathbf{R}^4)$ で

$$\rho(x)\geqslant 0,\ \int\rho(x)dx=1, \qquad \operatorname{supp}\rho\subset\{x\in\mathbf{R}^4\mid |x|\leqslant 1\}$$

をみたす関数をとり，$\varepsilon>0$ として，$f\in \mathsf{A}_1$ に対して，関数

$$f_\varepsilon(x)=\int\rho_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

を考える．ただし，$\rho_\varepsilon(x)=\rho(x/\varepsilon)/\varepsilon^4$ である．このとき，一般論（たとえば，Reed and Simon (1975), §IV. 1）によって，$f_\varepsilon\in C^\infty(\mathbf{R}^4)$ となる．また，ε が十分小さければ $f_\varepsilon\in A_1$ となることもわかる．したがって，$f_\varepsilon\in A_2$. さらに Lebesgue の収束定理によって，

$$\|f_\varepsilon-f\|_{-1}\to 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

が示される．よって，A_2 は A_1 で稠密，ゆえに，(a) によって，(b) の主張がなりたつ．次に

(c) $m\neq 0$ のとき，

$$A_3=\{f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^4)\cap A_1\}$$

は $R(e_{[a,b]})$ で稠密であることを示す．それには，$\chi_n\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ で

$$\chi_n(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1 & |\boldsymbol{x}|\leqslant n\\ 0 & |\boldsymbol{x}|\geqslant n+1\end{cases}$$

$$0\leqslant\chi_n(\boldsymbol{x})\leqslant 1, \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3$$

をみたすものをとり，$f\in A_2$ に対して，

$$f_n(x)=\chi_n(\boldsymbol{x})f(x)$$

を考えればよい．このとき，$f_n\in A_3$ であり，

$$\|f_n-f\|_{-1}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

となることがわかる．すなわち，A_3 は A_2 で稠密，したがって，(b) によって，$R(e_{[a,b]})$ で稠密である．$m=0$ のときは

(c′) $A_3'=\{f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^4)\cap A_1 \mid \operatorname{supp}\hat{f}\subset\mathbf{R}^4\setminus\{0\}\}$

は $R(e_{[a,b]})$ で稠密であることが，上と同様にして示される．

最後に

(d) A_3 ($m=0$ のときは，A_3') の任意の元は，$R(e_t)$ $(a<t<b)$ の元の線形一次結合の，H_{-1} のノルムでの極限となっていることを示す．もし，これを認めれば，(c)（$m=0$ のときは (c′)）によって，証明が完結する．(d) を示すには，$f\in A_3$ に対して，

$$f_n(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n}\delta\left(x^0-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n},\boldsymbol{x}\right)$$

をつくる．このとき，f_n は $R(e_t)$ $(a<t<b)$ の元の線形一次結合であり，

$$\hat{f}_n(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}, \boldsymbol{p}\right) \frac{e^{-ikp^0/n}}{\sqrt{2\pi}}$$

となる．ただし，

$$g\left(\frac{k}{n}, \boldsymbol{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int f\left(\frac{k}{n}, \boldsymbol{x}\right) e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x}.$$

任意の自然数 N に対して，ある定数 c_N が存在して

$$|\hat{f}_n(p)| \leqslant \frac{c_N}{(\boldsymbol{p}^2+1)^N}$$

となることが示せる．また，各 p に対して，

$$\hat{f}_n(p) \to \hat{f}(p) \qquad (n \to \infty)$$

となる．したがって，Lebesgue の収束定理によって，

$$\|f_n - f\|_{-1} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる．よって，(d) の主張が証明された．

（4） $\mathrm{R}(e_t)$ の完全正規直交系を $\{\varphi_n{}^{(t)}\}_n$ とすれば，(3) によって，任意の $f \in \mathrm{H}_{-1}$ に対して

$$\begin{aligned} e_{[a,b]} f &= \sum_{a<t<b} \sum_{n(t)} (\varphi_{n(t)}{}^{(t)}, e_{[a,b]} f) \varphi_{n(t)}{}^{(t)} \\ &= \sum_{a<t<b} \sum_{n(t)} (\varphi_{n(t)}{}^{(t)}, f) \varphi_{n(t)}{}^{(t)} \end{aligned}$$

という形に表わされる．したがって，

$$\begin{aligned} &e_{[a,b]} e_t e_{[c,d]} f \\ &= \sum_{\substack{a<\tau<b \\ c<\sigma<d}} \sum_{\substack{n(\tau) \\ n(\sigma)}} (\varphi_{n(\tau)}{}^{(\tau)}, e_t \varphi_{n(\sigma)}{}^{(\sigma)}) (\varphi_{n(\sigma)}{}^{(\sigma)}, f) \varphi_{n(\tau)}{}^{(\tau)} \end{aligned} \qquad (4.6.8)$$

となる．しかし，

$$\varphi_{n(\tau)}{}^{(\tau)} = e_\tau \varphi_{n(\tau)}{}^{(\tau)}, \qquad \varphi_{n(\sigma)}{}^{(\sigma)} = e_\sigma \varphi_{n(\sigma)}{}^{(\sigma)}$$

で，$\tau \leqslant t \leqslant \sigma$ によって，

$$e_\tau e_t e_\sigma = e_\tau e_\sigma \qquad (\text{命題} 4.6.3(4))$$

となるから，(4.6.8) において，e_t はなくてもよい．したがって，(4.6.8) の右辺は $e_{[a,b]} e_{[c,d]} f$ となる．■

以後，本章を通して，$\mathcal{F} = \mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_\mathrm{F}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ とおく．

演算子 $j_t, e_t, e_{[a,b]}$ はいずれも縮小演算子だから，これに対応して，$\mathscr{F}$ から $\mathscr{E}$ への縮小演算子 J_t および $\mathscr{E}$ 上の縮小演算子 $E_t, E_{[a,b]}$ が定義される：

$$J_t = \Gamma(j_t) \tag{4.6.9}$$

$$E_t = \Gamma(e_t) \tag{4.6.10}$$

$$E_{[a,b]} = \Gamma(e_{[a,b]}) \tag{4.6.11}$$

ただし，演算子 $\Gamma(\cdot)$ は，3.1節に定義されている．

これらの演算子の性質を論じる前に，次の一般的な命題を証明しておこう．

命題 4.6.6 H を実 Hilbert 空間，K を H の閉部分空間，P を K 上への射影演算子としよう．Σ_{K} を $\{\phi_{\mathsf{H}}(f) \mid f \in \mathsf{K}\}$ によって生成される σ-加法族（すなわち，すべての $\phi_{\mathsf{H}}(f), f \in \mathsf{K}$ が可測となるような最小の σ-加法族），$\mathsf{L}^2\Sigma_{\mathsf{K}}$ を Σ_{K}-可測な $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ の関数の全体，$E\Sigma_{\mathsf{K}}$ を $\mathsf{L}^2\Sigma_{\mathsf{K}}$ 上への射影演算子とする．このとき，

$$E\Sigma_{\mathsf{K}} = \Gamma(P). \tag{4.6.12}$$

証明　簡単のため，$\phi_{\mathsf{H}}(f) = \phi(f)$ と記す．

$\{e_n\}_{n\geq 1}$ を K の完全正規直交系としよう．このとき，任意の $\psi \in \mathsf{R}[\Gamma(P)]$ は，

$$:\phi(e_1)^{n_1}\cdots\phi(e_k)^{n_k}:$$

という形のベクトルの有限一次結合の，$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ のノルムでの極限としてあたえられる．したがって，$\{\phi(e_n)\}_{n\geq 1}$ の多項式の極限となっている．ゆえに，

$$\mathsf{R}[\Gamma(P)] \subset \mathsf{L}^2\Sigma_{\mathsf{K}}$$

である．一方，$:\exp[i\phi(f)]:$ の展開式によって，$f \in \mathsf{K}$ ならば，

$$:\exp[i\phi(f)]: \in \mathsf{R}[\Gamma(P)].$$

したがって，

$$\exp[i\phi(f)] \in \mathsf{R}[\Gamma(P)].$$

次に $F \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ とすれば，

$$F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = (2\pi)^{-n/2}\int \hat{F}(t_1, \cdots, t_n)e^{i\phi\left(\sum_{j=1}^{n} t_j f_j\right)}dt_1\cdots dt_n$$

と書けるから（積分は，$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$-値の積分），

$$F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \in \mathsf{R}(\Gamma(P)), \qquad f_1, \cdots, f_n \in \mathsf{K},$$

となる．補題3.2.9によって，

$$\{F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\mid f_1,\cdots,f_n\in \mathsf{K}, F\in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), n\geqslant 1\}$$

は $\mathsf{L}^2\Sigma_{\mathsf{K}}$ で稠密であるから，結局，

$$\mathsf{L}^2\Sigma_{\mathsf{K}}\subset \mathsf{R}[\Gamma(P)]$$

となる．こうして，

$$\mathsf{L}^2\Sigma_{\mathsf{K}}= \mathsf{R}[\Gamma(P)]$$

を得る．$\Gamma(P)$ は射影演算子（すなわち，$\Gamma(P)^2=\Gamma(P), \Gamma(P)^*=\Gamma(P)$）であるから，(4.6.12) が成立する．∎

定理 4.6.7

（1）　$J_t{}^*J_t=1$，　$J_tJ_t{}^*=E_t$,

（2）　$U_tJ_\tau=J_{t+\tau}$.

ただし，$U_t=\Gamma(u_t)$ である．

（3）　$J_t{}^*J_\tau=\Gamma(e^{-|t-\tau|\hat{\omega}})=e^{-|t-\tau|H_0}$.

ただし，H_0 は $\mathscr{F}$ における自由場のハミルトニアンである (4.4節参照)：

$$H_0=d\Gamma(\hat{\omega}).\tag{4.6.13}$$

（4）　$\Sigma_{[a,b]}$ を $\{\phi(f)\mid f\in \mathsf{R}(e_{[a,b]})\}$ によって生成される σ-加法族としよう．このとき，$\Sigma_{[a,b]}$ に関して可測な $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ の関数の全体はちょうど $\mathsf{R}(E_{[a,b]})$ に等しい．さらに，$\Sigma_{[a,b]}$ はすべての $\phi\in\mathsf{R}(E_t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ が可測となるような最小の σ-加法族である．

（5）(Markov 性)　$a\leqslant b\leqslant t\leqslant c\leqslant d$ ならば，

$$E_{[a,b]}E_tE_{[c,d]}=E_{[a,b]}E_{[c,d]}.\tag{4.6.14}$$

証明　(1), (2), (3) はそれぞれ，命題4.6.3の (1), (2), (3) から，また，(5) は命題 4.6.5 の (4) から直接に導かれる．(4) の前半は，上に証明した命題4.6.6を $\mathsf{K}=\mathsf{R}(e_{[a,b]})$ として適用すればよい．後半は命題4.6.5 の (3) による．∎

さて，本節の目的とする定理に進もう．

定理 4.6.8 (自由場の FKN 公式)　$f_j\in \mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$，$j=1,2,\cdots$，で G_j を $\mathbf{R}^k$ 上の有界な可測関数とする．このとき，$t_0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n$ に対して

$$\langle \Omega_0,\ G_0{}^{\mathrm{F}} e^{-(t_1-t_0)H_0} G_1{}^{\mathrm{F}} e^{-(t_2-t_1)H_0} \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H_0} G_n{}^{\mathrm{F}} \Omega_0 \rangle$$

$$= \int d\mu_{0,\mathrm{E}}\, G_0{}^{t_0} \cdots G_n{}^{t_n}, \tag{4.6.15}$$

$$\langle \Omega_0,\ \phi_{\mathrm{F}}(f_1) e^{-(t_2-t_1)H_0} \phi_{\mathrm{F}}(f_2) \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H_0} \phi_{\mathrm{F}}(f_n) \Omega_0 \rangle$$

$$= \int d\mu_{0,\mathrm{E}}\, \phi(\delta_{t_1} \otimes f_1) \cdots \phi(\delta_{t_n} \otimes f_n). \tag{4.6.16}$$

ここで,

$$\Omega_0 \equiv 1 \in \mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}}), \tag{4.6.17}$$

$$G_j{}^{\mathrm{F}} = G_j(\phi_{\mathrm{F}}(f_1), \cdots, \phi_{\mathrm{F}}(f_k)), \tag{4.6.18}$$

$$G_j{}^{t_j} = G_j(\phi(\delta_{t_j} \otimes f_1), \cdots, \phi(\delta_{t_j} \otimes f_k)) \tag{4.6.19}$$

証明　$\mathcal{E} = \mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ における関数 1 を ω_0 と書くと，定理 4.6.7 (3) によって,

$$(4.6.15) \text{ の左辺} = \langle \omega_0, \tilde{G}_0{}^{t_0} \tilde{G}_1{}^{t_1} \cdots \tilde{G}_n{}^{t_n} \omega_0 \rangle$$

となる．ただし,

$$\tilde{G}_j{}^{t_j} = J_{t_j} G_j{}^{\mathrm{F}} J_{t_j}{}^*.$$

演算子 j_t の等距離性によって，任意の $f, f_1, \cdots, f_k \in \mathsf{H}_{-1/2}$ に対して

$$J_t : \phi_{\mathrm{F}}(f)^n :: \phi_{\mathrm{F}}(f_1) \cdots \phi_{\mathrm{F}}(f_k):$$

$$= : \phi(\delta_t \otimes f)^n :: \phi(\delta_t \otimes f_1) \cdots \phi(\delta_t \otimes f_k):$$

となる．したがって，演算子の等式として

$$J_t : \phi_{\mathrm{F}}(f)^n : J_t{}^* = E_t : \phi(\delta_t \otimes f)^n : E_t$$

を得る．これは,

$$J_t : e^{i\phi_{\mathrm{F}}(f)} : J_t{}^* = E_t : e^{i\phi(\delta_t \otimes f)} : E_t$$

をあたえる．$\phi_{\mathrm{F}}(f), \phi(\delta_t \otimes f)$ はともに G. R. V. だから,

$$J_t e^{i\phi_{\mathrm{F}}(f)} J_t{}^* = E_t e^{i\phi(\delta_t \otimes f)} E_t$$

となる．したがって，手始めに $G_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^k)$ とすれば,

$$G_j{}^{\mathrm{F}} = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{G}_j(t_1, \cdots, t_k) e^{i\phi_{\mathrm{F}}\left(\sum_{j=1}^k t_j f_j\right)} dt_1 \cdots dt_k$$

であるから,

$$\tilde{G}_j{}^{t_j} = E_{t_j} G_j{}^{t_j} E_{t_j}$$

を得る．したがって,

$$\begin{aligned}&\langle\omega_0,\ \tilde{G}_0{}^{t_0}\cdots\tilde{G}_n{}^{t_n}\omega_0\rangle\\&=\langle\omega_0,\ E_{t_0}G_0{}^{t_0}E_{t_0}E_{t_1}G_1{}^{t_1}E_{t_1}\cdots E_{t_n}G_n{}^{t_n}E_{t_n}\omega_0\rangle\\&=\langle E_{t_{j-1}}\bar{G}_{j-1}{}^{t_{j-1}}E_{t_{j-1}}\cdots E_{t_0}\omega_0,\ E_{t_j}G_j{}^{t_j}E_{t_j}\cdots E_{t_n}\omega_0\rangle.\end{aligned}\tag{4.6.20}$$

ベクトル $G_j{}^{t_j}E_{t_j}\cdots E_{t_n}\omega_0$ は $\mathsf{R}(E_{[t_j,t_n]})$ の元であり，$E_{t_{j-1}}\bar{G}_{j-1}{}^{t_{j-1}}\cdots E_{t_0}\omega_0$ は $\mathsf{R}(E_{[t_0,t_{j-1}]})$ の元であるから，上式において，

$$E_{t_j}=E_{[t_0,t_{j-1}]}E_{t_j}E_{[t_j,t_n]}$$

としてよい．これは，(4.6.14) によって，

$$E_{t_j}=E_{[t_0,t_{j-1}]}E_{[t_j,t_n]}$$

となる．これは，すべての t_j についてなりたつから，(4.6.20) において，E_{t_j} はすべて落としてよいことになる．したがって，(4.6.15) が得られる．

次に G_j が $\mathbf{R}^k$ 上の有界な関数であるときは，それを $\mathscr{S}(\mathbf{R}^k)$ の関数で近似して，いま得た結果を用い，Lebesgue の収束定理を適用することによって (4.6.15) を得ることができる．(4.6.16) は，

$$G_j(x)=x,\qquad x\in\mathbf{R},$$

を考えて，上の議論をくり返すことによって得られる．∎

上の定理について少し注意しておこう．

$$\phi_{\mathrm{F}}(t,f)\equiv e^{itH_0}\phi_{\mathrm{F}}(f)e^{-itH_0},\qquad f\in\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)\tag{4.6.21}$$

とおけば，これは，ちょうど，$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}},d\mu_{0,\mathrm{F}})$ での時刻 t の自由場である．

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}^3)\ni f\longmapsto\phi_{\mathrm{F}}(t,f)$$

は演算子値超関数であるから，記号的演算子 $\phi_{\mathrm{F}}(t,x)$ を

$$\phi_{\mathrm{F}}(t,f)=\int\phi_{\mathrm{F}}(t,x)f(x)dx\tag{4.6.22}$$

によって導入する．Euclid 場についても，

$$\phi(f)=\int\phi(x)f(x)d^4x,\qquad f\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^4)\tag{4.6.23}$$

によって，記号的な超確率変数 $\phi(x)$ を定義しよう．このとき，$f\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^3)$ に対しては

$$\phi(\delta_t\otimes f)=\int\phi(t,x)f(x)dx$$

である．公式 (4.6.16) を試験関数 (test function) $f_1, \cdots, f_n$ なしの形で書けば，$t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$ のとき，

$$\begin{aligned}&\langle \Omega_0,\ \phi_F(it_1, x_1) \cdots \phi_F(it_n, x_n)\Omega_0\rangle \\ &= \langle \omega_0,\ \phi(t_1, x_1) \cdots \phi(t_n, x_n)\omega_0\rangle \end{aligned} \tag{4.6.24}$$

となる．ただし，

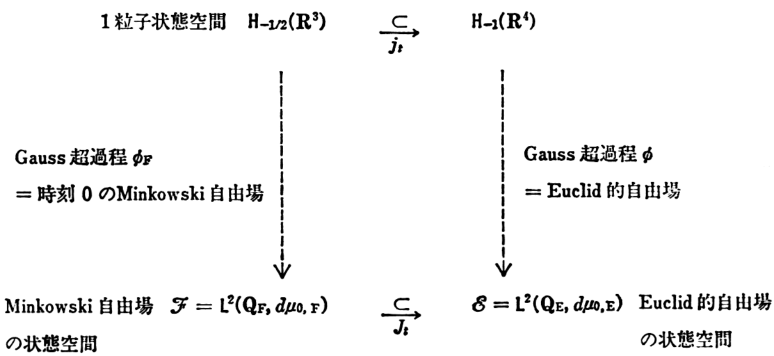
$$\omega_0 = 1 \in L^2(Q_E, d\mu_{0,E})$$

である．これは Minkowski 場 $\phi_F(t, x)$ と Fock 真空 Ω_0 および Euclid 場 $\phi(t, x)$ と Euclid 的真空 ω_0 との形式的な対応をあたえる：

$$\phi_F(it, x) \longleftrightarrow \phi(t, x)$$

$$\Omega_0 \longleftrightarrow \omega_0.$$

最後に，これまでに導入した空間の関係を図式的に示しておく．



4.7 L^p-不等式

Q_E 上の関数について $L^p(Q_E, d\mu_{0,E})$-ノルムでの評価を導く．そのために，その基礎となる定理 3.4.9 を少し変形しておこう：

定理 4.7.1 H を実 Hilbert 空間とし，A を H 上の縮小演算子とする．$p, q \in (1, \infty)$ が

$$\|A\|^2 \leqslant (p-1)(q-1) \leqslant 1$$

をみたすとしよう．このとき，

$$\left|\int_{\mathbf{Q}_{\mathrm{H}}} F(q)(\Gamma(A)G)(q)d\mu_{0,\mathrm{H}}\right| \leqslant \|F\|_q\|G\|_p. \tag{4.7.1}$$

ただし，$\| \ \|_p$ は $\mathrm{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{H}}, d\mu_{0,\mathrm{H}})$ のノルムを表わす．

証明　(4.7.1) の左辺を I とおくと，Hölder の不等式によって

$$|I| \leqslant \|F\|_q\|\Gamma(A)G\|_r.$$

ただし，

$$1/q+1/r=1, \qquad r\in(1,\infty).$$

このとき，

$$\|A\|^2 \leqslant \frac{p-1}{r-1} \leqslant 1$$

であるから，定理 3.4.9 が適用できて

$$\|\Gamma(A)G\|_r \leqslant \|G\|_p$$

となる．したがって，(4.7.1) を得る．∎

この定理の応用として，

定理 4.7.2　$a\leqslant b<c\leqslant d$ としよう．F, G を $\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ 上の関数とし，それぞれ，$\Sigma_{[a,b]}$-可測，$\Sigma_{[c,d]}$-可測とする．このとき，

$$1 \geqslant (pr^{-1}-1)(qr^{-1}-1) \geqslant e^{-2m(c-b)}, \qquad p,q>r \tag{4.7.2}$$

をみたす任意の $p,q\in(1,\infty)$，$r\in[1,\infty)$ に対して

$$\|FG\|_r \leqslant \|F\|_q\|G\|_p \tag{4.7.3}$$

がなりたつ．

証明

$$|F|^r=\tilde{F}, \qquad |G|^r=\tilde{G}$$

とおこう．このとき，$\tilde{F}$ は $\Sigma_{[a,b]}$-可測，$\tilde{G}$ は $\Sigma_{[c,d]}$-可測だから，

$$E_{[a,b]}\tilde{F}=\tilde{F},$$
$$E_{[c,d]}\tilde{G}=\tilde{G}.$$

したがって，$\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}})$ の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とすれば

$$\begin{aligned}\|FG\|_r{}^r &= \|\tilde{F}\tilde{G}\|_1\\ &= \langle\tilde{F},\tilde{G}\rangle\\ &= \langle\tilde{F},\ E_{[a,b]}E_{[c,d]}\tilde{G}\rangle\end{aligned}$$

$$= \langle \tilde{F},\ \Gamma(e_{[a,b]}e_{[c,d]})\tilde{G}\rangle.$$

一方，命題4.6.5によって

$$e_{[a,b]}e_{[c,d]} = e_{[a,b]}e_b e_c e_{[c,d]}$$

と書けるから，

$$\begin{aligned}\|e_{[a,b]}e_{[c,d]}\| &\leqslant \|e_b e_c\| \\ &\leqslant \|j_b{}^* j_c\| \\ &= e^{-m(c-b)}\end{aligned}$$

となる．ここで，命題4.6.3を用いた．したがって，

$$\tilde{p} = pr^{-1}, \qquad \tilde{q} = qr^{-1}$$

とおけば，仮定によって

$$\|e_{[a,b]}e_{[c,d]}\|^2 \leqslant (\tilde{p}-1)(\tilde{q}-1) \leqslant 1$$

となるので，定理4.7.1が適用できて，

$$\|FG\|_r{}^r \leqslant \|\tilde{F}\|_{\tilde{q}}\|\tilde{G}\|_{\tilde{p}} = \|F\|_q{}^r\|G\|_p{}^r$$

を得る．∎

定理4.7.2は，第9章で，空間切断した$(\phi^{2n})_2$モデルの相互作用ハミルトニアンを構成するために使われるが，ここで，定理4.7.2それ自体の意味に触れておこう．これは，異なる時空点での場の独立性に関連している．Euclid場は（超）確率変数であるから，その独立性は確率変数のそれとして定義するのが自然である．2つの確率変数f, gが独立であるとは，その同時分布がそれぞれの分布の積になっているときをいう．したがって，fとgが独立ならば，特に，

$$\langle fg\rangle = \langle f\rangle\langle g\rangle$$

がなりたつ．ただし，$\langle\cdot\rangle$は期待値である．

自由な Euclid 場の場合

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = S_2(x,y) \neq 0 = \langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle \qquad (x \neq y)$$

であるから，異なる時空点での場は独立ではない．しかし，(4.5.6)からわかるように，

$$S_2(x,y) \sim (\text{定数})|x-y|^{-3/2}e^{-m|x-y|} \qquad (|x-y| \to \infty)$$

となるから，遠く離れた2点x, yでの$\phi(x)$と$\phi(y)$は独立になる．

$\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ 上の確率変数 F, G がもし独立であれば，

$$\|FG\|_1 \leqslant \|F\|_1\|G\|_1$$

がなりたつ．しかし，一般には，Hölder の不等式による評価

$$\|FG\|_1 \leqslant \|F\|_q\|G\|_p, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \ p, q \in (1, \infty) \tag{4.7.4}$$

ぐらいしか期待できない．それでも，p, q **両方が** 1 に近ければ，F と G は独立的であると考えてよいであろう．すなわち，(4.7.4) 型の評価式において，(p, q) の $(1, 1)$ への近さを F と G の独立性のひとつの尺度と考えることができる．この観点からいうと，定理 4.7.2 は，$c-b$ が大きくなればなるほど，$\Sigma_{[a,b]}$-可測な関数と $\Sigma_{[c,d]}$-可測な関数とは独立性を増すということを示しており，仮定の不等式 (4.7.2) がその独立性の定量的評価をあたえているといえる．

4.8　一般化された自由場

これまで議論してきた，質量 m の自由場の一般化を考えよう．その基本になるのは，自由場の n 点 Wightman 超関数（あるいは n 点 Schwinger 関数）の単純な構造（定理 4.2.2，定理 4.5.1）に注目することである．実際，それらは Lorentz 不変性などいくつかの性質をもつ 2 点 Wightman 超関数の組み合せで書ける．そこでまず，2 点 Wightman 超関数のもつ性質を抽象化する．

$\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4$ 上の超関数 $D_+(x, y)$ が次の性質をもつとしよう：

（1）**並進不変性**　$D_+(x, y)$ は $x-y$ のみに依存する：

$$D_+(x, y) \equiv D_+(x-y)$$

（2）**Lorentz 不変性**　すべての $\Lambda \in \mathsf{L}_+^\uparrow$ に対して

$$D_+(\Lambda x) = D_+(x)$$

（3）**スペクトル条件**　$D_+(x)$ の Fourier 変換 $\hat{D}_+$ は $\overline{\mathbf{V}^+}$ に台をもつ．

（4）**正値性**　すべての $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ に対して

$$\iint \overline{f(x)} D_+(x-y) f(y)\, dx dy \geqslant 0.$$

(5) **局所性** x が空間的，すなわち $(x,x)\leqslant 0$ ならば

$$D_+(x)\equiv D_+(-x).$$

(6) **クラスター性** x が空間的ならば，

$$\lim_{\lambda\to\infty} D_+(\lambda x)=0.$$

質量 m の自由場の 2 点 Wightman 超関数 $\varDelta_{m^2}{}^{(+)}$ は上記の (1)～(6) の性質をすべてもつ．なぜなら，(1)～(6) は，Wightman の公理を 2 点 Wightman 超関数に制限したものにほかならないからである．

以下では，上記のうち (5) 以外を公理として出発する．そこから (5) は証明されるからである．

上記 (1)～(4), (6) の性質をもつ超関数は，次のような表示をもつ：

定理 4.8.1 (Umezawa-Kamefuchi-Källen-Lehmann 表示) (1)～(4), (6) の性質をもつ任意の超関数 D_+ は次の形に書ける：

$$D_+(x)=\frac{1}{i}\int_0^\infty \varDelta_m{}^{(+)}(x)d\rho(m^2)$$

ただし，ρ は $[0,\infty)$ 上の多項式的に有界な単調非減少関数である．

証明 概略だけを述べる．D_+ の正値性と Bochner-Schwartz の定理*) によって

$$D_+(x)=\int_{\mathbf{R}^4} e^{-i(x,p)}d\mu(p)$$

となる多項式的に有界な測度 μ が存在する．D_+ の Lorentz 不変性によって μ は Lorentz 不変であり，またスペクトル条件によって，μ の台は $\overline{\mathbf{V}^+}$ の中にある．したがって，$[0,\infty)$ 上の測度 ρ と定数 c とが存在して，すべての $f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}^4} fd\mu=cf(0)+\frac{1}{2(2\pi)^3}\int_0^\infty\left(\int_{\mathbf{V}_m^+} fd\mu_m\right)d\rho(m^2)$$

となる (Reed and Simon (1975)，定理 IX. 33)．

これは，極めて粗くいうと，次のように読める：μ は Lorentz 不変で台が

---

*) Reed and Simon (1975), § IX. 2 を参照．

$\overline{V^+}$ の中にあるから，μ を V_m^+ に制限した測度も Lorentz 不変である．しかし，V_m^+ 上の Lorentz 不変な測度は定数倍をのぞいて μ_m しかない*)ので，μ は，μ_m の適当な重みをつけた和（積分）で表わされる．

したがって，超関数の意味で

$$D_+(x) = c + \frac{1}{i}\int_0^\infty \varDelta_{m^2}{}^{(+)}(x) d\rho(m^2)$$

となる．ところが，x が空間的のとき，

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \varDelta_m{}^{(+)}(\lambda x) = 0$$

であるから，(6) と合わせて，$c=0$ を得る．∎

x が空間的ならば，

$$\varDelta_m{}^{(+)}(x) = \varDelta_m{}^{(+)}(-x)$$

がなりたつので，上記の '(5) 局所性' が得られる．

なお，

$$d\rho(m^2) = \delta(m^2 - m_0{}^2) dm^2$$

となる場合に，D_+ は，質量 m_0 の自由場の2点 Wightman 超関数をあたえる．

性質 (1)～(6) をもつ超関数 D_+ があたえられたとき，これから，$\mathbf{R}^{4n}$ 上の超関数 $D_n, (n=3,4,\cdots)$ を

$$D_{2n+1}(x_1, \cdots, x_{2n+1}) = 0, \tag{4.8.1}$$

$$D_{2n}(x_1, \cdots, x_{2n}) = \sum_{\text{comb}} D_+(x_{i_1}, x_{j_1})\cdots D_+(x_{i_n}, x_{j_n}) \tag{4.8.2}$$

によって定義する．このとき，次の定理を得る：

定理 4.8.2　$D_0 \equiv 1$ とする．このとき，超関数列 $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ は，Wightman の公理をすべてみたす．

証明の概略だけを述べる．Lorentz 不変な測度

$$d\mu(p) = 2\int_0^\infty \delta((p,p) - m^2)\theta(p^0) d\rho(m^2) d^4p$$

*) Reed and Simon (1975), § IX. 8, 付録に証明がある．

を定義し，Hilbert 空間

$$\tilde{\mathsf{H}} = \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^4, d\mu(p))$$

を考える．$\tilde{\mathsf{H}}$ を一粒子空間とする Fock 空間 $\tilde{\mathscr{F}}$ をつくり，場の演算子

$$\tilde{\Phi}(f) \equiv \sqrt{\pi}\,[A^\dagger(\hat{\bar{f}}) + A(\hat{f})], \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^4)$$

を定義する．このとき，$\tilde{\Phi}(\cdot)$ の積の真空期待値は，超関数 $\{D_n\}$ をあたえる．したがって，$\tilde{\Phi}(\cdot)$ が Gårding-Wightman の公理をみたすことを示すことにより，定理が証明される．詳細は読者の演習とする．

注意：正値性の公理（W3）（第2章参照）以外は定義 (4.8.1), (4.8.2) から直接に確かめることもできる．

超関数列 $\{D_n\}$ で定義される場のモデルは，**一般化された自由場**（generalized free field）とよばれる．その理由は，このモデルが粒子の散乱に相当するものをもたないからであって，つまり，このモデルは物理的にトリヴィアルなのである．一般化された自由場の物理的内容については，Greenberg (1961) を参照せよ．

●演習問題

4.1 $\mathsf{R}(E)$ は $\mathsf{L}^2(\mathbf{V}_m{}^+, d\mu_m)$ で稠密であることを示せ．

4.2 測度 $d\mu_m$ の固有 Lorentz 変換に関する不変性を示せ．

4.3 演算子 $u(a, \Lambda)$ の (a, Λ) についての強連続性を示せ．

注：$\mathsf{L}^2(\mathbf{V}_m{}^+, d\mu_m)$ で稠密な部分空間の上で示せば十分である．

4.4 $\Delta^{(+)}{}_m(x)$ の Lorentz 不変性を示せ．

4.5 次の式がなりたつことを示せ．

$$(\Box + m^2)\Delta_m(x) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\Delta_m(x)\right|_{t=0} = \delta^3(x).$$

4.6 一般に $\mathbf{R}^{s+1}$ における（自由）場 Φ に対して

$$\int_{\mathbf{R}^s} :\Phi(x_0, x)^n: f(x)\,dx, \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^s)$$

が Fock 空間の演算子として意味をもつのは，自然数 s, n がどんな範囲にあるとき

か？　また

$$\int_{\mathbf{R}^{s+1}} :\Phi(x)^n: g(x)dx, \qquad g\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^{s+1})$$

ではどうか？

●文献

Greenberg (1961), Generalized free fields and models of local field theory, Ann. Phys. **16,** 158–176.

Guerra, F., L. Rosen and B. Simon (1975), the $P(\phi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics, Ann. Math. **101,** 111–259.

Lévy, M. ed. (1967), *High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory*, Gordon and Breach, New York.

Naimark, M. A. (1964), *Linear Representations of the Lorentz group*, Pergamon, London.

大貫義郎 (1979),『ポアンカレ群と波動方程式』, 岩波書店.

Reed, M. and B. Simon (1975), *Methods of Modern Mathematical Physics II, Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York.

Simon, B. (1974), *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, Princeton.

Wightman, A. S. (1967), Introduction to some aspects of the relativistic dynamics of quantized fields, *in* Lévy (1967).

第5章

格子スピン系の統計力学

格子スピン系の統計力学の一般的な枠組を設定する．古典統計力学としての Euclid 的場の量子論へのつながりを念頭において，古典的な格子スピン系のみを考える．

5.1 基本的な数学的枠組

$\mathbf{Z}^\nu$ ($\nu=1,2,\cdots$) を ν 次元の単純立方格子の空間とする*)．その各格子点は自然な仕方で $i=(i_1,\cdots,i_\nu)$, $i_l\in\mathbf{Z}$ によって表わされる．古典的な格子スピン系は，$\mathbf{Z}^\nu$ の各点に，‘スピン’とよばれる確率変数が付随している力学系であり，その標本空間をスピンの配位空間 (configuration space) とよぶ．したがって，古典的な格子スピン系の記述には，まず，各 $i\in\mathbf{Z}^\nu$ に対するスピンの配位空間 Ω_i を用意しなければならない．ここでは，簡単のため，すべての Ω_i は同じものとし**)，ある固定された可分なコンパクト Hausdorff 空間 $\mathbf{S}$ のコピーであるとする：

$$\Omega_i=\mathbf{S},\qquad i\in\mathbf{Z}^\nu. \tag{5.1.1}$$

$\mathbf{S}$ 上には確率測度 $d\mu_0$ があたえられていると仮定する．$d\mu_0$ は単独のスピンの確率分布を表わす．物理的に興味ある系では，$\mathbf{S}\subseteq\dot{\mathbf{R}}^N$ ($\mathbf{R}^N$ に対する Alexandroff のコンパクト化）である．後の例を見よ．

$\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ を $\mathbf{Z}^\nu$ の有界な部分集合の全体とし，$\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に対して

$$\Omega_\Lambda=\bigtimes_{i\in\Lambda}\Omega_i \tag{5.1.2}$$

---

*) より一般的な格子空間で考えることもできる．

**) 各 Ω_i がちがう場合も考えられる．

とし，

$$\mathsf{A}_\Lambda = \mathsf{C}(\Omega_\Lambda) \qquad (\Omega_\Lambda \text{ 上の連続関数全体}) \tag{5.1.3}$$

を考える．$A \in \mathsf{A}_\Lambda$ に対して

$$\|A\|_\Lambda = \sup_{\omega \in \Omega_\Lambda} |A(\omega)|$$

によって，A のノルム $\|A\|_\Lambda$ を定義し，

$$A^*(\omega) = \overline{A(\omega)} \quad (\text{複素共役})$$

によって対合（involution）'*' を定義すれば，A_Λ は（可換）C^*-代数をなす*)．

$\Lambda \subset \Lambda'$ ($\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$) ならば，明らかな仕方で，$\mathsf{A}_\Lambda \subset \mathsf{A}_{\Lambda'}$ とみなすことができる．以後，この同一視は断りなしに用いる．

$a \in \mathbf{Z}^\nu$ に対して，Λ の平行移動 $\Lambda + a$ を

$$\Lambda + a = \{n + a \mid n \in \Lambda\} \tag{5.1.4}$$

で定義する．また，スピンの配位 $\omega = (\omega_i)_{i \in \Lambda} \in \Omega_\Lambda$ に対して，その平行移動 $\tau_a \omega \in \Omega_{\Lambda + a}$ を

$$(\tau_a \omega)_i = \omega_{i-a}, \qquad i \in \Lambda + a$$

によって定義する．すると τ_a は A_Λ から $\mathsf{A}_{\Lambda+a}$ への写像 $\hat{\tau}_a$ を誘導する：

$$(\hat{\tau}_a A)(\omega) \equiv A(\tau_a^{-1} \omega), \qquad A \in \mathsf{A}_\Lambda, \qquad \omega \in \Omega_{\Lambda + a}. \tag{5.1.5}$$

$\hat{\tau}_a$ は A_Λ と $\mathsf{A}_{\Lambda+a}$ との同型対応をあたえる．以後，$\hat{\tau}_a$ も τ_a と書く．

*-代数

$$\mathsf{A}^{\mathrm{F}} \equiv \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)} \mathsf{A}_\Lambda \tag{5.1.6}$$

は**局所観測量の代数**（algebra of local observables）とよばれる．$A \in \mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ ならば，$A \in \mathsf{A}_\Lambda$ となる $\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ があるから，$\|A\| = \|A\|_\Lambda$ によって，A のノルム $\|A\|$ を定義することができる（実際，$\|A\|$ は $A \in \mathsf{A}_\Lambda$ となるような Λ の選び方によらない）．このノルムによる A^{F} の完備化を A とすれば，

$$\mathsf{A} = \mathsf{C}(\Omega) \tag{5.1.7}$$

となる**)．ただし，

---

*)　C^*-代数については，たとえば，Bratteli and Robinson (1979) などを参照．本書を理解するには，C^*-代数について，江沢 (1978) の程度の知識で十分である．

**)　これは，Stone-Weierstrass の定理（たとえば，Reed and Simon (1972) の4章）による．

$$\Omega = \bigtimes_{i \in \mathbf{Z}^\nu} \Omega_i. \tag{5.1.8}$$

Tychonoff の定理によって，Ω はコンパクト Hausdorff 空間である．C^*-代数 A は，完備化のため，その元が局所的とは限らず尾を引くこともあるので，**準局所観測量の代数** (algebra of quasi-local observables) とよぶ．

定義 5.1.1 A 上の正値線形汎関数 ρ で規格化条件 $\rho(1) = 1$ をみたすものを **A 上の状態** (state) とよぶ．A 上の状態の集合を A_+^* と書く*)．

A_+^* の任意の元 ρ は，実は有界である．さらに A_+^* は凸集合であり，汎弱位相 (weak ∗-topology) でコンパクトである．これは容易に確かめられる (問題 5.1)．

Riesz-Markov の定理**)によれば，$\rho \in A_+^*$ に対して，Ω 上の規格化された Baire 測度 μ がただひとつ存在して

$$\rho(A) = \int_\Omega A d\mu, \qquad A \in \mathrm{A} \tag{5.1.9}$$

と表現される．逆に，Ω 上の規格化された Baire 測度 μ があたえられたとき，(5.1.9) の右辺によって ρ を定義すれば，$\rho \in A_+^*$ となることは明らか．ゆえに，A_+^* と Ω 上の規格化された Baire 測度の全体は 1 対 1 に対応する．この意味で，A 上の状態は Ω 上の規格化された Baire 測度であると考えることができる．

さて，$A \in \mathrm{A}^F$ とすると，ある $\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ が存在して，$A \in \mathrm{A}_\Lambda$ である．したがって，任意の $A \in \mathrm{A}^F$ に対して，$\tau_a A$ $(a \in \mathbf{Z}^\nu)$ を (5.1.5) によって定義することができ，τ_a は A^F から A^F の上への等距離写像をあたえる．ゆえに，τ_a は A 上の自己同型写像に一意的に拡張される．しかも，任意の $a, b \in \mathbf{Z}^\nu$ に対して，$\tau_{a+b} = \tau_a \tau_b$ となるので，$\{\tau_a \mid a \in \mathbf{Z}^\nu\}$ は $\mathbf{Z}^\nu$ 上の並進群の A 上での表現となっている．

定義 5.1.2 $\rho \in A_+^*$ が

$$\rho(\tau_a A) = \rho(A), \qquad A \in \mathrm{A}, \qquad a \in \mathbf{Z}^\nu$$

*) ρ が正値であるとは，$A \geqslant 0$ なるすべての $A \in \mathrm{A}$ に対して $\rho(A) \geqslant 0$ となることである．

**) Reed and Simon (1972) の定理 IV. 14.

をみたすとき，ρ は**並進不変な状態** (translation-invariant state) であるという．

$\rho\in \mathsf{A}_+{}^*$ の A_Λ への制限 $\rho\restriction \mathsf{A}_\Lambda$ は，A_Λ 上の正値線形汎関数をあたえる．

定義 5.1.3

$$\mathbf{E}^I=\left\{\rho\in\mathsf{A}_+{}^*\;\middle|\;\begin{array}{l}\rho\text{ は並進不変かつ任意の有界な }\Lambda\\ \text{に対して }\rho\restriction\mathsf{A}_\Lambda\text{ に対応する測度}\\ \text{が }d\mu_\Lambda\text{ について絶対連続}\end{array}\right\}$$

ここで

$$d\mu_\Lambda=\prod_{i\in\Lambda}d\mu_i,\qquad d\mu_i\equiv d\mu_0,\qquad i\in\mathbf{Z}^\nu.$$

定義によって，$\rho\in\mathbf{E}^I$ ならば，

$$\rho(A)=\int_{\Omega_\Lambda}\rho_\Lambda A d\mu_\Lambda,\qquad A\in\mathsf{A}_\Lambda \tag{5.1.10}$$

と書ける．ここで，ρ_Λ は $\rho\restriction\mathsf{A}_\Lambda$ に対応する測度の $d\mu_\Lambda$ に関する Radon-Nykodim の導関数である．

$\mathbf{E}^I$ は凸集合であり，汎弱位相についてコンパクトである．

並進不変な状態のトリヴィアルな例（自由スピン系）

最初に仮定したように，$\mathbf{S}$ 上には単独のスピンの確率分布を表わす確率測度 $d\mu_0$ があたえられている．そこで，$d\mu_i$ $(i\in\mathbf{Z}^\nu)$ を $d\mu_0$ のコピーとし，$A\in\mathsf{A}_\Lambda$ $(\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu))$ に対して

$$\langle A\rangle_0=\int_{\Omega_\Lambda}A(\omega_\Lambda)\prod_{i\in\Lambda}d\mu_i(\omega_i) \tag{5.1.11}$$

を考える．ここで，$\omega_\Lambda=\{\omega_i\in\Omega_i\mid i\in\Lambda\}\in\Omega_\Lambda$．明らかに，$\langle\cdot\rangle_0$ は A^F 上の正値連続線形汎関数をあたえ，$\langle 1\rangle_0=1$ をみたす．したがって，連続性によって，$\langle\cdot\rangle_0$ は A 上の状態に一意的に拡張される．この状態 $\langle\cdot\rangle_0$ は，並進不変である．しかし，$\Lambda\cap\Lambda'=\phi$ である任意の $\Lambda,\Lambda'\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ と $A\in\mathsf{A}_\Lambda, B\in\mathsf{A}_{\Lambda'}$ に対して

$$\langle AB\rangle_0=\langle A\rangle_0\langle B\rangle_0$$

となるので，異なる領域に属するスピンの間に相関はない．したがって，$\langle\cdot\rangle_0$ は，物理的には，相互作用のない自由なスピン系の一つの状態を表わす．この状態 $\langle\cdot\rangle_0$ はそれ自体としてはつまらないが，相互作用のあるスピン系を定義するためのひとつの出発点になる（第5.3節以下を参照）．

格子スピン系は，スピンの配位空間 $\mathbf{S}$ とその上の確率分布 $d\mu_0$，準局所観測量の代数 A と A 上の状態によって特徴づけられ，系の統計力学的性質は A 上の状態を解析することによって得られる．この図式においては，異なる格子点に属するスピン同士の相互作用は状態の性質に反映しているわけであって，(5.1.9) でいえば，測度 $d\mu$ の中に相互作用の情報が入っていることになる．

しかし，A 上の状態すべてに興味があるわけではなく，以下では，われわれは，おもに $\mathbf{E}^I$ の状態に注目する．また，具体的なモデルを構成する場合には，まず，格子点ごとのスピンの配位空間とその上の確率分布をきめ，異なる格子点に属するスピンの間の相互作用を具体的にあたえて，これらによって状態を構成する，という手順をふむ．それから系のいろいろな物理的性質を調べるのである．そこで次節では，相互作用の定義をあたえることにしよう．

5.2 相互作用

定義 5.2.1 相互作用 Φ は，$\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ から A への写像で，すべての $a\in\mathbf{Z}^\nu$ とすべての $X\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に対して，次の (Φ1)～(Φ3) をみたすものである：

(Φ1) $\Phi: X\longmapsto\Phi(X)\in \mathrm{A}_X$.

(Φ2) $\Phi(X+a)=\tau_a\Phi(X)$ （並進不変性）

(Φ3) $\overline{\Phi(X)}=\Phi(X)$ （実数性）

相互作用の全体がつくる実線形空間を B とする．$\Phi\in\mathrm{B}$ に対して，2つのノルム $\|\Phi\|, |||\Phi|||$ を

$$\|\Phi\|=\sum_{X\ni O}\|\Phi(X)\|, \tag{5.2.1}$$

$$|||\Phi|||=\sum_{X\ni O}\frac{\|\Phi(X)\|}{|X|} \tag{5.2.2}$$

によって定義する（$\sum_{X\ni O}$ の O は $\mathbf{Z}^\nu$ の原点，$|X|$ は X の点の個数）．

$$\mathsf{B}_1 = \{\Phi \in \mathsf{B} \mid \|\Phi\| < \infty\} \tag{5.2.3}$$

$$\mathsf{B}_2 = \{\Phi \in \mathsf{B} \mid |||\Phi||| < \infty\} \tag{5.2.4}$$

とすると，$\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2$ は実 Banach 空間となる．また，明らかに $\mathsf{B}_1 \subset \mathsf{B}_2$ である．

定義 5.2.2　$\Phi \in \mathsf{B}$ とする．ある有限な定数 $r>0$ が存在して，$\mathrm{diam}\, X \equiv \sup_{i,j\in X}|i-j| > r$ となる任意の $X \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に対して，$\Phi(X)=0$ ならば，Φ は**到達距離の有限** (finite range) な相互作用であるという．到達距離の有限な相互作用がつくる実線形空間を B_0 とする．

補題 5.2.3　B_0 は $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2$ で稠密である．

証明　$\Phi \in \mathsf{B}_1$ と $r>0$ に対して

$$\Phi_r(X) = \begin{cases} \Phi(X) & \mathrm{diam}\, X \leqq r \\ 0 & \mathrm{diam}\, X > r \end{cases}$$

を考えると，$\Phi_r \in \mathsf{B}_0$ であり，

$$\|\Phi_r - \Phi\| = \sum_{\substack{X \ni O \\ \mathrm{diam}\, X > r}} \|\Phi(X)\|.$$

一方，

$$\|\Phi\| = \|\Phi_r\| + \sum_{\substack{X \ni O \\ \mathrm{diam}\, X > r}} \|\Phi(X)\|$$

であり，$\|\Phi_r\| \to \|\Phi\|$ $(r \nearrow \infty)$ となるので，

$$\sum_{\substack{X \ni O \\ \mathrm{diam}\, X > r}} \|\Phi(X)\| \to 0 \qquad (r \nearrow \infty)$$

でなければならない．したがって，$\|\Phi_r - \Phi\| \to 0$ $(r \nearrow \infty)$．ゆえに，B_0 は B_1 で稠密である．B_2 の場合もまったく同様に証明される．∎

相互作用のあるスピン系の例をあげておこう．

(C1)　Ising モデル

格子点 $i \in \mathbf{Z}^\nu$ に属する配位空間 Ω_i は

$$\mathbf{S} = \{-1, 1\}$$

のコピーであり，$\mathbf{S}$ の上に確率測度

$$\mu_0(\omega) = \frac{1}{2}, \qquad \omega \in \mathbf{S}$$

を定めておく.

$\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ のスピン全体の配位空間は, (5.1.8) の $\Omega_\Lambda = \bigtimes_{j \in \Lambda} \Omega_j$ であり, スピン全体の配位は $\{\omega_j \in \Omega_j\}_{j \in \Lambda}$ で表わされる. Ω_Λ 上の確率測度は $\prod_{j \in \Lambda} \mu_0(\omega_j)$, $(\omega_j \in \Omega_j)$ となる.

格子点 $i \in \mathbf{Z}^\nu$ に属するスピン S_i は, Ω_Λ 上で定義された関数

$$S_i(\{\omega_j\}_{j \in \Lambda}) = \omega_i$$

である. これを格子点 i に属する Ising スピンとよぶ. (5.1.5) の記法によれば

$$S_i = \tilde{\tau}_i S_0$$

とも書ける.

Ising スピンの相互作用は $\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ から A への写像で

$$\Phi(X) = \begin{cases} -hS_i & X = \{i\} \text{ のとき} \\ -J_{ij} S_i S_j & X = \{i, j\} \text{ のとき} \\ 0 & |X| \geq 3 \text{ のとき} \end{cases} \tag{5.2.5}$$

とする. ここに, $h \in \mathbf{R}$ は一様な外部磁場の強さと解釈される. J_{ij} は格子点 i と j にあるスピンの相互作用の強さを表わす定数で, $J_{ii} = 0$ とするが, さらに

$$J_{ij} \geq 0, \qquad J_{ij} = J_{ji}, \qquad i, j \in \mathbf{Z}^\nu$$

であるとき, 相互作用 (5.2.5) は**強磁性的** (ferromagnetic) であるといわれる. 特に

$$J_{ij} > 0 \qquad |i-j| = 1$$
$$J_{ij} = 0 \qquad |i-j| \neq 1$$

のとき, (5.2.5) は**最近接相互作用** (nearest neighbor interaction) とよばれる.

(C2) **N-ベクトル・モデル** ($N \geq 2$)

スピンが N 成分をもつモデルである.

格子点 $i \in \mathbf{Z}^\nu$ に属する配位空間 Ω_i は

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^N \text{ の単位球面}$$

のコピーとし，確率測度は単位球面上に一様であるとする．すなわち，確率変数 $\boldsymbol{\omega}$ は原点から S 上の点にいたるベクトルで，たとえば $N=3$ のとき $\boldsymbol{\omega}$ が立体角 $|d\boldsymbol{\omega}|$ の中に向く確率は

$$d\mu_0(\boldsymbol{\omega}) = |d\boldsymbol{\omega}|/4\pi$$

である．

$\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ のスピン全体の配位空間 Ω_Λ は上の Ω_i から (5.1.8) によってつくられる．

格子点 $i \in \mathbf{Z}^\nu$ に属するスピン $\boldsymbol{S}_i$ は，Ω_Λ 上で定義された関数

$$\boldsymbol{S}_i(\{\boldsymbol{\omega}_j\}_{j\in\Lambda}) = \boldsymbol{\omega}_i = (\omega_i{}^1, \cdots, \omega_i{}^N)$$

である．その第 k 成分は

$$S_i{}^k(\{\boldsymbol{\omega}_j\}_{j\in\Lambda}) = \omega_i{}^k$$

という Ω_Λ 上の関数になる．

別の定義　$\mathbf{R}^N$ の値をとるベクトル値確率変数を $\boldsymbol{x}$ とし，その確率測度を，単位球面上に集中した

$$d\mu_0(\boldsymbol{x}) = c\delta(|\boldsymbol{x}|-1)d\boldsymbol{x}$$

とする．規格化定数は

$$c = 1/(\text{単位球面 S の表面積})$$

となる．格子点 $i \in \mathbf{Z}^\nu$ に属する配位空間は

$$\Omega_i = \mathbf{R}^N$$

であり，$\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ のスピン全体の配位空間は (5.1.8) によってつくられる．

格子点 $i \in \mathbf{Z}^\nu$ に属するスピン $\boldsymbol{S}_i$ は，関数

$$\boldsymbol{S}_i(\{\boldsymbol{x}_j\}_{j\in\Lambda}) = \boldsymbol{x}_i$$

と定義する．

いずれの定義をとるにせよ，相互作用は

$$\Phi(X) = \begin{cases} -\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{S}_i & ; X=\{i\} \text{ のとき} \\ -J_{ij}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j & ; X=\{i,j\} \text{ のとき} \\ 0 & ; |X| \geqq 3 \text{ のとき} \end{cases} \tag{5.2.6}$$

であたえられる．ただし，$\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^N$, J_{ij} はモデル (C1) の場合と同じとする．特に $N=3$ の場合を**古典的 Heisenberg** モデルとよぶ．

上に定義した相互作用は $\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ から Ω 上の連続関数への写像であったが，格子上の Euclid 的場の量子論への応用においては，相互作用のこの定義では十分でない；相互作用のクラスをもっと拡げる必要がある．そこで，**一般化された相互作用**を定義する．

定義 5.2.4 一般化された相互作用 Φ は，$\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ から Ω 上の可測関数の空間への写像で，すべての $a\in\mathbf{Z}^\nu$ とすべての $X\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に対して，次の $(\Phi 1)'$ と定義 5.2.1 の $(\Phi 2)$, $(\Phi 3)$ をみたすものである：

$(\Phi 1)'$ $\Phi : X \longmapsto \Phi(X)\in \mathsf{B}(\Omega_X)$

ここで，$\mathsf{B}(\Omega_X)$ は測度 $\prod_{i\in X} d\mu_i$ $(d\mu_i = d\mu_0)$ について可測な，Ω_X 上の関数空間を表わす．

一般化された相互作用の例

(C3) **一般化された強磁性的 Ising モデル**

$\mathrm{S} = \dot{\mathbf{R}}^1$ （$\mathbf{R}^1$ に対する Alexandroff のコンパクト化），

$d\mu_0(x) = c_f f(x)dx$

にとる．ここで，dx は $\mathbf{R}^1$ の Lebesgue 測度，f は $\mathbf{R}^1$ 上の可測関数または超関数で $f\geqslant 0$ とする．$c_f>0$ は

$$\int_S d\mu_0 = 1$$

とするための規格化定数である．

Ω_0 上の関数 S_0 を

$$S_0(x) = x, \qquad x\in\Omega_0,$$

とし，

$$S_i = \tilde{\tau}_i S_0 \qquad i\in\mathbf{Z}^\nu,$$

とおく．相互作用は，(5.2.5) と同じ形に定義する．$\Phi(X)$ は $\mathbf{R}^{|X|}$ の連続関数ではあるが，$\dot{\mathbf{R}}^{|X|}$ 上では連続ではない（∞ で不連続）．

***f* の例**

(C3.1) $f(x) = \dfrac{1}{2}[\delta(x-1)+\delta(x+1)]$.

これで，モデルは (C1) と同等になる．

(C3.2)　$f(x)=e^{-\lambda P(x)}$

ここで，$\lambda>0$，$P(x)$ は

$$P(x)=\sum_{j=0}^{2n}a_jx^j$$

という形をもつ x の多項式で，$n\geqq 1$ は固定された自然数，$a_{2n}>0$ とする．このモデルは，格子上の Euclid 的な場の量子論のひとつのモデルで，(格子上の) **$P(\phi)_\nu$ モデル** とよばれている．これについては第8章で詳しく論ずる．

(C4)　**一般化された強磁性的 N-ベクトル モデル** ($N\geqq 2$)

$$\mathbf{S}=\dot{\mathbf{R}}^N,$$

$$d\mu_0(\boldsymbol{x})=c_f f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{S},$$

にとる．ここで，$d\boldsymbol{x}$ は $\mathbf{R}^N$ の Lebesgue 測度，f は $\mathbf{R}^N$ 上の可測関数または超関数で $f\geqq 0$ とする．c_f は (C3) の場合と同様である．Ω_0 上の関数 S_0^j ($j=1,\cdots,N$) を

$$S_0^j(\boldsymbol{x})=x_j\qquad (\boldsymbol{x}\text{ の第 }j\text{ 成分})$$

によって定義し，

$$\boldsymbol{S}_0=(S_0^1,\cdots,S_0^N),\qquad \boldsymbol{S}_i=\tilde{\tau}_i\boldsymbol{S}_0,\qquad i\in\mathbf{Z}^\nu,$$

とおく．相互作用は (5.2.6) と同じ形に定義する．

f の例

(C4.1)　$f(\boldsymbol{x})=\delta(|\boldsymbol{x}|^2-1)$

これで，モデルは (C2) と同等になる．

(C4.2)　$f(\boldsymbol{x})=e^{-\lambda(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^2-\mu\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}\qquad(\lambda>0,\mu>0)$

これで場の量子論のひとつのモデルである **$(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi})^2_\nu$ モデル**ができる．

後に，統計力学の重要なテーマのひとつである，系の相転移について論じるが (第 5.6 節，第 6.3 節を参照)，相転移は，系のもつ**対称性の自発的破れ** (spontaneous breakdown of symmetry) と密接な関係をもっている．そこで，系のもつ対称性について，少し述べておこう．

系のもつ対称性は相互作用に関して定義される．いま，スピンの配位空間 $\mathbf{S}$ 上に1対1かつ上への連続変換群 G が作用しているとしよう．このとき，$g\in G$ と $f\in \mathrm{B}(\Omega_X)$ に対して

$$(\tau_g f)(\omega_{i_1},\cdots,\omega_{i_{|X|}})=f(g^{-1}\omega_{i_1},\cdots,g^{-1}\omega_{i_{|X|}})\qquad(5.2.7)$$

を定義する．明らかに $\tau_g f \in \mathrm{B}(\Omega_X)$ であり，$\{\tau_g \mid g \in G\}$ は $\mathrm{B}(\Omega_X)$ 上の G の表現をあたえる．特に，$\tau_g \mathrm{C}(\Omega_X) = \mathrm{C}(\Omega_X)$ であり，連続性によって，τ_g は $\mathrm{C}(\Omega)$ 上の G の連続表現に拡張される．

定義 5.2.5 一般化された相互作用 Φ が各 $g \in G$ に対して

$$\tau_g \Phi(X) = \Phi(X), \qquad X \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$$

をみたすとき，Φ は **G-不変** (G-invariant) である，あるいは G に関して対称であるという．

例 モデル (C1) では，$h=0$ のとき，

$$G = \mathbf{Z}_2 = \{-1, 1\} \qquad (\text{位数 2 の巡回群})$$

について，モデル (C2) では，$\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$ のとき，

$$G = \mathrm{O}(N) \qquad (N \text{ 次元回転群})$$

について，相互作用は G-不変である．モデル (C3), (C4) についても同様である．

5.3 有界領域における格子スピン系

格子スピン系の統計力学は無限領域 $\mathbf{Z}^\nu$ 上のすべてのスピンがもつ相互作用をとり入れた理論でなければならないが，その理論構成の出発点として，$\mathbf{Z}^\nu$ の有界な領域における格子スピン系の力学を考える．

$\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ とし，一般化された相互作用 Φ があたえられたとしよう．このとき，有界領域 Λ に対する系のハミルトニアン H_Λ^Φ は

$$H_\Lambda^\Phi = \sum_{X \subset \Lambda} \Phi(X) \tag{5.3.1}$$

によって定義される．

例 モデル (C1), (C3) では，

$$H_\Lambda^\Phi = H_\Lambda^\Phi(S_\Lambda) = -\sum_{i,j \in \Lambda} J_{ij} S_i S_j - h \sum_{i \in \Lambda} S_i. \tag{5.3.2}$$

ここで，

$$S_\Lambda = \{S_i \mid i \in \Lambda\}. \tag{5.3.3}$$

$h=0$ のとき，Φ の $\mathbf{Z}_2$-不変性は，

$$H_\Lambda^\Phi(S_\Lambda)=H_\Lambda^\Phi(-S_\Lambda)$$

として表現される．

モデル (C2), (C4) では，

$$H_\Lambda^\Phi=H_\Lambda^\Phi(\boldsymbol{S}_\Lambda)=-\sum_{i,j\in\Lambda}J_{ij}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j-\sum_{i\in\Lambda}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{S}_j. \tag{5.3.4}$$

ここで，$\boldsymbol{S}_\Lambda$ は上の S_Λ と同様に定義される．$\boldsymbol{h}=0$ のとき，Φ の $\mathrm{O}(N)$-不変性は，

$$H_\Lambda^\Phi(M\boldsymbol{S}_\Lambda)=H_\Lambda^\Phi(\boldsymbol{S}_\Lambda),\qquad M\in\mathrm{O}(N)$$

として表現される．

命題 5.3.1　$\Phi\in\mathrm{B}_2$ に対して

$$\|H_\Lambda^\Phi\|\leqslant|\Lambda|\,\|\!|\Phi|\!\|. \tag{5.3.5}$$

証明　$\Phi\in\mathrm{B}_2$ とする．ハミルトニアンを定義する相互作用の和の仕方の視点をかえると，

$$H_\Lambda^\Phi=\sum_{a\in\Lambda}\sum_{\substack{X\subset\Lambda\\ X\ni a}}\frac{\Phi(X)}{|X|}$$

と書きなおせる．相互作用の不変性によって

$$\|\Phi(X)\|=\|\Phi(X+a)\|,\qquad a\in\mathbf{Z}^\nu.$$

これと，$|X|=|X+a|$，とを合わせると，

$$\frac{\|\Phi(X)\|}{|X|}=\frac{\|\Phi(X+a)\|}{|X+a|}.$$

したがって，

$$\sum_{X\ni a}\frac{\|\Phi(X)\|}{|X|}=\|\!|\Phi|\!\|.$$

ゆえに，(5.3.5) がでる．∎

Λ に対応する有限力学系の観測量の代数は A_Λ である．A_Λ 上の規格化された正値線形汎関数を A_Λ 上の状態 (state) という．しかし，A_Λ 上の状態すべてに興味があるわけではない．ここで調べるのは，以下に定義する**平衡状態**

(equilibrium states) である．その定義をするために，まず，有限力学系における統計力学的関数を定義する．

定義 5.3.2

(1) **分配関数** (partition function)：

$$Z_\Lambda^\Phi = \langle e^{-\beta H_\Lambda^\Phi}\rangle_0. \tag{5.3.6}$$

ここで，$\beta>0$ は絶対温度の逆数（逆数温度，inverse temperature）を表わすパラメーターである．この定義においては，(5.3.6) の右辺がすべての β に対して有限となるような一般化された相互作用のみを考える．$\Phi\in\mathrm{B}$ ならば，もちろん Z_Λ^Φ は有限である（$\Phi\in\mathrm{B}\Longrightarrow\|H_\Lambda^\Phi\|\leqslant 2^{|\Lambda|}\sup_{X\subset\Lambda}\|\Phi(X)\|$）．

(2) **圧力** (pressure)：

$$P_\Lambda(\Phi)=\frac{1}{\beta|\Lambda|}\log Z_\Lambda^\Phi. \tag{5.3.7}$$

(3) **内部エネルギー** (internal energy)：

$$U_\Lambda(\rho,\Phi)=\rho(H_\Lambda^\Phi)\equiv\langle\rho_\Lambda H_\Lambda^\Phi\rangle_0,\qquad \rho\in\mathbf{E}^I. \tag{5.3.8}$$

この定義においては，Φ,Λ を固定して，$\rho(H_\Lambda^\Phi)<\infty$ となるような $\rho\in\mathbf{E}^I$ のみを考える．$\Phi\in\mathrm{B}$ ならば，すべての $\rho\in\mathbf{E}^I$ に対して $\rho(H_\Lambda^\Phi)<\infty$ であるので，$U_\Lambda(\rho,\Phi)$ はすべての $\rho\in\mathbf{E}^I$ に対して定義される．**一格子点あたりの内部エネルギー** (internal energy per site) は，

$$u_\Lambda(\rho,\Phi)=\frac{1}{|\Lambda|}U_\Lambda(\rho,\Phi) \tag{5.3.9}$$

によって定義される．

(4) **エントロピー** (entropy)：

$$S_\Lambda(\rho)=-\langle\rho_\Lambda\log\rho_\Lambda\rangle_0,\qquad \rho\in\mathbf{E}^I. \tag{5.3.10}$$

一格子点あたりのエントロピー (specific entropy) は

$$s_\Lambda(\rho)=\frac{1}{|\Lambda|}S_\Lambda(\rho) \tag{5.3.11}$$

によって定義される．

ここで，エントロピーについて，少し注意しておく．$t\ln t\geqslant t-1$, $t>0$ で

あること および $\langle\rho_\Lambda\rangle_0=1$ を用いると，$S_\Lambda(\rho)\leqslant 0$ であることがわかる．したがって，$S_\Lambda(\rho)$ は $-\infty$ の値をとることも許してうまく定義されている．

熱力学的関数の基本的な性質をあたえておこう．

命題 5.3.3　圧力 $P_\Lambda(\cdot)$ は B 上の凸関数である．すなわち任意の $\lambda\in(0,1)$ に対して

$$P_\Lambda(\lambda\Phi+(1-\lambda)\Psi)\leqslant\lambda P_\Lambda(\Phi)+(1-\lambda)P_\Lambda(\Psi),\quad \Phi,\Psi\in\mathrm{B}. \tag{5.3.12}$$

がなりたつ．

証明　H_Λ^Φ の Φ についての線形性と Hölder の不等式によって

$$\begin{aligned}Z_\Lambda^{\lambda\Phi+(1-\lambda)\Psi}&=\langle e^{-\lambda\beta H_\Lambda^\Phi}e^{-(1-\lambda)\beta H_\Lambda^\Psi}\rangle_0\\&\leqslant\langle e^{-\lambda p\beta H_\Lambda^\Phi}\rangle^{1/p}\langle e^{-(1-\lambda)q\beta H_\Lambda^\Psi}\rangle^{1/q}.\end{aligned}$$

ここで，$p,q>1$，$1/p+1/q=1$．そこで，$\lambda=1/p$ とすれば，

$$Z_\Lambda^{\lambda\Phi+(1-\lambda)\Psi}\leqslant(Z_\Lambda^\Phi)^\lambda(Z_\Lambda^\Psi)^{(1-\lambda)}.$$

両辺の対数をとり，$|\Lambda|^{-1}$ をかけることによって (5.3.12) を得る．∎

注意　証明からわかるように，(5.3.12) は $\langle e^{-\beta H_\Lambda^\Phi}\rangle_0$ がすべての β に対して有限となるような Φ に対しても成立する．

補題 5.3.4　$(\mathbf{M},d\mu)$ を確率測度空間とする．このとき，任意の実数値関数 $f,g\in\mathrm{L}^\infty(\mathbf{M},d\mu)$ に対して

$$\left|\log\int e^f d\mu\right|\leqslant\|f\|_\infty \tag{5.3.13}$$

$$\left|\log\int e^f d\mu-\log\int e^g d\mu\right|\leqslant\|f-g\|_\infty. \tag{5.3.14}$$

証明　f,g を仮定のようにとると，

$$e^{-\|f\|_\infty}\leqslant e^f\leqslant e^{\|f\|_\infty}\qquad \text{a.e.}$$

であるから，$d\mu$ で積分すると

$$e^{-\|f\|_\infty}\leqslant\int e^f d\mu\leqslant e^{\|f\|_\infty}$$

したがって，ln をとって (5.3.13) を得る．(5.3.14) は

$$d\mu_g = \frac{e^g d\mu}{\int e^g d\mu}$$

で定義される確率測度 $d\mu_g$ に対して，f を $f-g$ として，(5.3.13) を適用すればよい．∎

命題 5.3.5 (圧力および内部エネルギーに対する一様限界) $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$ とする．このとき

(1) $|P_\Lambda(\Phi)| \leqslant |||\Phi|||,$

$$|P_\Lambda(\Phi)-P_\Lambda(\Psi)| \leqslant |||\Phi-\Psi|||, \quad \Phi, \Psi \in \mathrm{B}_2. \tag{5.3.15}$$

(2) $$|u_\Lambda(\rho, \Phi)| \leqslant |||\Phi|||, \quad \rho \in \mathbf{E}^I, \Phi \in \mathrm{B}_2. \tag{5.3.16}$$

証明 $\Phi \in \mathrm{B}_2$ とすると，補題 5.3.4 と命題 5.3.1 によって

$$\begin{aligned}\log\langle e^{-\beta H_\Lambda^\Phi}\rangle_0 &\leqslant \beta\|H_\Lambda^\Phi\| \\ &\leqslant \beta|\Lambda|\,|||\Phi|||.\end{aligned}$$

したがって，(1) の第1式を得る．第2式は (5.3.14) と命題 5.3.1 を使って示される．(2) は命題 5.3.1 と $A=1$ とおいた (5.1.10) を使えばよい．∎

次に，エントロピーの性質を述べる．

命題 5.3.6 $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ とする．このとき，任意の $\rho \in \mathbf{E}^I$ に対して次の (1)～(3) が成立する：

(1) (非正値性)

$$S_\Lambda(\rho) \leqslant 0$$

(2) (単調減少性)

$$\Lambda \subseteq \Lambda' \text{ ならば，} S_{\Lambda'}(\rho) \leqslant S_\Lambda(\rho)$$

(3) (強劣加法性)

$$S_{\Lambda\cup\Lambda'}(\rho)+S_{\Lambda\cap\Lambda'}(\rho) \leqslant S_\Lambda(\rho)+S_{\Lambda'}(\rho)$$

証明 (1) はエントロピーの定義のところで注意しておいたので，(2) と (3) を証明する．証明を通して，$\rho \in \mathbf{E}^I$ をひとつ任意に固定して，$S_\Lambda(\rho) \equiv S(\Lambda)$ とおく．

(2) を示すために，$\Lambda \subseteq \Lambda'$ としよう．このとき，

$$S(\Lambda')-S(\Lambda) = \rho(\log\rho_\Lambda - \log\rho_{\Lambda'})$$
$$= \rho\left(\log\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\Lambda'}}\right)$$
$$\leqslant \rho\left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\Lambda'}}-1\right)$$

ここで，不等式 $\log t \leqslant t-1$ $(t>0)$ を $t=\rho_\Lambda/\rho_{\Lambda'}$ として用いた．$(\rho_\Lambda/\rho_{\Lambda'})-1$ は $\Omega_{\Lambda'}$ 上の可測関数であるから

$$\rho\left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\Lambda'}}-1\right) = \left\langle \rho_{\Lambda'}\left(\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\Lambda'}}-1\right)\right\rangle_0$$
$$= \langle\rho_\Lambda\rangle_0 - 1$$
$$= 0.$$

ここで，$\langle\rho_\Lambda\rangle_0 = \rho(1) = 1$ を用いた．したがって，(2) を得る．

(3) を示すために，

$$S(\Lambda\cup\Lambda')+S(\Lambda\cap\Lambda')-S(\Lambda)-S(\Lambda')$$
$$= \rho\left(\log\frac{\rho_\Lambda\rho_{\Lambda'}}{\rho_{\Lambda\cup\Lambda'}\rho_{\Lambda\cap\Lambda'}}\right)$$

と変形する．ここで，右辺の積分においては，$\rho_{\Lambda\cup\Lambda'}>0$ となる，$\Omega_{\Lambda\cup\Lambda'}$ の部分集合上で考えればよい．再び，$\log t \leqslant t-1$ $(t>0)$ を用いると

$$(\text{上式の右辺}) \leqslant \rho\left(\frac{\rho_\Lambda\rho_{\Lambda'}}{\rho_{\Lambda\cup\Lambda'}\rho_{\Lambda\cap\Lambda'}}\right)-1$$
$$= \left\langle\frac{\rho_\Lambda\rho_{\Lambda'}}{\rho_{\Lambda\cap\Lambda'}}\right\rangle_0 - 1. \tag{5.3.17}$$

ところが，定義から，任意の $\omega\in\Omega_{\Lambda'\cap\Lambda}$ に対して

$$\int_{\Omega_{\Lambda'\setminus\Lambda}} \rho_{\Lambda'}(\cdot\times\omega)\prod_{i\in\Lambda'\setminus\Lambda} d\mu_i = \rho_{\Lambda'\cap\Lambda}(\omega)$$

となることが容易にわかる．したがって，

$$\left\langle\frac{\rho_\Lambda\rho_{\Lambda'}}{\rho_{\Lambda\cap\Lambda'}}\right\rangle_0 = \langle\rho_\Lambda\rangle_0 = 1.$$

ゆえに，

$$(5.3.17)\ \text{の右辺} \leqslant 0$$

となって，(3) が得られる．∎

補題 5.3.7 (Jensen の不等式) $(\mathbf{M}, d\mu)$ を確率測度空間とする．このとき，任意の実数値関数 $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{M}, d\mu)$ に対して不等式

$$e^{\int f d\mu} \leqslant \int e^f d\mu \tag{5.3.18}$$

が成立する．等号が成立するのは，f がほとんどいたるところ定数である場合に限られる．

証明 まず，f が下に有界である場合を考える．このとき，

$$\inf_{m \in \mathbf{M}} f(m) = c$$

とし，(5.3.18) の両辺に e^{-c} をかけることによって，$f-c \geqslant 0$ に対して，(5.3.18) を証明すればよいことがわかる．したがって，はじめから $f \geqslant 0$ としてよい．$f \geqslant 0$ ならば，Hölder の不等式によって，任意の自然数 n に対して

$$\left(\int f d\mu\right)^n \leqslant \int f^n d\mu$$

となる．したがって

$$e^{\int f d\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\int f d\mu\right)^n}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{f^n}{n!} d\mu \leqslant \int e^f d\mu.$$

ここで，$f \geqslant 0$ であるから項別積分は意味をもつ．ゆえに，(5.3.18) を得る．

次に，f が下に有界でないとしよう．このとき，

$$f_N = \max\{f, N\} \qquad (N \in \mathbf{R})$$

とおけば，f_N は下に有界な関数であり，したがって，f_N に対して (5.3.18) が成立する．f_N は N の単調増加関数だから，単調収束定理によって $N \to -\infty$ のとき

$$\int f_N d\mu \to \int f d\mu$$

$$\int e^{f_N} d\mu \to \int e^f d\mu$$

となる．ゆえに，(5.3.18) を得る．次に (5.3.18) で等号が成立するとき

$$e^{\int f d\mu} = \int e^f d\mu \tag{5.3.19}$$

を考えよう．もし，f が‘ほとんどいたるところ定数’でないとするとある定数 $\alpha \in \mathbf{R}^1$ が存在して，集合

$$\mathbf{E}_\alpha \equiv \{m \in \mathbf{M} \mid f(m) < \alpha\}$$

の測度 $\mu(\mathbf{E}_\alpha)$ は

$$0 < \mu(\mathbf{E}_\alpha) < 1$$

をみたす．$f(m) - \alpha \equiv g(m)$ とおけば，

$$e^{\int g d\mu} = \int e^g d\mu \tag{5.3.20}$$

であって，

$$\mathbf{E}_\alpha = \{m \in \mathbf{M} \mid g(m) < 0\}$$

となる．Young の不等式

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right) b^{p/(p-1)} \qquad (a, b > 0,\ \ p > 1)$$

と不等式 (5.3.18) を用いると

$$\begin{aligned} e^{\int g d\mu} &= e^{\int_{\mathbf{E}_\alpha} g d\mu} e^{\int_{\mathbf{E}_\alpha{}^c} g d\mu} \\ &\leqslant \mu(\mathbf{E}_\alpha) e^{\int_{\mathbf{E}_\alpha} g \frac{d\mu}{\mu(\mathbf{E}_\alpha)}} + \mu(\mathbf{E}_\alpha{}^c) e^{\int_{\mathbf{E}_\alpha{}^c} g \frac{d\mu}{\mu(\mathbf{E}_\alpha{}^c)}} \\ &\leqslant \int_{\mathbf{E}_\alpha} e^g d\mu + \int_{\mathbf{E}_\alpha{}^c} e^g d\mu \end{aligned}$$

を得る．一方，(5.3.20) によって左辺は

$$\int_{\mathbf{E}_\alpha} e^g d\mu + \int_{\mathbf{E}_\alpha{}^c} e^g d\mu$$

に等しい．したがって，上の不等式ですべて等号が成立するので，Young の不等式の等号成立条件 ($b = a^{p-1}$) によって

$$\int_{\mathbf{E}_\alpha} g \frac{d\mu}{\mu(\mathbf{E}_\alpha)} = \int_{\mathbf{E}_\alpha{}^c} g \frac{d\mu}{\mu(\mathbf{E}_\alpha{}^c)}$$

でなければならない．左辺が非正値で，右辺は非負値であるから両辺とも 0，

したがって，

$$g(m) = 0 \qquad \text{a. e. } m \in \mathbf{E}_\alpha.$$

これは矛盾である．ゆえに，(5.3.19) が成立するのは，f が'ほとんどいたるところ定数'のときに限られる．∎

命題 5.3.8 (有界領域における **Gibbs の変分不等式**) $\rho(H_\Lambda^\Phi) < \infty$ となるすべての $\rho \in \mathbf{E}^I$ に対して

$$s_\Lambda(\rho) \leqslant \beta u_\Lambda(\rho, \Phi) + \beta P_\Lambda(\Phi) \tag{5.3.21}$$

特に，$\Phi \in \mathrm{B}$ ならば，(5.3.21) はすべての $\rho \in \mathbf{E}^I$ に対してなりたつ．

証明 ρ を仮定のようにとる．$S_\Lambda(\rho) > -\infty$ の場合を考えれば十分である：

$$\begin{aligned} &S_\Lambda(\rho) - \beta U_\Lambda(\rho, \Phi) \\ &\quad = \langle \rho_\Lambda(\log \rho_\Lambda^{-1} - \beta H_\Lambda^\Phi)\rangle_0 \\ &\quad \leqslant \log \langle \rho_\Lambda e^{\ln \rho_\Lambda^{-1} - \beta H_\Lambda^\Phi}\rangle_0 \qquad (\text{Jensen の不等式}) \\ &\quad = \beta|\Lambda| P_\Lambda(\Phi). \end{aligned}$$

$\Phi \in \mathrm{B}$ ならば，$\rho(H_\Lambda^\Phi) < \infty$ はつねにみたされているので，(5.3.21) はすべての $\rho \in \mathbf{E}^I$ に対して成立する．∎

定義 5.3.9 $\rho(H_\Lambda^\Phi) < \infty$ となる $\rho \in \mathbf{E}^I$ が

$$s_\Lambda(\rho) = \beta u_\Lambda(\rho, \Phi) + \beta P_\Lambda(\Phi) \tag{5.3.22}$$

をみたすとき，ρ を有界領域 Λ における格子スピン系の**平衡状態** (equilibrium state) とよぶ．

定義と命題 5.3.8 から，平衡状態は Gibbs の変分不等式 (5.3.21) で等号を成立させるような状態であることがわかる．(5.3.22) を **Gibbs の等式** (Gibbs equality) とよぶ．

平衡状態は，一般化された相互作用 Φ (したがってそれからつくられるハミルトニアン H_Λ^Φ)，β および Λ によってラベルづけされる．なお，$\Phi \in \mathrm{B}$ ならば，$\rho(H_\Lambda^\Phi) < \infty$ はつねにみたされるので，平衡状態の定義において，この条件は不要である．

平衡状態は，物理的には，系の安定したひとつの相 (phase) を記述するも

のと考えられる．そこで，(Φ, β, Λ) をひとつ固定したとき，それに対応する平衡状態がいくつあるかが興味ある問題となる．有限力学系においては，しかし，平衡状態はただひとつしかない．これを次に示そう．

$$\rho_\Lambda^{\beta,\Phi}(A) = Z_\Lambda^{\beta,\Phi-1}\langle e^{-\beta H_\Lambda^\Phi} A\rangle_0, \qquad A \in \mathrm{A} \tag{5.3.23}$$

によって，A 上の正値線形汎関数 $\rho_\Lambda^{\beta,\Phi}$ を定義する．

定理 5.3.10　一般化された相互作用 Φ，逆数温度 β，有界領域 Λ に対する有限力学系の平衡状態はただひとつであり，それは $\rho_\Lambda^{\beta,\Phi}$ である．

証明　命題 5.3.8 の証明からわかるように，(5.3.21) で等号が成り立つのは，証明に用いられた Jensen の不等式で等式が成立するときである．したがって，補題 5.3.7 によって，

$$\rho_\Lambda^{\beta,\Phi} = e^{-\beta H_\Lambda^\Phi}/\langle e^{-\beta H_\Lambda^\Phi}\rangle_0$$

の場合に限られる．これは，状態 $\rho_\Lambda^{\beta,\Phi}$ をあたえる．ゆえに，$\rho_\Lambda^{\beta,\Phi}$ は，有限力学系のただひとつの平衡状態である．∎

この定理の物理的な意味は，有限力学系においては相転移は存在しないということである（相転移の定義については，以下の第5.6節を見よ）．このことだけからみても，有限力学系は——上の定式化では——相転移をもつ現実の物理系を記述できないことがわかる．

そこで，次に，無限体積極限 $\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^\nu$ を考え，無限力学系の一般的枠組をあたえよう．

注意　異なる格子点のスピン同士の相互作用 Φ，したがってそのハミルトニアン H_Λ^Φ をあたえて，それによって格子スピンの相互作用系を特徴づけ，記述するという立場——本書の記述の立場——では，$\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^\nu$ という，有限力学系からの無限体積極限をとらないで，いきなり無限力学系を定義することは，できない．それは，ハミルトニアン H_Λ^Φ や分配関数 Z_Λ が $\Lambda = \mathbf{Z}^\nu$ に対して定義できないからである．

5.4　無限体積極限——熱力学的極限

はじめに，Λ が立方格子の形を保ちながら，$\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^\nu$ となる無限体積極限を

考える．$i=(i_1,\cdots,i_\nu)$ と書き，自然数 n に対して，

$$C_n=\left\{i\in\mathbf{Z}^\nu\,\middle|\,-\frac{n}{2}<i_j<\frac{n}{2},\quad j=1,\cdots,\nu\right\} \tag{5.4.1}$$

とする．

定理 5.4.1 (圧力の無限体積極限)

$$P_n(\Phi)=P_{C_n}(\Phi),\qquad \Phi\in\mathrm{B}_2, \tag{5.4.2}$$

とおく．このとき，すべての $\Phi\in\mathrm{B}_2$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\Phi)\equiv P(\Phi) \tag{5.4.3}$$

は存在する．$P(\cdot)$ は B_2 上の凸関数であり，

$$|P(\Phi)-P(\Psi)|\leqslant|\!|\!|\Phi-\Psi|\!|\!|,\qquad \Phi,\Psi\in\mathrm{B}_2, \tag{5.4.4}$$

が成立する．

証明 補題 5.2.3 (B_0 の B_2 での稠密性) と不等式 (5.3.15) によって，$P(\Phi)$ の存在は $\Phi\in\mathrm{B}_0$ に対して示せば十分である (問題 5.3)．$\Phi\in\mathrm{B}_0$ とすれば，ある自然数 r が存在して，$\operatorname{diam}X>r$ ならば $\Phi(X)=0$ となる．$m>n>2r$ をみたす任意の自然数 m,n に対して

$$m=nl+q$$

となる自然数 l と定数 q $(0\leqslant q<n)$ が存在する．

$$H_m{}^\Phi=H_{C_m}{}^\Phi$$

とおく．C_m には，一辺が n の立方格子が l^ν 個存在する．それらを $B_1,\cdots,B_{l^\nu}$ とする．ただし，

$$B\equiv\bigcup_{i=1}^{l^\nu}B_i=\left[-\frac{m}{2},-\frac{m}{2}+nl\right]^\nu\cap\mathbf{Z}^\nu$$

となるように番号づける．このとき

$$H_m{}^\Phi=\sum_{i=1}^{l^\nu}H_n{}^{(i)}(\Phi)+R_1(\Phi)+R_2(\Phi)$$

と書ける．ここで，$H_n{}^{(i)}(\Phi)$ は，B_i に対するハミルトニアンであり，

$$R_1(\Phi)=\sum_{\substack{X\subset C_m\\ X\cap\{C_m\cap B^c\}\neq\phi}}\Phi(X),$$

$$R_2(\Phi)=\sum_{X\subset B}\Phi(X).$$

ただし，$R_2(\Phi)$ を定義する和においては，X は少なくともふたつの B_i と共通部分をもつようにとる．$\mathrm{diam}\,X > r$ ならば $\Phi(X) = 0$ であるから，$R_1(\Phi)$ を定義する和においては，

$$X \subset \left(\left[-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}+n(l-1)\right]^\nu \cap \mathbf{Z}^\nu\right)^c \cap C_m \equiv \Lambda_q$$

となる X のみが寄与する．

$$R_1(\Phi) = \sum_{X \subset \Lambda_q} \Phi(X).$$

これは Λ_q に対するハミルトニアンにほかならない．したがって，命題 5.3.1 と $|\Lambda_q| = m^\nu - [n(l-1)]^\nu$ によって

$$\|R_1(\Phi)\| \leqslant \{m^\nu - [(l-1)n]^\nu\} |||\Phi||| \tag{5.4.5}$$

となる．また，命題 5.3.1 の証明と同様に

$$\|R_2(\Phi)\| \leqslant \sum_{\alpha \in B} \sum_{\substack{X \\ X \ni \alpha}} \frac{\|\Phi(X)\|}{|X|} \tag{5.4.6}$$

が成立する．$j_k = 0, 1, \cdots, l-1$ $(k = 1, \cdots, \nu)$ として

$$C(j_1, \cdots, j_\nu) = \left\{ i \,\middle|\, -\frac{m}{2} + j_k n + r \leqslant i_k \leqslant -\frac{m}{2} + (j_k+1)n - r,\ \ k = 1, \cdots, \nu \right\}$$

とおく．$C(j_1, \cdots, j_\nu)$ は，かならず，あるただひとつの B_j に含まれている．$\mathrm{diam}\,X > r$ ならば $\Phi(X) = 0$ であるから，(5.4.6) の和において

$$\alpha \in \bigcup_{j_1, \cdots, j_\nu} C(j_1, \cdots, j_\nu)$$

となる $\alpha \in \mathbf{Z}^\nu$ は寄与をしない．したがって

$$\|R_2(\Phi)\| \leqslant \{(ln)^\nu - [l(n-2r)]^\nu\} |||\Phi|||. \tag{5.4.7}$$

一方，補題 5.3.4 から

$$\begin{aligned} &|\ln \langle e^{-\beta H_m^\Phi} \rangle_0 - \ln \langle e^{-\beta \sum_{i=1}^{l^\nu} H_n^{(i)}(\Phi)} \rangle_0| \\ &\leqslant \beta \|R_1(\Phi)\| + \beta \|R_2(\Phi)\|. \end{aligned}$$

相互作用および状態 $\langle \cdot \rangle_0$ の並進不変性により

$$\langle e^{-\beta \sum_{i=1}^{l^\nu} H_n^{(i)}(\Phi)} \rangle_0 = \langle e^{-\beta H_n^\Phi} \rangle_0^{l^\nu}$$

したがって，(5.4.5) と (5.4.7) と合わせて，

$$\left|P_m(\Phi)-\left(\frac{ln}{m}\right)^{\nu}P_n(\Phi)\right|$$

$$\leqslant\left\{1+\left(\frac{ln}{m}\right)^{\nu}-\left[\frac{(l-1)n}{m}\right]^{\nu}-\left[\frac{l(n-2r)}{m}\right]^{\nu}\right\}|||\Phi|||$$

となる．

$$\lim_{m\to\infty}\frac{ln}{m}=1$$

であるから

$$|\varlimsup_{m\to\infty}P_m(\Phi)-P_n(\Phi)|\leqslant\left[1-\left(1-\frac{2r}{n}\right)^{\nu}\right]|||\Phi|||$$

そこで，$n\to\infty$ とすれば，

$$|\varlimsup_{m\to\infty}P_m(\Phi)-\varliminf_{n\to\infty}P_n(\Phi)|\leqslant 0$$

すなわち，$P_n(\Phi)$ の n についての上極限と下極限は一致する．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}P_n(\Phi)\equiv P(\Phi)$$

は存在する．$P(\cdot)$ が B_2 上の凸関数であることおよび (5.4.4) はそれぞれ (5.3.12)，(5.3.15) で極限をとることによって証明される．∎

定理 5.4.2 (一格子点あたりの内部エネルギーの無限体積極限)

$$u_n(\rho,\Phi)\equiv u_{C_n}(\rho,\Phi),\qquad \rho\in\mathbf{E}^I,\Phi\in\mathrm{B}_2 \tag{5.4.8}$$

とおく．このとき，すべての $\rho\in\mathbf{E}^I,\Phi\in\mathrm{B}_2$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}u_n(\rho,\Phi)\equiv u(\rho,\Phi) \tag{5.4.9}$$

は存在する．さらに，

$$|u(\rho,\Phi)|\leqslant|||\Phi|||,\qquad \rho\in\mathbf{E}^I,\ \Phi\in\mathrm{B}_2, \tag{5.4.10}$$

をみたす．

証明 $u_n(\rho,\Phi)$ の Φ についての線形性と一様限界 (5.3.16) とによって，$u(\rho,\Phi)$ の存在を $\Phi\in\mathrm{B}_0$ について示せば十分である (問題 5.3)．

定理 5.4.1 の証明と同じ記号を用いる．相互作用の並進不変性によって

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{l^\nu} H_n{}^{(i)}(\Phi)\right) = l^\nu \rho(H_n{}^\Phi)$$

となる．したがって

$$m^\nu u_m(\rho, \Phi) - (ln)^\nu u_n(\rho, \Phi) = \rho(R_1(\Phi) + R_2(\Phi))$$

となる．$|\rho(A)| \leqslant \|A\|, A \in \mathrm{A}$ と (5.4.6) と (5.4.7) を使うと

$$\left| u_m(\rho, \Phi) - \left(\frac{ln}{m}\right)^\nu u_n(\rho, \Phi) \right| \leqslant \left\{ 1 + \left(\frac{ln}{m}\right)^\nu - \left[\frac{(l-1)n}{n}\right]^\nu - \left[\frac{l(n-2r)}{m}\right]^\nu \right\} |||\Phi|||.$$

したがって，あとは定理 5.4.1 の証明と同様にして，$u(\rho, \Phi)$ の存在が示される．(5.4.10) は (5.3.16) で極限をとればよい．▮

定理 5.4.3 (一格子点あたりのエントロピーの無限体積極限)

$$s_n(\rho) = s_{C_2{}^n}(\rho), \qquad \rho \in \mathbf{E}^I, \tag{5.4.11}$$

とおく．このとき，すべての $\rho \in \mathbf{E}^I$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} s_n(\rho) \equiv s(\rho) \tag{5.4.12}$$

は存在する．

証明　n を自然数とし，

$$S_n(\rho) = S_{C_n}(\rho)$$

とおく．$C_{2^{n+1}}$ の中には一辺が 2^n の立方格子を 2^ν 個つめることができる．それらを $B_1, \cdots, B_{2^\nu}$ としよう．S_Λ の劣加法性 (命題 5.3.6—(3) で $\Lambda \cap \Lambda' = \phi$ のときの不等式) を用いると

$$S_{n+1}(\rho) \leqslant \sum_{i=1}^{2^\nu} S_{B_i}(\rho)$$

$S_\Lambda(\rho)$ の並進不変性により

$$S_{B_i}(\rho) = S_n(\rho), \qquad i = 1, \cdots, 2^\nu.$$

したがって，

$$S_{n+1}(\rho) \leqslant 2^{\nu} S_n(\rho)$$

となる.

ゆえに, $\{s_{2^n}(\rho)\}$ は n の単調減少列となるので,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n}(\rho) \equiv s(\rho) \tag{5.4.13}$$

が存在する. ここで, $s(\rho)=-\infty$ となる場合も含める. さて, $a=2^m<n$ とすれば,

$$n=la+b, \quad 0 \leqslant b < a$$

となる自然数 l と定数 b が存在する. このとき, 一辺が la の立方体が C_n の中につくれるから

$$\begin{aligned} s_n(\rho) &\leqslant \frac{1}{n^{\nu}} S_{la}(\rho) \\ &\leqslant \left(\frac{la}{n}\right)^{\nu} s_a(\rho) \end{aligned}$$

を得る.

ここで, 第1の不等式では, S_A の単調減少性を, 第2の不等式では S_A の劣加法性を用いた. したがって, $n\to\infty$ を先にとり, そのあとで $a\to\infty$ $(m\to\infty)$ とすれば,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(\rho) \leqslant s(\rho) \tag{5.4.14}$$

を得る. もし, $s(\rho)=-\infty$ ならば, $\lim_{n\to\infty} s_n(\rho)=-\infty$ として極限が存在することになる. そこで, $s(\rho)>-\infty$ としよう. $a=2^m>n$ とすれば

$$a=nl+b, \quad 0 \leqslant b < n$$

となる自然数 l と定数 b が存在する. このとき, C_a の中には一辺 n の立方体が l^{ν} 個入る. したがって,

$$s_a(\rho) \leqslant \left(\frac{nl}{a}\right)^{\nu} s_n(\rho).$$

そこで, 先に $a\to\infty(m\to\infty)$ とし, そのあとで $n\to\infty$ とすれば

$$s(\rho) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\, s_n(\rho)$$

となる．(5.4.14) とこの結果を合わせると $\lim_{n\to\infty} s_n(\rho)$ が存在して (5.4.13) で定義される $s(\rho)$ に等しいことがわかる．■

次に，より一般的な無限体積極限を考えよう．各自然数 a に対して，C_a を

$$\{i \in \mathbf{Z}^\nu \mid n_j a \leqq i_j < (n_j+1)a,\ j=1,\cdots,\nu\} \qquad (n_1,\cdots,n_\nu \text{ は整数})$$

の形の一辺 a の ν 次元立方格子の集合とする．各 $\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に対して

$$N_a^+(\Lambda) = \Lambda \text{ と共通部分をもつ } C_a \text{ の立方格子の数}$$

$$N_a^-(\Lambda) = \Lambda \text{ に含まれる } C_a \text{ の立方格子の数}$$

を定義する．

定義 5.4.4　$\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ が $n\to\infty$ のとき van Hove の意味で $\mathbf{Z}^\nu$ に近づくとは，すべての自然数 $a>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} N_a^-(\Lambda_n) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_a^-(\Lambda_n)}{N_a^+(\Lambda_n)} = 1$$

となることとし，$\Lambda_n \to \mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) と記す．

$\{C_n \cap \mathbf{Z}^\nu\}$ は，もちろん，van Hove の意味で $\mathbf{Z}^\nu$ に近づく．

定理 5.4.5　$\Lambda_n \to \mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) ならば，すべての $\Phi \in \mathrm{B}_2$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P_{\Lambda_n}(\Phi) = P(\Phi). \tag{5.4.15}$$

ここで $P(\Phi)$ は定理 5.4.1 であたえられるものである．

証明　定理 5.4.1 の証明のはじめに述べたように $\Phi \in \mathrm{B}_0$ に対して (5.4.15) を示せば十分である．$\Phi \in \mathrm{B}_0$ とすると，$\operatorname{diam} X > r$ ならば $\Phi(X)=0$ となる自然数 r が存在する．自然数 a を $a>2r$ となるようにとる．Λ_n の中には一辺 a の立方格子が $N_a^-(\Lambda_n)$ 個あるので，それらを

$$B_1, \cdots, B_l \qquad (l \equiv N_a^-(\Lambda_n))$$

とする．B_i に対するハミルトニアンを $H_a^{(i)}(\Phi)$ とすれば，定理 5.4.1 の証明と同様に

$$H_{\Lambda_n}^{\Phi} = \sum_{i=1}^{l} H_a^{(i)}(\Phi) + Q_1(\Phi) + Q_2(\Phi)$$

と書ける．ここで $Q_1(\Phi)$ は

$$X \cap \left(\bigcup_{i=1}^{l} B_i\right)^c \neq \phi$$

となる $X \subset \Lambda_n$ についての相互作用の和であり，$Q_2(\Phi)$ は

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{l} B_i$$

かつ任意の $i=1,\cdots,l$ に対して $X \not\subset B_i$ となるような $X \subset \Lambda_n$ についての相互作用の和である．$\operatorname{diam} X > r$ ならば $\Phi(X)=0$ となることを使えば，定理 5.4.1 の証明と同様にして

$$\|Q_1(\Phi)\| \leqslant [|\Lambda_n| - N_a^-(\Lambda_n)(a-2r)^\nu] |||\Phi|||,$$

$$\|Q_2(\Phi)\| \leqslant [N_a^-(\Lambda_n)(a^\nu - (a-2r)^\nu)] |||\Phi|||$$

となることがわかる．したがって，あとは，定理 5.4.1 の証明とまったく同様の仕方で，

$$\left| P_{\Lambda_n}(\Phi) - \frac{N_a^-(\Lambda_n) a^\nu}{|\Lambda_n|} P_a(\Phi) \right| \leqslant \left\{ 1 + \frac{N_a^-(\Lambda_n)[a^\nu - 2(a-2r)^\nu]}{|\Lambda_n|} \right\} |||\Phi|||$$

を示すことができる．一方

$$\frac{N_a^-(\Lambda_n)}{N_a^+(\Lambda_n)} \leqslant \frac{N_a^-(\Lambda_n) a^\nu}{|\Lambda_n|} \leqslant 1$$

であるから，$\Lambda_n \to \mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_a^-(\Lambda_n)}{|\Lambda_n|} = \frac{1}{a^\nu}. \tag{5.4.16}$$

したがって

$$|\overline{\lim_{n\to\infty}} P_{\Lambda_n}(\Phi) - P_a(\Phi)| \leqslant 2\left[1 - \left(1 - \frac{2r}{a}\right)^\nu\right] |||\Phi|||.$$

そこで，$a \to \infty$ とすれば，定理 5.4.1 によって

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P_{\Lambda_n}(\Phi) = P(\Phi)$$

となる．同様に

$$\lim_{n\to\infty} P_{\Lambda_n}(\Phi) = P(\Phi).$$

ゆえに，$\lim_{n\to\infty} P_{\Lambda_n}(\Phi)$ は存在して $P(\Phi)$ に等しい．∎

定理 5.4.6　$\Lambda_n \to \mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) ならば，すべての $\rho \in \mathbf{E}^I, \Phi \in \mathrm{B}_2$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} u_{\Lambda_n}(\rho, \Phi) = u(\rho, \Phi). \tag{5.4.17}$$

ここで $u(\rho, \Phi)$ は定理 5.4.2 であたえられるものである．

証明　定理 5.4.5 の証明における $Q_1(\Phi), Q_2(\Phi)$ に対する評価を用いて，定理 5.4.2 とまったく同様に証明される．∎

定理 5.4.7　$\Lambda_n \to \mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) ならば，すべての $\rho \in \mathbf{E}^I$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} s_{\Lambda_n}(\rho) = s(\rho). \tag{5.4.18}$$

ここで，$s(\rho)$ は定理 5.4.3 であたえられるものである．

証明　a を2の巾乗とする．Λ_n の中には，互いに素な，一辺 a の立方体が $N_a^-(\Lambda_n)$ 個あるので，それらの和集合を Λ_n^- とする．記号を簡単にするために $S_\Lambda(\rho) = S(\Lambda)$ と書く．$S(\Lambda)$ の劣加法性と並進不変性を用いると

$$\begin{aligned} S(\Lambda_n) &\leqslant S(\Lambda_n^-) \\ &\leqslant N_a^-(\Lambda_n) S(C_a), \end{aligned}$$

(5.4.16) と定理 5.4.3 を用いると

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_{\Lambda_n}(\rho) \leqslant s(\rho) \tag{5.4.19}$$

となる．

次に，Λ_n^+ を，互いに重なることのない一辺 a の立方体 X_j の $N_a^+(\Lambda_n)$ 個の和集合で $\Lambda_n \subseteq \Lambda_n^+$ となるものとする．任意の $X_j \in \Lambda_n^+$, $(j = 1, \cdots, N_a^+(\Lambda_n))$ に対して整数 $n_1^{(j)}, \cdots, n_\nu^{(j)}$ が存在して

$$X_j = \{ i \in \mathbf{Z}^\nu \mid n_k^{(j)} a \leqslant i_k < (n_k^{(j)}+1)a,\ \ k = 1, \cdots, \nu \}$$

となる．ここで，後の便宜のため，X_j の順序は，$\{(n_1^{(j)}, \cdots, n_\nu^{(j)})\}$ の‘辞書式’

の順序づけ*) と対応するようにとっておく.

$$Y_k = \bigcup_{j=1}^{k} X_j$$

とする. 定理 5.4.3 の証明から

$$S(X_1) \geqslant a^\nu s(\rho)$$

である. さらにすべての $k=1, \cdots, N_a{}^+(\Lambda_n)$ に対して

$$S(Y_{k+1}) - S(Y_k) \geqslant a^\nu s(\rho) \tag{5.4.20}$$

が示せたとしよう. このとき, $S(\Lambda)$ の単調減少性と (5.4.20) を順次使うと

$$\begin{aligned} S(\Lambda_n) &\geqslant S(\Lambda_n{}^+) \\ &\geqslant N_a{}^+(\Lambda_n) a^\nu s(\rho) \end{aligned}$$

となる. したがって

$$\varliminf_{n\to\infty} s_{\Lambda_n}(\rho) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{N_a{}^+(\Lambda_n) a^\nu}{|\Lambda_n|} s(\rho) = s(\rho)$$

となるから, (5.4.19) と合わせて, (5.4.18) を得る.

そこで, (5.4.20) を証明する. 仮に, ある k と $\varepsilon > 0$ が存在して,

$$S(Y_{k+1}) - S(Y_k) \leqslant a^\nu (s(\rho) - \varepsilon)$$

となったとする. このとき, $Z \cap Y_{k+1} = \phi$ となる任意の集合 Z に対して,

$$\Lambda = Z \cup Y_k, \qquad \Lambda' = Y_{k+1}$$

として命題 5.3.6—(c) を適用すると

$$\begin{aligned} S(Z \cup Y_{k+1}) - S(Z \cup Y_k) &\leqslant S(Y_{k+1}) - S(Y_k) \\ &\leqslant a^\nu (s(\rho) - \varepsilon) \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

を得る. さて, L を十分大きな自然数とし,

$$C^L = \{ i \in \mathbf{Z}^\nu \mid m_j a \leqslant i_j < (m_j + L) a, \ j = 1, \cdots, \nu \}$$

$$D^L = \{ i \in \mathbf{Z}^\nu \mid (m_j + \alpha) a \leqslant i_j < (m_j + L - \alpha) a, \ j = 1, \cdots, \nu \}$$

とおく. ここで, L, m_j, α は

$$Y_k \subset B \equiv C^L \backslash D^L$$

$$X_{k+1} = \{ i \in \mathbf{Z}^\nu \mid (m_j + \alpha) a \leqslant i_j < (m_j + \alpha + 1) a, \ j = 1, \cdots, \nu \} \subset D^L$$

---

*) 各整数を ‘アルファベット’ の一文字とみれば, 整数の組 $(n_1, \cdots, n_\nu)$ にはひとつの ‘単語’ が対応する. より小さな整数がアルファベットの順において早いとして ‘単語’ $(n_1, \cdots, n_\nu)$ を辞書式に順序づけるのである.

となるように選ぶ．これは，X_k の順序のとり方によって可能である．$B\cup X_{k+1} = (B\backslash Y_k)\cup Y_{k+1}$ とみて，(5.4.21) を使うと

$$S(B\cup X_{k+1})-S(B) \leqslant a^\nu(s(\rho)-\varepsilon).$$

X_k の順序のとり方によって $Y_k+(0,\cdots,0,a)\subset B\cup X_{k+1}$．このとき，$B\cup X_{k+1}$ に立方格子 $X'=X_{k+1}+(0,\cdots,0,a)$ を加えることができる．S の並進不変性によって，すなわち，(5.4.21) を平行移動して，

$$S(Z'\cup Y'_{k+1})-S(Z'\cup Y_k') \leqslant a^\nu(s(\rho)-\varepsilon),$$
$$Z' = B\cup X_{k+1}\backslash Y_k'$$

とすると，$Z'\cap Y'_{k+1}=\phi$ なので

$$S(B\cup X_{k+1}\cup X')-S(B\cup X_{k+1}) \leqslant a^\nu(s(\rho)-\varepsilon) \tag{5.4.22}$$

この手続きは，辞書式順序で，D^L のすべての立方格子を加え終えるまで続けることができ，各回ごとに (5.4.22) の型の不等式を得る．したがって，これらの不等式の両辺をすべて加え合わせることによって

$$S(C^L)-S(B) \leqslant [(L-2\alpha)a]^\nu(s(\rho)-\varepsilon)$$

すなわち，

$$S(C^L) \leqslant S(B)+[(L-2\alpha)a]^\nu(s(\rho)-\varepsilon)$$
$$\leqslant [L^\nu-(L-2\alpha)^\nu]S(C_a)+[(L-2\alpha)a]^\nu(s(\rho)-\varepsilon).$$

$(La)^\nu$ でわり，$L\to\infty$ とすれば，定理 5.4.3 によって

$$s(\rho) \leqslant s(\rho)-\varepsilon.$$

しかし，これは矛盾である．したがって，(5.4.20) が成立する．∎

ここで，今まで全然言及しなかったが，有限系のハミルトニアン，したがって，圧力および内部エネルギーを定義する際の境界条件 (boundary condition) に少し触れておこう．

式 (5.3.1) によって定義されるハミルトニアンは，**自由境界条件** (free boundary condition) のハミルトニアンとよばれる*)．このハミルトニアンは，Λ の中のスピンは Λ の外側のスピンと相互作用しないという状況に対応している．しかし，$\mathrm{B}_1(\subset \mathrm{B}_2)$ に属する相互作用に対しては，自由境界条件の他に，

*) 場の量子論では，Dirichlet 境界条件とよぶ．

次のふたつの境界条件を考えることができる.

（1） **周期的境界条件** (periodic boundary condition)

この場合は，有界領域として

$$\Lambda_n = \{i \in \mathbf{Z}^\nu \mid -n \leqslant i_k < n,\ \ k=1,\cdots,\nu\}$$

という形のものしか考えない．任意の $i \in \mathbf{Z}^\nu$ に対して

$$e_n(i) \in \Lambda_n, \qquad e_n(i)-i \in \{2n\mathbf{Z}^\nu\}$$

となる点 $e_n(i)$ がただひとつ存在することは明らかである．そこで各 $\omega \in \Omega_{\Lambda_n}$ に対して，$\tilde{\omega} \in \Omega$ を

$$\tilde{\omega}_i = \omega_{e_n(i)}$$

によって定義する．すなわち，$\tilde{\omega}_i$ は周期 $2n$ でもって，$i \in \mathbf{Z}^\nu$ を Λ_n の中の点にもどした位置 $e_n(i)$ におけるスピンの値とする．このとき，周期的境界条件に対するハミルトニアン $H_{n,\mathrm{P}}{}^{\Phi}(\Phi \in \mathrm{B}_1)$ は

$$H_{n,\mathrm{P}}{}^{\Phi}(\omega) = \sum_{X \cap \Lambda_n \neq \phi}{}^{*} \Phi(X)(\tilde{\omega}), \qquad \omega \in \Omega_{\Lambda_n} \tag{5.4.23}$$

によって定義される．ただし，$\sum_{X \cap \Lambda_n \neq \phi}^{*}$ は，$i \in \Lambda_n$ に対して，$i = e_n(j)$ となる $j \in X$ がただひとつしかないような X についての和を表わす．明らかに，$H_{n,\mathrm{P}}{}^{\Phi} \in \mathrm{C}(\Omega_{\Lambda_n})$ であって

$$\|H_{n,\mathrm{P}}{}^{\Phi}\| \leqslant (2n)^\nu \|\Phi\| \tag{5.4.24}$$

が成立する．ハミルトニアン $H_{n,\mathrm{P}}{}^{\Phi}$ に対応する圧力，内部エネルギーはそれぞれ

$$P_{n,\mathrm{P}}(\Phi) = \beta^{-1}(2n)^{-\nu} \ln\langle e^{-\beta H_{n,\mathrm{P}}{}^{\Phi}}\rangle_0, \tag{5.4.25}$$

$$u_n{}^{\mathrm{P}}(\rho,\Phi) = (2n)^{-\nu}\langle \rho_\Lambda H_{n,\mathrm{P}}{}^{\Phi}\rangle_0, \qquad \rho \in \mathbf{E}^I \tag{5.4.26}$$

によって定義される．自由境界条件の場合と同様に

$$|P_{n,\mathrm{P}}(\Phi) - P_{n,\mathrm{P}}(\Psi)| \leqslant \|\Phi-\Psi\|, \tag{5.4.27}$$

$$|u_n{}^{\mathrm{P}}(\rho,\Phi)| \leqslant \|\Phi\|, \qquad \Phi, \Psi \in \mathrm{B}_1 \tag{5.4.28}$$

が成立する．

（2） **外部境界条件** (external boundary condition)

あたえられた $\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に対して，各 $\tau \in \Omega_{\Lambda^c}$ を Λ の**外部配位** (external configuration) とよぶ．Λ の外部配位を τ とした外部境界条件のハミルトニアン $H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}$ $(\Phi \in \mathrm{B}_1)$ は

$$H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}(\omega) = \sum_{X\cap\Lambda\neq\phi} \Phi(X)(\omega_{X\cap\Lambda}\times\tau_{X\cap\Lambda^c}), \qquad \omega\in\Omega_\Lambda \tag{5.4.29}$$

によって定義される．$H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}\in \mathrm{C}(\Omega_\Lambda)$ であって，

$$\|H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}\| \leqslant |\Lambda|\,\|\Phi\| \tag{5.4.30}$$

がなりたつ．ハミルトニアン $H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}$ に対応する圧力，内部エネルギーは，それぞれ

$$P_{\Lambda,\tau}(\Phi) = \beta^{-1}|\Lambda|^{-1}\ln\langle e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}}\rangle_0 \tag{5.4.31}$$

$$u_\Lambda{}^\tau(\rho,\Phi) = |\Lambda|^{-1}\langle\rho_\Lambda H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}\rangle_0, \qquad \rho\in\mathbf{E}^I \tag{5.4.32}$$

によって定義される．自由境界条件の場合と同様に

$$|P_{\Lambda,\tau}(\Phi)-P_{\Lambda,\tau}(\Psi)| \leqslant \|\Phi-\Psi\| \tag{5.4.33}$$

$$|u_\Lambda{}^\tau(\rho,\Phi)| \leqslant \|\Phi\|, \qquad \Phi,\,\Psi\in\mathrm{B}_1 \tag{5.4.34}$$

が成立する．

上にあたえたふたつの境界条件での圧力，内部エネルギーの無限体積極限は，自由境界条件のそれらと一致することが示される．すなわち，

定理 5.4.8

（1）　すべての $\Phi\in\mathrm{B}_1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,\mathrm{P}}(\Phi) = P(\Phi) \tag{5.4.35}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n{}^{\mathrm{P}}(\rho,\Phi) = u(\rho,\Phi), \quad \rho\in\mathbf{E}^I. \tag{5.4.36}$$

（2）　すべての $\Phi\in\mathrm{B}_1$ に対して，$\Lambda_n\to\mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) のとき $(\tau_n\in\Omega_{\Lambda_n{}^c})$

$$P_{\Lambda_n,\tau_n}(\Phi) \to P(\Phi) \tag{5.4.37}$$

$$u_{\Lambda_n}{}^{\tau_n}(\rho,\Phi) \to u(\rho,\Phi), \qquad \rho\in\mathbf{E}^I. \tag{5.4.38}$$

証明

（1）　(5.4.27) と B_0 が B_1 で稠密なことによって，$\Phi\in\mathrm{B}_0$ に対して定理を示せばよい．$\Phi\in\mathrm{B}_0$ とすると，$\mathrm{diam}\,X>r$ ならば $\Phi(X)=0$ となる $r>0$ が存在する．そこで n を十分大きくとり，中心を原点にもつ，一辺が $2(n-r)$ の立方格子 $C_{2(n-r)}$ を考える．このとき，定理 5.4.1 の証明と同様にして

$$\begin{aligned}
&\|(2n)^\nu P_{n,\mathrm{P}}(\Phi)-[2(n-r)]^\nu P_{2(n-r)}(\Phi)\| \\
&\leqslant \|H_{n,\mathrm{P}}{}^{\Phi}-H_{2(n-r)}{}^{\Phi}\| \\
&\leqslant |\Lambda_n\backslash C_{2(n-r)}|\,\|\Phi\|
\end{aligned}$$

ここで，Λ_n の定義 (p. 189) を思い出すと

$$|\Lambda_n \backslash C_{2(n-r)}| = (2n)^\nu - [2(n-\nu)]^\nu$$

であるから，両辺に $(2n)^{-\nu}$ をかけて $n \to \infty$ とすれば，(5.4.35) を得る．

一方，$\rho \in \mathbf{E}^I$ とすると，

$$\begin{aligned} &|(2n)^\nu u_n^{\mathrm{P}}(\rho, \Phi) - [2(n-\nu)]^\nu u_{2(n-r)}(\rho, \Phi)| \\ &\quad \leqslant \|H_{n,\mathrm{P}}{}^\Phi - H_{2(n-r)}{}^\Phi\| \end{aligned}$$

であるから，同様にして，(5.4.36) が得られる．

（2） $\Lambda_n \to \mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) とする．定理 5.4.5 の証明と同じ記号を使い，B_j と中心を同じくし，その中に含まれる一辺が $a-2r$ の立方体の和集合を Λ' としよう．$|\Lambda'| = N_a^-(\Lambda_n)(a-2r)^\nu$ である．このとき，

$$\begin{aligned} &|\,|\Lambda_n| P_{\Lambda_n, \tau_n}(\Phi) - (a-2r)^\nu N_a^-(\Lambda_n) P_{a-2r}(\Phi)| \\ &\quad \leqslant \|H_{\Lambda_n, \tau_n}{}^\Phi - H_{\Lambda'}{}^\Phi\| = \|\sum_{X \cap (\Lambda_n \backslash \Lambda') \neq \phi} \Phi(X)(\cdot \times (\tau_n)_{X \cap \Lambda_n^c})\| \\ &\quad \leqslant |\Lambda_n \backslash \Lambda'|\, \|\Phi\|. \end{aligned}$$

$|\Lambda_n \backslash \Lambda'| = |\Lambda_n| - N_a^-(\Lambda_n)(a-2r)^\nu$ であるから，$|\Lambda_n|^{-1}$ を両辺にかけて，$n \to \infty$ とし，そのあとで $a \to \infty$ とすれば，(5.4.37) を得る．(5.4.38) の証明は，(5.4.36) のそれに同様． ∎

以上によって，熱力学的関数の無限体積極限（**熱力学的極限** (thermodynamic limit) ともいう）が van Hove の意味で存在することがわかった．われわれに興味があるのは，この無限系の物理的性質である．手始めに無限系における熱力学的関数の基本的な性質を調べよう．

定理 5.4.9

$$\rho \longmapsto u(\rho, \Phi) \qquad (\Phi \in \mathsf{B}_2)$$

は汎弱位相で連続である．

証明 定理 5.4.2 と同じ記号を用いると

$$u_n(\rho, \Phi) = \frac{1}{n^\nu} \rho(H_n{}^\Phi)$$

であり，$H_n{}^\Phi \in \mathsf{C}(\Omega_{C_n})$ であるから，$u_n(\rho, \Phi)$ は ρ について汎弱位相で連続，すなわち，n をひとつ固定するとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ρ のある近傍

U_ε が存在して，$\rho' \in U_\varepsilon$ ならば

$$|u_n(\rho', \Phi) - u_n(\rho, \Phi)| < \varepsilon \tag{5.4.39}$$

となる．一方，

$$|u(\rho', \Phi) - u(\rho, \Phi)|$$
$$\leqslant |u(\rho', \Phi) - u_n(\rho', \Phi)| + |u_n(\rho', \Phi) - u_n(\rho, \Phi)| + |u_n(\rho, \Phi) - u(\rho, \Phi)|$$

であるが，定理 5.4.2 の証明からわかるように，ε にのみ依存する自然数 $n_0(\varepsilon)$ が存在して，$n \geqslant n_0(\varepsilon)$ ならば

$$\sup_\rho |u(\rho, \Phi) - u_n(\rho, \Phi)| < \varepsilon$$

となる．したがって，そのような n をひとつ固定して (5.4.39) の n とすれば，$\rho' \in U_\varepsilon$ なら，

$$|u(\rho', \Phi) - u(\rho, \Phi)| < 3\varepsilon$$

となる．ゆえに，$\rho \longrightarrow u(\rho, \Phi)$ は汎弱位相で連続である．∎

定理 5.4.10

（1） $s(\cdot)$ はアフィン的である．すなわち，任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$s(t\rho_1 + (1-t)\rho_2) = ts(\rho_1) + (1-t)s(\rho_2), \qquad \rho_1, \rho_2 \in \mathbf{E}^I \tag{5.4.40}$$

（2） $s(\cdot)$ は汎弱位相について $\mathbf{E}^I$ 上の上半連続な関数*)である．

証明

（1） 関数 $t \ln t$ $(t > 0)$ の凸性を用いると，任意の $t \in (0,1)$ に対して

$$S_\Lambda(t\rho_1 + (1-t)\rho_2) \geqslant tS_\Lambda(\rho_1) + (1-t)S_\Lambda(\rho_2), \qquad \rho_1, \rho_2 \in \mathbf{E}^I,$$

両辺を $|\Lambda|$ でわって，$\Lambda \to \mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) とすれば，

$$s(t\rho_1 + (1-t)\rho_2) \geqslant ts(\rho_1) + (1-t)s(\rho_2)$$

となる．一方，

---

*) 一般に位相空間 X 上の実数値関数 f ($-\infty$ の値をとってもよい) が X 上で上半連続であるとは，任意の実数 a に対して $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ が X の開集合となることをいう．

例．$X = \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

は $x = 0$ で不連続だが，上半連続である．

$$(t+u)\ln(t+u) \geqq t\ln t+u\ln u,$$
$$tu\ln tu = t(u\ln u)+u(t\ln t), \qquad t,u>0,$$

を使うと,

$$S_\Lambda(t\rho_1+(1-t)\rho_2) \leqslant S_\Lambda(t\rho_1)+S_\Lambda((1-t)\rho_2)$$
$$= tS_\Lambda(\rho_1)+(1-t)S_\Lambda(\rho_2)-t\ln t-(1-t)\ln(1-t)$$

両辺を $|\Lambda|$ でわって $\Lambda\to\mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) とすれば

$$s(t\rho_1+(1-t)\rho_2) \leqslant ts(\rho_1)+(1-t)s(\rho_2)$$

を得る. したがって $t\in(0,1)$ に対して (5.4.40) がなりたつ.

$t=0$, $t=1$ のときは自明.

(2) 定理 5.4.3 の証明によって

$$s(\rho) = \inf_n s_{2^n}(\rho).$$

上半連続な関数の族の下限はまた上半連続であるので (問題 5.4), $S_{2^n}(\cdot)$ の上半連続性を示せばよい. 以下, $\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ とする.

まず, $S_\Lambda(\rho)>-\infty$ の場合を考える. このときには,

$$\ln\rho_\Lambda\in \mathrm{L}^1(\Omega_\Lambda, \rho_\Lambda d\mu_\Lambda).$$

$\ln\rho_\Lambda$ の上と下を適当に切断して, 有界な関数とし, $\mathrm{C}(\Omega_\Lambda)$ が $\mathrm{L}^1(\Omega_\Lambda, \rho_\Lambda d\mu_\Lambda)$ で稠密なことを用いると, 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\rho(|\ln f-\ln\rho_\Lambda|) < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$|\langle f\rangle_0-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

をみたす $f\in\mathrm{C}(\Omega_\Lambda)$ $(f>0)$ をとることができる. このとき,

$$t\ln t \geqslant t-1, \qquad t>0,$$

を用いると, 任意の $\tilde\rho\in\mathbf{E}^I$ に対して

$$\tilde\rho\left(\ln\frac{\tilde\rho_\Lambda}{f}\right) \geqslant \tilde\rho\left(1-\frac{f}{\tilde\rho_\Lambda}\right) = 1-\langle f\rangle_0 > -\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.4.41}$$

となる.

$$U_\varepsilon = \left\{\rho' \,\middle|\, |(\rho-\rho')(\ln f)| < \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

とおけば，U_ε は汎弱位相における，ρ のひとつの近傍である．$\rho' \in U_\varepsilon$ とすれば，(5.4.41) によって ($\tilde{\rho} = \rho'$ として)

$$S_\Lambda(\rho') = -\rho'(\log \rho_\Lambda') \leqslant \frac{\varepsilon}{3} - \rho'(\log f)$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} - \rho(\log f)$$

$$< \varepsilon + S_\Lambda(\rho)$$

ゆえに，$S_\Lambda(\cdot)$ は上半連続である．

次に，$S_\Lambda(\rho) = -\infty$ の場合を考える．$N > 0$ に対して Ω_Λ 上の有界な関数 $\rho_\Lambda{}^{(N)}$ を

$$\rho_\Lambda{}^{(N)}(\omega) = \begin{cases} \rho_\Lambda(\omega)\ ; & \dfrac{1}{N} \leqslant \rho_\Lambda(\omega) \leqslant N \\ 1 & ;\ \rho_\Lambda(\omega) < \dfrac{1}{N}\ \text{または}\ \rho_\Lambda(\omega) > N\ \text{のとき} \end{cases}$$

によって定義する．このとき，

$$\log \rho_\Lambda{}^{(N)} \in \mathsf{L}^1(\Omega_\Lambda, \rho_\Lambda d\mu_\Lambda)$$

であり，$S_\Lambda(\rho) = -\infty$ によって，

$$\lim_{N\to\infty} \rho(\log\ \rho_\Lambda{}^{(N)}) = +\infty.$$

$\mathsf{C}(\Omega_\Lambda)$ の $\mathsf{L}^1(\Omega_\Lambda, \rho_\Lambda d\mu_\Lambda)$ における稠密性によって

$$\rho(|\log f - \log \rho_\Lambda{}^{(N)}|) < 1,$$

$$|\langle f - \rho_\Lambda{}^{(N)} \rangle_0| < 1$$

をみたす $f \in \mathsf{C}(\Omega_\Lambda)$，$(f > 0)$ をとることができる．任意の $G > 0$ に対して，

$$\rho(\log \rho_\Lambda{}^{(N)}) \geqslant G + 4$$

となるように十分大きく N をとる．このとき $\rho' \in U_{\varepsilon=3}$ ならば，$S_\Lambda(\rho) > -\infty$ の場合における計算と同様にして，

$$S_\Lambda(\rho') \leqslant \langle f \rangle_0 - 1 - \rho'(\ln f)$$

$$\leqslant 2 + \langle \rho_\Lambda{}^{(N)} \rangle_0 - \rho(\log \rho_\Lambda{}^{(N)})$$

$$< -G.$$

以上によって $S_\Lambda(\rho)$ は $S_\Lambda(\rho) = -\infty$ となる場合も含めて，汎弱位相で ρ

に関して上半連続であることがわかった. ∎

定理 5.4.11(Gibbs の変分不等式) すべての $\rho \in \mathbf{E}^I$ と $\Phi \in \mathrm{B}_2$ に対して

$$s(\rho) \leqslant \beta u(\rho, \Phi) + \beta P(\Phi) \tag{5.4.42}$$

が成立する.

証明 (5.3.21)(有界領域における Gibbs の変分不等式)において, $\Lambda \to \mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) の極限をとればよい. ∎

5.5 無限系の平衡状態

前節で熱力学的関数の無限体積極限の存在を見たので, 次にこの無限系における '興味ある状態' を考察しよう.

定義 5.5.1 $\Phi \in \mathrm{B}_2$ とする. $\rho \in \mathbf{E}^I$ が

$$s(\rho) = \beta u(\rho, \Phi) + \beta P(\Phi) \tag{5.5.1}$$

をみたすとき, ρ は相互作用 Φ と逆数温度 β をもつ無限系の**(並進)不変平衡状態**(または単に平衡状態)(invariant equilibrium state) であるという. (β, Φ) に対する無限系の平衡状態の全体を $\Delta^{\beta,\Phi}$ で表わす.

等式 (5.5.1) は **Gibbs の変分等式**とよばれる. これは, $\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ が Gibbs の変分不等式 (5.4.25) において, その等号を成立させる状態であることによる.

命題 5.5.2 任意の $\beta > 0, \Phi \in \mathrm{B}_2$ に対して $\Delta^{\beta,\Phi}$ は汎弱位相でコンパクトな凸集合である.

証明 $\Delta^{\beta,\Phi}$ が凸集合であることは, $s(\cdot), u(\cdot, \Phi)$ がアフィン的であることに注意すればただちにわかる. そこで $\Delta^{\beta,\Phi}$ のコンパクト性を示そう. すでに, 定義 5.1.3 の $\mathbf{E}^I$ はコンパクトであることがわかっているので, $\{\rho_n\} \subset \Delta^{\beta,\Phi}$ が汎弱位相で $\rho_n \to \rho$ $(n \to \infty)$ となっているとき, $\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ を示せば十分である. 定理 5.4.9 によって, 任意の ε に対してある n_0 が存在して $n \geqslant n_0$ ならば

$$|s(\rho_n) - \beta u(\rho, \Phi) - \beta P(\Phi)| < \varepsilon.$$

一方，$s(\rho)$ の上半連続性（定理 5.4.9(2)）によって

$$s(\rho_n) < s(\rho)+\varepsilon.$$

したがって

$$\beta u(\rho, \Phi)+\beta P(\Phi) < s(\rho)+2\varepsilon.$$

これと Gibbs の変分不等式によって ρ は Gibbs の変分等式をみたさなければならないことがわかる．すなわち，$\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ が示された．▮

$\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})$ を $\Delta^{\beta,\Phi}$ の端点の全体としよう：

$$\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi}) = \left\{ \rho \in \Delta^{\beta,\Phi} \,\middle|\, \begin{array}{l} \rho = \lambda\rho_1+(1-\lambda)\rho_2,\ \rho_1 \neq \rho_2, \\ \rho_1, \rho_2 \in \Delta^{\beta,\Phi}, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \text{ なら} \\ \text{ば，}\ \rho = \rho_1 \text{ または } \rho = \rho_2. \end{array} \right\} \tag{5.5.2}$$

$\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})$ の元は**純相**（pure phase）あるいは**純粋状態**（pure state）とよばれる．

Krein-Milman の定理*⁾によって，

命題 5.5.3　$\Delta^{\beta,\Phi}$ は $\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})$ の凸閉包である：

$$\Delta^{\beta,\Phi} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\rho_i \,\middle|\, \rho_i \in \mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi}),\ n \geqslant 1, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}^{-}$$

ここで $\{\cdots\cdots\}^{-}$ は $\{\cdots\cdots\}$ の汎弱位相による閉包を表わす．

平衡状態の性質をさらに詳しく調べよう．

$\Phi \in \mathrm{B}_1$ とし，$W \in \mathrm{C}(\Omega_\Lambda \times \Omega)$ $(\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu))$ を $\omega \in \Omega_\Lambda, \omega' \times \tau \in \Omega$ に対して

$$W(\omega, \omega'\times\tau) = H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}(\omega)-H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}(\omega')$$
$$\omega, \omega' \in \Omega_\Lambda, \tau \in \Omega_{\Lambda^c} \tag{5.5.3}$$

によって定義する．ここで，$H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}$ は外部境界条件に対するハミルトニアンである．$H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}(\omega)$ を定義する相互作用の和は一様収束するので，W は確かに連続関数であって $\|W\| \leqslant 2|\Lambda|\|\Phi\|$ が成立する．$W(\omega, \omega'\times\tau)$ は，物理的には，外部配位 $\tau \in \Omega_{\Lambda^c}$ のもとでの Λ におけるスピン配位 ω と ω' に対応する相互作用エネルギーの差を表わしている．

---

*) Bourbaki (1965).

定義 5.5.4 $\Phi \in \mathsf{B}_1, \rho \in \mathsf{A}_+{}^*$ とする．すべての $\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ と $\omega \in \Omega_\Lambda$ に対して Ω_{Λ^c} 上の測度 $\rho(\omega, d\tau)$ が存在して

$$(1)\quad \rho(A) = \int_{\Omega_\Lambda} d\mu_\Lambda(\omega) \int_{\Omega_{\Lambda^c}} A(\omega\times\tau)\,\rho(\omega, d\tau), \qquad A \in \mathsf{C}(\Omega) \tag{5.5.4}$$

$$(2)\quad \rho(\omega, d\tau) = e^{-\beta W(\omega,\omega'\times\tau)}\rho(\omega', d\tau), \qquad \omega, \omega' \in \Omega_\Lambda \tag{5.5.5}$$

をみたすとき，状態 ρ は相互作用 Φ と逆数温度 β に対する **DLR (Dobrushin-Lanford-Ruelle) 方程式**にしたがうという．

補題 5.5.5 $\rho \in \mathbf{E}^I$ が $\Phi \in \mathsf{B}_1$ と β に対して DLR 方程式をみたすとしよう．このとき，

$$\mu(d\tau) = \langle e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^\Phi}\rangle_0 e^{\beta H_{\Lambda,\tau}{}^\Phi(\omega')}\rho(\omega', d\tau) \tag{5.5.6}$$

とすれば，$\mu(d\tau)$ は Ω_{Λ^c} 上の確率測度であり，

$$\rho_\Lambda(\omega) = \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \langle e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^\Phi}\rangle_0{}^{-1} e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^\Phi(\omega)}\mu(d\tau) \tag{5.5.7}$$

となる．

証明 まず，(5.5.6) の右辺が $\omega' \in \Omega_\Lambda$ に依存しないことを注意しておく．これは (5.5.5) と (5.5.3) による．(5.5.4) で特に $A \in \mathsf{A}_\Lambda$ を考えれば，任意の $\omega' \in \Omega_\Lambda$ に対して

$$\rho_\Lambda(\omega) = \int_{\Omega_{\Lambda^c}} e^{-\beta W(\omega,\omega'\times\tau)}\rho(\omega', d\tau) \tag{5.5.8}$$

となる．(5.5.7) はこの式の右辺を書きなおしたものに他ならない．$\langle\rho_\Lambda\rangle_0 = 1$ であるから (5.5.7) により，$\mu(d\tau)$ は Ω_{Λ^c} 上の確率測度である．∎

$\tau \in \Omega_{\Lambda^c}$ に対して

$$\rho_\tau(A) = \langle e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^\Phi}\rangle_0{}^{-1}\langle e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^\Phi} A\rangle_0 \qquad A \in \mathsf{A} \tag{5.5.9}$$

とおけば $\rho_\tau \in \mathsf{A}_+{}^*$ であって，ρ が $\Phi \in \mathsf{B}_1$ と β に対して DLR 方程式にしたがうならば，(5.5.7) により

$$\rho(A) = \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \mu(d\tau)\rho_\tau(A), \qquad A \in \mathsf{A}_\Lambda \tag{5.5.10}$$

となる．これは，DLR 方程式にしたがう状態の有限体積への制限が外部境界

条件に対する有限系の平衡状態 ρ_τ の $\mu(d\tau)$ による平均であたえられることを示している．

定理 5.5.6　$\Phi \in \mathrm{B}_1$ とする．このとき，$\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ であるための必要十分条件は ρ が並進不変で Φ, β に対する DLR 方程式をみたすことである．

証明　ここでは条件の十分性だけを証明する．必要性の証明には，さらにこみ入った手続きを要する（たとえば，Israel (1979) の §Ⅲ.2 を参照）．そこで，ρ が Φ, β に対して DLR 方程式をみたすとしよう．このとき，ρ が Gibbs の変分等式をみたすことを示せばよい．このとき，

$$\rho_{\tau,\Lambda}(\omega) = \langle e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}}\rangle_0{}^{-1} e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}(\omega)}, \qquad \omega \in \Omega_\Lambda \tag{5.5.11}$$

とすれば，(5.5.7) によって

$$S_\Lambda(\rho) = -\left\langle \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \mu(d\tau)\rho_{\tau,\Lambda} \ln\left(\int_{\Omega_{\Lambda^c}} \mu(d\tau)\rho_{\tau,\Lambda}\right)\right\rangle_0$$

$t\ln t$ $(t>0)$ の凸性と次の補題 5.5.7 の（一般化された）Jensen の不等式を用いると

$$S_\Lambda(\rho) \geqslant -\int_{\Omega_{\Lambda^c}} \mu(d\tau)\langle \rho_{\tau,\Lambda} \ln \rho_{\tau,\Lambda}\rangle_0$$
$$= \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \mu(d\tau) S_\Lambda(\rho_\tau).$$

ここで，

$$S_\Lambda(\rho_\tau) = -\langle \rho_{\tau,\Lambda} \ln \rho_{\tau,\Lambda}\rangle_0$$

は外部境界条件の有限系のエントロピーである．自由境界条件の場合と同様に

$$S_\Lambda(\rho_\tau) = \beta|\Lambda|P_{\Lambda,\tau}(\Phi) + \beta\rho_\tau(H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi})$$

となる．定理 5.4.8 の証明から，任意の $\varepsilon>0$ に対して十分大きく Λ をとれば

$$\|H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi} - H_\Lambda{}^{\Phi}\| \leqslant \varepsilon|\Lambda|$$

とできる．したがって

$$|P_{\Lambda,\tau}(\Phi) - P_\Lambda(\Phi)| \leqslant \varepsilon|\Lambda|$$
$$|\rho_\tau(H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}) - \rho(H_\Lambda{}^{\Phi})| \leqslant \varepsilon|\Lambda|$$

となる．ゆえに，

$$S_\Lambda(\rho) \geqslant \beta|\Lambda|P_\Lambda(\Phi) + \beta\rho(H_\Lambda{}^{\Phi}) - 2\varepsilon|\Lambda|.$$

そこで，$|\Lambda|^{-1}$ を両辺にかけて，$\Lambda \to \mathbf{Z}^\nu$ (van Hove) とすれば

$$s(\rho) \geqslant \beta P(\Phi) + \beta u(\rho, \Phi) - 2\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから，Gibbs の変分不等式と合わせて，ρ が Gibbs の等式をみたすことになる．▮

補題 5.5.7 ((一般化された) Jensen の不等式) $(\mathbf{M}, \mu)$ を確率測度空間とし，f を $\mathbf{M}$ 上の確率変数で $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{M}, \mu)$ とする．このとき，$\mathbf{R}^1$ 上の任意の凸関数 F に対して

$$\int_{\mathbf{M}} F(f) d\mu \geqslant F\left(\int_{\mathbf{M}} f d\mu\right).$$

証明 $F(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ が区間 I 上で凸のとき，I の内点 a に対して

$$F(t) - F(a) \geqslant c(t-a), \qquad t \in I$$

となる定数 c が存在する．これは，

$$[F(t) - a]/(t-a), \qquad t \neq a, t \in I$$

が $F(t)$ の凸性によって非減少関数となることによる．そこで，

$$a = \int_{\mathbf{M}} f d\mu$$

とすれば，

$$F(t) \geqslant F\left(\int_{\mathbf{M}} f d\mu\right) + c\left(t - \int_{\mathbf{M}} f d\mu\right).$$

$t = f$ として μ について両辺を積分すれば，求める不等式を得る．▮

上の定理は，DLR 方程式をみたす並進不変な状態として，平衡状態を定義することも可能であることを示している．

これまで，平衡状態の存在については何もふれなかったが，これについては，次の定理が成立する：

定理 5.5.8 各 $\beta > 0$, $\Phi \in \mathrm{B}_1$ に対して，

$$\Delta^{\beta, \Phi} \neq \phi,$$

すなわち，少なくともひとつの平衡状態が存在する．

証明 有限系の平衡状態をもとにして，無限系の平衡状態を構成する．

$$\rho_\Lambda{}^{\beta,\Phi}(A) \equiv (Z_\Lambda{}^\Phi)^{-1}\langle e^{-\beta H_\Lambda{}^\Phi}A\rangle_0, \quad A \in \mathrm{A}$$
$$\equiv \langle A\rangle_\Lambda$$

としよう ((5.3.23))．明らかに

$$|\rho_\Lambda{}^{\beta,\Phi}(A)| \leqslant \|A\|.$$

ゆえに，$\{\rho_\Lambda{}^{\beta,\Phi}\}$ は Λ について一様有界だから，$\mathrm{A}_+{}^*$ の汎弱位相でのコンパクト性により $\Lambda_n \nearrow \mathbf{Z}^\nu$ となる有界集合列 $\{\Lambda_n\}$ と $\rho \in \mathrm{A}_+{}^*$ があって，

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\Lambda_n}{}^{\beta,\Phi}(A) \equiv \rho(A), \qquad A \in \mathrm{A}, \tag{5.5.12}$$

が存在する．

次に，$\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$，$(\Lambda \subset \Lambda')$ を固定し，$\Lambda' \subset \Lambda_n$ としよう．このとき，任意の $A \in \mathrm{A}_{\Lambda'}$ に対して，

$$\langle A\rangle_{\Lambda_n} = \frac{\int_{\Omega_\Lambda} d\mu_\Lambda \langle Ae^{-\beta K_{\Lambda,\Lambda_n}}\rangle_{\Lambda_n\setminus\Lambda}}{\int_{\Omega_\Lambda} d\mu_\Lambda \langle e^{-\beta K_{\Lambda,\Lambda_n}}\rangle_{\Lambda_n\setminus\Lambda}} \tag{5.5.13}$$

と書ける．ただし，

$$K_{\Lambda,\Lambda_n}(\omega,\tau) = H_{\Lambda_n}{}^\Phi(\omega\times\tau) - H_{\Lambda_n\setminus\Lambda}{}^\Phi(\tau), \qquad \omega\times\tau \in \Omega_\Lambda\times\Omega_{\Lambda_n\setminus\Lambda}$$

一方，任意の $\varepsilon > 0$ に対して n を十分大きくとれば

$$\sup_{\substack{\omega\in\Omega_\Lambda \\ \tau\in\Omega_{\Lambda^c}}} |K_{\Lambda,\Lambda_n}(\omega,\tau) - H_{\Lambda,\tau}{}^\Phi(\omega)| < \varepsilon \tag{5.5.14}$$

となる (問題 5.5)．

(5.5.12) と同様に，

$$\lim_{n\to\infty} \langle B\rangle_{\Lambda_n'\setminus\Lambda} \equiv \langle B\rangle_{\Lambda^c}, \qquad B \in \mathrm{A}_{\Lambda^c} \tag{5.5.15}$$

が存在するような列 $\{\Lambda_n'\}$ $(\Lambda_n' \nearrow \mathbf{Z}^\nu)$ がとれる．はじめから，$\Lambda_n = \Lambda_n'$ として一般性は失われない．$\langle\cdot\rangle_{\Lambda^c}$ は A_{Λ^c} 上の正値線形汎関数であるから Riesz-Markov の定理によって，Ω_{Λ^c} 上の確率測度 ρ_{Λ^c} が存在して

$$\langle B\rangle_{\Lambda^c} = \int_{\Omega_{\Lambda^c}} B d\rho_{\Lambda^c} \tag{5.5.16}$$

となる．(5.5.13)～(5.5.16) によって，

$$\rho(A)=\frac{\int_{\Omega_\Lambda}d\mu_\Lambda(\omega)\int_{\Omega_{\Lambda^c}}d\rho_{\Lambda^c}(\tau)A(\omega\times\tau)e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}(\omega)}}{\int_{\Omega_\Lambda}d\mu_\Lambda(\omega)\int_{\Omega_{\Lambda^c}}d\rho_{\Lambda^c}e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}(\omega)}}$$

となる．そこで，

$$\rho(\omega,d\tau)=\frac{e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}(\omega)}d\rho_{\Lambda^c}(\tau)}{\int_{\Omega_\Lambda}d\mu_\Lambda(\omega)\int_{\Omega_{\Lambda^c}}d\rho_{\Lambda^c}e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^{\Phi}(\omega)}}$$

とおけば，$\rho(\omega,d\tau)$ は Ω_{Λ^c} 上の測度であり，

$$\rho(A)=\int_{\Omega_\Lambda}d\mu_\Lambda(\omega)\int_{\Omega_{\Lambda^c}}\rho(\omega,d\tau)A(\omega\times\tau), \tag{5.5.17}$$

$$\rho(\omega,d\tau)=e^{-\beta W(\omega,\omega'\times\tau)}\rho(\omega',d\tau)$$

をみたす．A^{F} は A で稠密であるから，(5.5.17) はすべての $A\in\mathsf{A}$ に対しても成立することがわかる．こうして，ρ は DLR 方程式をみたす並進不変な状態であることがわかったので，定理 5.5.6 により，$\rho\in\Delta^{\beta,\Phi}$ である．∎

定理 5.5.6 を利用して，$\Phi\in\mathsf{B}_1$ のときの平衡状態 $\Delta^{\beta,\Phi}$ の特徴づけをすることができる．

$\rho\in\mathsf{A}_+{}^*$ に対して

$$\Gamma_\rho=\left\{f\in\mathsf{L}^\infty(\Omega,\rho)\;\middle|\;\begin{array}{c}\text{任意の }\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)\text{ に対して，}\\ \text{ある }\tilde{f}\in\mathsf{L}^\infty(\Omega_{\Lambda^c},\rho)\text{ が存在して}\\ f=\tilde{f}\qquad \rho\text{-a.e.}\end{array}\right\} \tag{5.5.18}$$

とおこう．ここで，$\mathsf{L}^\infty(\Omega,\rho)$ は ρ に対応する測度について可測な有界な関数全体 ($\mathsf{L}^\infty(\Omega_{\Lambda^c},\rho)$ についても同様) で，ρ-a.e. は ρ に対応する測度について‘ほとんどいたるところ’ということを表わす記号である．Γ_ρ は ρ に対する**無限遠での代数** (algebra at infinity) とよばれる．

補題 5.5.9 $f\in\mathsf{L}^\infty(\Omega,\rho)$，$f\geqslant 0$ ($f\neq 0$)，$\rho\in\mathsf{A}_+{}^*$ は DLR 方程式をみたすとする．このとき，$f\in\Gamma_\rho$ であるための必要十分条件は状態 $\rho'(\cdot)=\rho(f\cdot)/\rho(f)$ が DLR 方程式をみたすことである．

証明 まず，$f\in\Gamma_\rho$ としよう．このとき，定義によって，各 $\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に

対して，$\tilde{f} \in \mathrm{L}^{\infty}(\Omega_{\Lambda^c}, \rho)$ が存在して

$$f = \tilde{f} \qquad \rho\text{-a.e.}$$

そこで，

$$\rho'(\omega, d\tau) = \tilde{f}(\tau)\rho(\omega, d\tau)/\rho(f), \qquad \omega \in \Omega_\Lambda,$$

とすれば ρ' が DLR 方程式をみたすことは容易にわかる．逆に，ρ' が DLR 方程式をみたすとしよう．このとき，特に

$$\rho'(g \otimes h), \qquad g \in \mathrm{C}(\Omega_\Lambda), \quad h \in \mathrm{C}(\Omega_{\Lambda^c})$$

を考えることによって

$$\int_{\Omega_\Lambda} d\mu_\Lambda(\omega) g(\omega) \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \rho'(\omega, d\tau) h(\tau)$$
$$= \int_{\Omega_\Lambda} d\mu_\Lambda(\omega) g(\omega) \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \rho(\omega, d\tau) f(\omega \times \tau) h(\tau) \rho(f)^{-1}.$$

$g \in \mathrm{C}(\Omega_\Lambda)$ は任意であるから，h に依存する，Ω_Λ の Baire 集合 C_h で $\mu_\Lambda(\Omega_\Lambda \backslash \mathrm{C}_h) = 0$，したがって $\mu_\Lambda(\mathrm{C}_h) = 1$ であって

$$\int_{\Omega_{\Lambda^c}} \rho'(\omega, d\tau) h(\tau) = \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \rho(\omega, d\tau) f(\omega \times \tau) h(\tau) \rho(f)^{-1}$$
$$\omega \in \mathrm{C}_h \qquad (5.5.19)$$

となるものが存在する．$\mathrm{C}(\Omega_{\Lambda^c})$ は可分であるから，$\mathrm{C}(\Omega_{\Lambda^c})$ で稠密な部分集合 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$，$h_n \in \mathrm{C}(\Omega_{\Lambda^c})$，をとることができる．いま，$0 < a < 1/2$ を固定すれば，Baire 集合の正則性によって，各 n に対して

$$\mathrm{K}_n \subset \mathrm{C}_{h_n}, 1 - \mu_\Lambda(\mathrm{K}_n) < a^n,$$

となるコンパクトな Baire 集合 K_n が存在する．このとき，任意の有限個の $\mathrm{K}_{\alpha_1}, \cdots, \mathrm{K}_{\alpha_n}$ の共通部分は空ではない．すなわち，コンパクト集合，したがって (Hausdorff 性によって) 閉集合である K_n の族 $\{\mathrm{K}_n\}$ は有限交差性をもつ．ゆえに，$\bigcap_n \mathrm{K}_n \neq \phi$ である*)．そこで，$\omega_0 \in \bigcap_n \mathrm{K}_n$ とすれば，すべての n に対して

$$\int_{\Omega_{\Lambda^c}} \rho'(\omega_0, d\tau) h_n(\tau) = \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \rho(\omega_0, d\tau) f(\omega_0 \times \tau) h_n(\tau) \rho(f)^{-1}$$
$$(5.5.20)$$

*) Reed and Simon (1972), 第4章.

が成立する．(5.5.19) の両辺はともに h について連続であり，$\{h_n\}$ は $C(\Omega_{\Lambda^c})$ で稠密であったから，(5.5.20) から，すべての $h\in C(\Omega_{\Lambda^c})$ に対して

$$\int_{\Omega_{\Lambda^c}}\rho'(\omega_0,d\tau)h(\tau)=\int_{\Omega_{\Lambda^c}}\rho(\omega_0,d\tau)f(\omega_0\times\tau)h(\tau)\rho(f)^{-1}$$

を得る．ゆえに，$\tilde{f}(\tau)=f(\omega_0\times\tau)$ とおけば，

$$\rho'(\omega_0,d\tau)=\tilde{f}(\tau)\rho(\omega_0,d\tau)/\rho(f)$$

となる．ρ,ρ' に対して，DLR 方程式を適用すると，

$$\rho'(\omega,d\tau)=\tilde{f}(\tau)\rho(\omega,d\tau)/\rho(f),\qquad \omega\in\Omega_\Lambda$$

となる．これは，

$$f=\tilde{f}\qquad \rho\text{-a.e.}$$

を意味する．ゆえに，$f\in\Gamma_\rho$．∎

これで $\Delta^{\beta,\Phi}$ を特徴づける重要な定理を証明する準備ができた．

定理 5.5.10 $\Phi\in B_1$ とする．このとき，$\Delta^{\beta,\Phi}$ は Choquet 単体である．したがって，各 $\rho\in\Delta^{\beta,\Phi}$ に対して，$\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})$ 上に台をもつただひとつの確率測度 μ_ρ が存在して，$\Delta^{\beta,\Phi}$ 上の任意のアフィン的な連続関数 f に対して

$$f(\rho)=\int_{\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})}d\mu_\rho f \tag{5.5.21}$$

が成立する*)．

この定理の証明に入る前に **Choquet 単体** (Choquet simplex) について復習しておこう．

K を局所凸位相線形空間 $\mathbf{E}$ のコンパクトで凸な部分集合とする．ここで，K は原点 O を通らない超平面の中に含まれていると仮定する（こうしても一般性は失われない．というのは $\mathbf{E}\times\mathbf{R}^1$ の中に $\mathbf{E}$ を超平面 $\mathbf{E}\times\{1\}$ として埋めこむことができるからである）．

$$C=\{\alpha x\mid 0\leqslant\alpha<\infty, x\in K\}$$

とおく．C は K を通る錐とよばれる．このとき，$x,y\in\mathbf{E}$ に対して

*) 凸集合 C 上の関数 f がアフィン的であるとは，任意の $\alpha\in[0,1]$，$x,y\in C$ に対して $f(\alpha x+(1-\alpha)y)=\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$ がなりたつときをいう．

$$x-y\in \mathrm{C} \text{ ならば } x\geqslant y$$

として，$\mathbf{E}$ の中に順序関係 $\geqslant$ が定義できる（$x\geqslant y, y\geqslant x \Longrightarrow x=y$ の証明に $O\notin \mathrm{K}$ が使われる）．C がこの順序関係について束をなすとき，すなわち，任意の $x,y\in \mathrm{C}$ に対して，最小上界 $x\vee y\in \mathrm{C}$ および最小下界 $x\wedge y\in \mathrm{C}$ が存在するならば*)，K を Choquet 単体という．

Choquet 単体に対して次の重要な定理がある．

［定理］（Choquet and Meyer (1963)）

距離づけ可能なコンパクト凸集合 K が Choquet 単体であるための必要十分条件は，各 $x\in \mathrm{K}$ に対して，$\mathcal{E}(\mathrm{K})$（K の端点全体）上に台をもつただひとつの確率測度 μ_x が存在して，K 上の任意のアフィン的な連続関数 f に対して

$$f(x)=\int_{\mathcal{E}(\mathrm{K})} d\mu_x(y)f(y)$$

が成立することである．

この定理の証明はしない（Phelps (1966) も参照）．

定理 5.5.10 は上の定理を（$\mathrm{K}=\Delta^{\beta,\Phi}$ として）応用することによって証明される．すなわち，$\Delta^{\beta,\Phi}$ が Choquet 単体であることを示せばよい；$\Delta^{\beta,\Phi}$ の距離づけ可能性は，$\mathrm{C}(\Omega)$ が可分であること，したがって $\mathrm{C}(\Omega)$ 上の連続線形汎関数の全体が汎弱位相に関して距離づけ可能であることからわかる．局所凸空間の距離づけについては，たとえば，Reed and Simon (1972), § V. 2 参照．

定理 5.5.10 の証明

$\Delta^{\beta,\Phi}$ を通る錐を C としよう．$\rho_1,\rho_2\in \mathrm{C}$ かつ $\rho_1\geqslant\rho_2$ ならば，ある $\alpha\geqslant 0$ と $\rho\in\Delta^{\beta,\Phi}$ が存在して $\rho_1-\rho_2=\alpha\rho$．したがって測度の順序**)として $\rho_1\geqslant\rho_2$．逆に，$\rho_1,\rho_2\in \mathrm{C}$ が測度の順序として $\rho_1\geqslant\rho_2$ であれば，$\rho=\rho_1-\rho_2\in \mathrm{C}$ となる．これは，ρ_1,ρ_2 が DLR 方程式をみたすこと および DLR 方程式の線形性によって，ρ も DLR 方程式をみたすことによる．したがって，C における

---

*) $x\vee y$ とは，i) $x\leqslant x\vee y, y\leqslant x\vee y$; ii) $x\leqslant z, y\leqslant z$ ならば $x\vee y\leqslant z$，をみたす元をいう．同様に $x\wedge y$ は，i) $x\wedge y\leqslant x, x\wedge y\leqslant y$; ii) $z\leqslant x, z\leqslant y$ ならば $z\leqslant x\wedge y$，をみたす元である．

**) 任意の $A\geqslant 0$ に対して $\rho_1(A)\geqslant\rho_2(A)$ となるとき，測度の順序を $\rho_1\geqslant\rho_2$ と定義する．

順序と測度としての順序は一致する．任意の $\rho\in\mathsf{C}$ に対して，

$$\mathsf{C}_\rho=\{\rho'\in\mathsf{C}\mid\rho'\leqslant\rho\ (\text{測度としての順序})\}$$

が束をなすことが示せれば C も束をなすことは容易にわかる．そこで，C_ρ が束をなすことを示そう．$\rho'\in\mathsf{C}_\rho$ は ρ について絶対連続だから，Radon-Nykodim の定理によって ただひとつの $f\in\mathsf{L}^1(\Omega,\rho)$ が存在して

$$\rho'(\cdot)=\rho(f\cdot)$$

となる．$\rho'\leqslant\rho$ だから，実は $0\leqslant f\leqslant 1$ でなければならない．したがって補題 5.5.9 によって $f\in\Gamma_\rho$．また，ρ',ρ が並進不変だから，f も並進不変である．逆に，$f\in\Gamma_\rho$, $(0\leqslant f\leqslant 1)$ に対して $\rho'(\cdot)=\rho(f\cdot)/\rho(f)$ とすれば，補題 5.5.9 によって ρ' は DLR 方程式をみたし，

$$\rho(f)\rho'\leqslant\rho.$$

ゆえに $\rho(f)\rho'\in\mathsf{C}_\rho$．$f$ が並進不変ならば，ρ' も並進不変であるから

$$\mathsf{C}_\rho=\{\rho(f\cdot)\mid f\ \text{は並進不変,}\ 0\leqslant f\leqslant 1,\ f\in\Gamma_\rho\}$$

となる．C_ρ の元の順序は，Γ_ρ における順序*) と 1 対 1 に対応し，Γ_ρ の並進不変な元の全体は Γ_ρ における順序に関して束をなすことがわかる．したがって，C_ρ も束をなす．∎

次に平衡状態の一意性の問題に触れておこう．そのために状態のひとつのクラスを導入する：

定義 5.5.11 $\rho\in\mathbf{E}^I$ とする．任意の $A\in\mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ (局所観測量の代数) に対して，ある $\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ が存在して

$$|\rho(AB)-\rho(A)\rho(B)|\leqslant\|B\|\qquad B\in\mathsf{A}_{\Lambda^c}\tag{5.5.22}$$

となるなら，ρ の**相関**(correlation) が**短距離**(short range) 的であるという．

ρ の相関が短距離的ならば，任意の $\varepsilon>0$ と $A\in\mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ に対して，ある $\Lambda_\varepsilon\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ が存在して

$$|\rho(AB)-\rho(A)\rho(B)|\leqslant\varepsilon\|B\|,\qquad B\in\mathsf{A}_{\Lambda_\varepsilon^c}$$

となる (上の定義で A を $\varepsilon^{-1}A$ で置き換えればよい)．一方，任意の $\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$

*) Γ_ρ における順序は，$f_1\leqslant f_2\Leftrightarrow f_1(\omega)\leqslant f_2(\omega)$, ρ-a.e. ω, によって定義される．

と $B\in \mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ に対して，$|i|$ $(i\in \mathbf{Z}^{\nu})$ を十分大きくとれば，必ず $\tau_i B\in \mathsf{A}_{\Lambda^c}$ とできる．したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$|i|$ を十分大きくとれば，任意の $A, B\in \mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ に対して

$$|\rho(A\tau_i B)-\rho(A)\rho(B)|\leqslant \varepsilon\|B\|$$

となる $(\rho(\tau_i B)=\rho(B), \|\tau_i B\|=\|B\|$ に注意)．すなわち

$$\lim_{|i|\to\infty}\rho(A\tau_i B)=\rho(A)\rho(B)$$

が成立する．この性質は ρ のクラスター性とよばれる．

定理 5.5.12　(一意性定理)　$\Phi\in \mathsf{B}_1, \beta>0$ を固定する．このとき，任意の $\rho\in\Delta^{\beta,\Phi}$ の相関が短距離的ならば，実は $\Delta^{\beta,\Phi}$ はただひとつの元からなる．

この定理の証明は後に行なう（補題 5.5.14 の次)．ここでは証明しないが，次の定理も成立する．

定理 5.5.12′　$\Phi\in \mathsf{B}_0$ とする．このとき，ある $\beta_0>0$ が存在して，$\beta\in(0, \beta_0)$ に対して，$\Delta^{\beta,\Phi}$ はただひとつの元からなる．

証明については，Dobrushin (1968), Lanford III (1973) 等を参照．

補題 5.5.13　ρ の相関が短距離的であるための必要十分条件は，$\Gamma_\rho=\mathbf{C}$ となることである．

証明　ρ の相関が短距離的でないとしよう．$\{\Lambda_n\}$ を $\Lambda_n\nearrow\mathbf{Z}^{\nu}$ となる $\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^{\nu})$ の元の列とすれば，ある $A\in\mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ に対して列 $\{B_n\}$，$B_n\in\mathsf{A}_{\Lambda_n^c}$ が存在して

$$|\rho(AB_n)-\rho(A)\rho(B_n)|>\|B_n\|=1$$

((5.5.22) の両辺とも B について線形であるので，$\|B_n\|=1$ として一般性を失わない)．A における単位球は $\mathsf{L}^2(\Omega,\rho)$ における*)弱位相に関してコンパクトであるから，$\{B_n\}$ の部分列 $\{B_{n'}\}$ を適当に選べば，弱収束の意味である $B\in\mathsf{L}^2(\Omega,\rho)$ に収束する．このとき，

$$B\in\bigcap_{\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^{\nu})}\mathsf{L}^{\infty}(\Omega_{\Lambda^c},\rho)$$

---

*)　$\mathsf{L}^2(\Omega,\rho)$ は ρ に対応する測度についての L^2 空間．

となることは容易にわかる（任意の $\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)$ に対して，n を十分大きくとれば，$\Lambda^c\supset\Lambda_n^c$，したがって $B_n\in \mathsf{C}(\Omega_{\Lambda^c})$，ゆえに $B\in \mathsf{L}^\infty(\Omega_{\Lambda^c},\rho)$ である）．

$$\Gamma_\rho=\bigcap_{\Lambda\in\mathcal{P}_f(\mathbf{Z}^\nu)}\mathsf{L}^\infty(\Omega_{\Lambda^c},\rho)$$

に他ならないから，$B\in\Gamma_\rho$．さらに，

$$|\rho(AB)-\rho(A)\rho(B)|=\lim_{n'\to\infty}|\rho(AB_{n'})-\rho(A)\rho(B_{n'})|\geqslant 1.$$

したがって，B は定数ではあり得ない．

逆に，ρ の相関が短距離的であるとしよう．$A\in\mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ とし，Λ を (5.5.22) が成立するようなものとする．いま，$C\in\Gamma_\rho$ とすれば，$\mathsf{C}(\Omega_{\Lambda^c})$ が $\mathsf{L}^2(\Omega_{\Lambda^c},\rho)$ で稠密であることによって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\|C-B\|_2<\varepsilon$ となる*)ような，$B\in\mathsf{C}(\Omega_{\Lambda^c})$ で $\|B\|\leqslant\|C\|_\infty$ となるものがとれる．B に対しては，(5.5.22) が成立することを使えば

$$|\langle 1,AC\rangle_2-\langle 1,A\rangle_2\langle 1,C\rangle_2|\leqslant 2\varepsilon\|A\|+\|C\|_\infty$$

となることがわかる．$\varepsilon>0$ は任意であったから

$$|\langle 1,AC\rangle_2-\langle 1,A\rangle_2\langle 1,C\rangle_2|\leqslant\|C\|_\infty.$$

C は Λ には依存しないので，これは，任意の $A\in\mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ と $C\in\Gamma_\rho$ について成立する．したがって，特に，A を λA として $\lambda\to\infty$ とすれば，

$$\langle 1,AC\rangle_2=\langle 1,A\rangle_2\langle 1,C\rangle_2$$

を得る．$A\in\mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ は $\mathsf{L}^2(\Omega,\rho)$ で稠密だから，

$$C=\langle 1,C\rangle_2,\qquad \rho\text{-a.e.}$$

となる．すなわち，C はほとんどいたるところ定数である．∎

補題 5.5.14 $\Phi\in\mathsf{B}_1$ とし，$\Gamma^{\beta,\Phi}$ を Φ,β に対する DLR 方程式をみたす状態の全体としよう（必ずしも並進不変状態である必要はない）．このとき，ρ が $\Gamma^{\beta,\Phi}$ の端点であるための必要十分条件は，ρ の相関が短距離的なことである．

証明 まず，$\rho\in\Gamma^{\beta,\Phi}$ の相関が短距離的でないとしよう．このとき補題 5.5.13 によって $\Gamma_\rho\neq\mathbf{C}$．したがって，定数ではない $f\in\Gamma_\rho$，$(0\leqslant f\leqslant 1)$ が存在する．ρ は DLR 方程式をみたすので補題 5.5.9 によって，

*) 簡単のため，ここでは，$\mathsf{L}^2(\Omega_\Lambda,\rho)$ の内積およびノルムをそれぞれ，$\langle\cdot,\cdot\rangle_2$，$\|\cdot\|_2$ で表わす．

$$\rho' = \frac{\rho(f\cdot)}{\rho(f)}$$

も DLR 方程式をみたす．すなわち，$\rho' \in \Gamma^{\beta,\Phi}$．しかも，$f$ は定数ではないから，$\rho' \neq \rho$ である．

$$\rho'' = \frac{\rho((1-f)\cdot)}{\rho(1-f)}$$

とおけば，$\rho'' \in \Gamma^{\beta,\Phi}$，$\rho' \neq \rho''$ で

$$\rho = \rho(f)\rho' + (1-\rho(f))\rho''$$

と書ける．ゆえに，ρ は端点ではない．

逆に ρ は端点ではないとしよう．このとき，$\rho', \rho'' \in \Gamma^{\beta,\Phi}(\rho' \neq \rho'')$，と $\alpha \in (0,1)$ が存在して

$$\rho = \alpha\rho' + (1-\alpha)\rho''$$

と書ける．$\rho' \leqslant \rho$ であるので，ρ' は ρ について絶対連続，したがって，

$$0 \leqslant f \leqslant 1,\ \text{かつ}\ \rho' = \rho(f\cdot)/\rho(f)$$

となる $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \rho)$ が存在する（定理 5.5.10の証明参照）．ρ', ρ ともに DLR 方程式をみたすので，補題 5.5.9 によって $f \in \Gamma_\rho$ である．f が定数ならば $\rho = \rho'$ となって矛盾があるから，f は定数ではない．よって補題 5.5.13 によって，ρ の相関は短距離的でない．∎

定理 5.5.12 の証明　$\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ の相関が短距離的であるとしよう．$\Delta^{\beta,\Phi} \subset \Gamma^{\beta,\Phi}$（定理 5.5.6）および補題 5.5.14 によって，ρ は端点であることがわかる．したがって，$\Delta^{\beta,\Phi}$ の点はすべて端点である．ゆえに，$\Delta^{\beta,\Phi}$ は高々ひとつの元からなる．一方，定理 5.5.8 によって $\Delta^{\beta,\Phi} \neq \phi$ であったから，$\Delta^{\beta,\Phi}$ はただひとつの元のみからなることが結論される．∎

5.6　相転移と対称性の（自発的）破れ

巨視的な熱力学系のひとつの重要な物理的現象に相転移がある．格子スピン系に関わる典型的な例は，鉄のような強磁性体の自発磁化の現象である．

これは，ある臨界温度以下では，強磁性体に外から磁場をかけていったん磁

化すると，磁場をとりさっても磁化が残るという現象をさす*)，巨視的な原子のスピンが，熱的な擾乱にもかかわらず，ある一定方向にそろったままになるわけで，そのため，系の状態はスピン空間の回転に関して不変でない．すなわち，回転の対称性が破れている．

超伝導や超流動など，他の相転移現象においても，対称性の破れがおこっていることが知られている（物理的な議論については，たとえば，江沢・恒藤(1977) の 19 章，などを参照)．

この節では，前節まで考えてきた格子スピン系における相転移の数学的に正確な定義をあたえ，相転移と対称性の破れとの関連を考察する．

定義 5.6.1　$\Phi \in \mathrm{B}_2$ とする．$\Delta^{\beta,\Phi}$ の端点の数が β の関数として一定でないとき，相互作用 Φ をもつ無限格子系は**相転移** (phase transition) をもつという．

たとえば，ある β に対して $\Delta^{\beta,\Phi}$ がただひとつの元からなることがわかれば（定理 5.5.12 参照），ちがう β' に対して $\Delta^{\beta',\Phi}$ が 2 つ以上の端点をもつことを証明することによって，相転移の存在を示すことができる．そこで，$\Delta^{\beta,\Phi}$ が 2 つ以上の端点をもつ条件を調べよう．これは，$\Delta^{\beta,\Phi}$ が端点でない点を含む条件を調べることに他ならない．

補題 5.6.2　$\rho \in \mathbf{E}^I$ とし，C_n を (5.4.1) であたえられる，一辺 n の立方

*) 普通は，外からかける磁場がスピン同士の相互作用に比べて微弱なので，磁場をとりさるまでもない．磁化の履歴曲線（図 5.1）において外からかける磁場を 0 にすると磁化が減るのは '磁区' の存在によるのであって，スピン同士の相互作用にとっては本質的でない．実際，この磁化の減少は材料の処理に敏感で，ほとんど 0 にすることもできる．

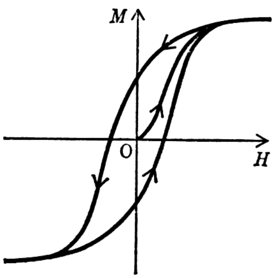


図 5.1

体とする.

$$\tau^{(n)} = n^{-\nu} \sum_{i \in C_n} \tau_i \tag{5.6.1}$$

このとき, $\mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ の強収束の意味で,

$$\lim_{n\to\infty} \tau^{(n)} \equiv P \tag{5.6.2}$$

は存在し, P は射影演算子で

$$\mathrm{R}(P) = \{ f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \rho) \mid \text{すべての } i \in \mathbf{Z}^\nu \text{ に対して, } \tau_i f = f \}$$

となる. すなわち, P の値域は並進不変な $\mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ 関数の全体である.

証明　$i \in \mathbf{Z}^\nu \longrightarrow \tau_i$ が並進群の $\mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ 上でのユニタリ表現をあたえることに注意し, 平均エルゴード定理 (von Neumann のエルゴード定理)*) を適用すればよい. 本質的に $\nu = 1$ の場合を考えればよいことに注意せよ (問題 5.6). ∎

補題 5.6.2 によって, 任意の $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ に対して

$$\begin{aligned} C(f) &= \lim_{n\to\infty} \langle |\tau^{(n)} f|^2 \rangle \\ &= \langle |Pf|^2 \rangle \end{aligned} \tag{5.6.3}$$

が定義される. ここで $\langle \cdot \rangle$ は ρ に対応する測度による期待値を表わす.

定義 5.6.3　$\rho \in \mathbf{E}^I$ が, すべての $A \in \mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ に対して

$$C(A) = |\langle A \rangle|^2 \tag{5.6.4}$$

をあたえるとき, ρ は**エルゴード的**であるという.

注意　実は, すべての<u>実数値関数</u> $A \in \mathrm{A}$ に対して (5.6.4) を要求すれば, すべての $A \in \mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ に対して (5.6.4) が成立する.

補題 5.6.4　すべての $\rho \in \mathbf{E}^I$ と $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ に対して

$$|\langle f \rangle|^2 \leqq C(f). \tag{5.6.5}$$

---

*) たとえば, Reed and Simon (1972), § II. 5.

等号は，Pf がほとんどいたるところ定数のときに限られる．

証明 Schwarz の不等式によって

$$C(f) \geqslant |\langle 1, Pf \rangle|^2$$

$P\mathbf{1}=1$ であるので，(5.6.5) を得る．等号は，Schwarz の不等式で等号が成立するときであるから，Pf がほとんどいたるところ 1 の定数倍のときである．∎

定理 5.6.5 $\rho \in \mathbf{E}^I$ がエルゴード的であるための必要十分条件は，$\mathrm{R}(P)$ が定数関数のみからなること，すなわち，並進不変な $\mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ 関数がほとんどいたるところ定数となることである．

証明 ρ がエルゴード的ならば，定義と補題 5.6.4 とによって，すべての $A \in \mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ に対して PA は定数関数，すなわち，P の値域は定数関数のみからなることがわかる．逆に $\mathrm{R}(P)$ が定数関数のみからなるとすれば，補題 5.6.4 によって，すべての $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ に対して (5.6.5) で等号が成立，すなわち，ρ はエルゴード的である．∎

定理 5.6.6 $\rho \in \mathbf{E}^I$ が $\mathbf{E}^I$ の端点であるための必要十分条件は，ρ がエルゴード的であることである．

証明 ρ が端点でないとすると，$\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{E}^I$ $(\rho \neq \rho_1, \rho_2)$ と $\alpha \in (0,1)$ が存在して

$$\rho = \alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2$$

と書ける．ある $A \in \mathrm{A}$ が存在して，$\rho_1(A) \neq \rho_2(A)$ であるから，

$$|\rho(A)|^2 < \alpha|\rho_1(A)|^2 + (1-\alpha)|\rho_2(A)|^2$$

となる．これと (5.6.5) によって

$$|\rho(A)|^2 < C(A)$$

を得る．すなわち，ρ はエルゴード的ではない．

逆に ρ がエルゴード的でないとすると，定理 5.6.5 によって並進不変な関数 $f \in \mathrm{R}(P)$ で定数でないものが存在する．このとき，複素平面 $\mathbf{C}$ のある開集合 $\mathcal{O}$ が在存して $B \equiv f^{-1}(\mathcal{O})$ に対する定義関数 χ_B は並進不変で，

$$0 < \langle \chi_B \rangle < 1$$

となる．そこで

$$\rho_1 = \langle\chi_B\rangle^{-1}\rho(\chi_B\,\cdot),$$
$$\rho_2 = (1-\langle\chi_B\rangle)^{-1}\rho((1-\chi_B)\,\cdot)$$

とおけば，$\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{E}^I (\rho_1 \neq \rho_2)$ であって

$$\rho = \langle\chi_B\rangle\rho_1 + (1-\langle\chi_B\rangle)\rho_2$$

と書ける．したがって，ρ は端点ではない．∎

系 5.6.7　$\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ が $\Delta^{\beta,\Phi}$ の端点であるための必要十分条件は，ρ がエルゴード的であることである．

証明　十分条件の証明は，定理 5.6.6 と同様である．そこで，ρ が $\Delta^{\beta,\Phi}$ の端点であるとする．$\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ だから，

$$s(\rho) = \beta[u(\rho, \Phi) + P(\Phi)]$$

がなりたつ．いま仮に，ρ が $\mathbf{E}^I$ の端点でないとすると，$\lambda \in (0,1)$ と ρ_1, $\rho_2 \in \mathbf{E}^I$, $(\rho_1 \neq \rho_2)$ が存在して

$$\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$$

と書ける．ρ が $\Delta^{\beta,\Phi}$ の端点ということから，ρ_1, ρ_2 の両方が $\Delta^{\beta,\Phi}$ の元だということはあり得ない．そこで，$\rho_1 \notin \Delta^{\beta,\Phi}$ とすると，Gibbs の変分不等式

$$s(\rho_1) < \beta[u(\rho_1, \Phi) + P(\Phi)]$$

がなりたつ．ρ_2 については，等号も含めて，

$$s(\rho_2) \leqslant \beta[u(\rho_2, \Phi) + P(\Phi)]$$

がなりたつ．これらの不等式と，$s(\cdot), u(\cdot, \Phi)$ のアフィン性を用いると

$$s(\rho) = \lambda s(\rho_1) + (1-\lambda)s(\rho_2)$$
$$< \beta[u(\rho, \Phi) + P(\Phi)]$$

となって，矛盾である．したがって，ρ は $\mathbf{E}^I$ の端点である．ゆえに，定理 5.6.6 によって，ρ はエルゴード的である．∎

系 5.6.7 によって，$\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ が端点でないことを示すためには

$$|\langle A\rangle|^2 < C(A)$$

となる $A \in \mathrm{L}^2(\Omega, \rho)$ をさがせばよい．これは

$$\Delta_n A = n^{-\nu} \sum_{i \in C_n} \{A_i - \langle A_i \rangle\}, \qquad (A_i \equiv \tau_i A) \tag{5.6.6}$$

とおけば，

$$\lim_{n\to\infty} \langle \overline{\Delta_n A}\, \Delta_n A \rangle = C(A) - |\langle A \rangle|^2 > 0 \tag{5.6.7}$$

と書きなおせる．この左辺の量が，相転移を議論する際によく物理の文献に現われるものである．

次に，相転移と対称性の自発的破れの関連を調べよう．

G を S 上の1対1かつ上への連続変換群で，しかも，コンパクトな位相群とする．$\{\tau_g \mid g \in G\}$ を (5.2.7) によってあたえられる G の A 上における表現とする．

G-不変な平衡状態の存在が次によってあたえられる：

定理 5.6.8 $\Phi \in \mathsf{B}_1$ を G-不変な相互作用とし，S 上の単独スピン分布 μ_0 は G-不変であるとする．このとき，すべての $\beta > 0$ に対して，$\Delta^{\beta,\Phi}$ は少なくともひとつの G-不変な平衡状態を含む．

証明 有限系の平衡状態 $\rho_\Lambda{}^{\beta,\Phi}$ は，上の仮定のもとで，G-不変であることがわかる．したがって，定理 5.5.8 で構成した平衡状態は G-不変である．∎

G はコンパクト位相群であるから G 上に規格化された不変測度 $d\mu(g)$ が存在する（ポントリャーギン (1957)，5章）．$A \in \mathsf{L}^2(\Omega, \rho)$ $(\rho \in \mathbf{E}^I)$ に対して

$$\tilde{A} = A - \int_G d\mu(g) \tau_g A \tag{5.6.8}$$

を定義する．

定理 5.6.9 $\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ を G-不変な状態で端点でないとし，ある $\tilde{A} \neq 0$ に対して，エルゴード性が破れているとする．このとき，ある端点の空でない集合 $\mathbf{E} \subset \mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})$ が存在して任意の $\chi \in \mathbf{E}$ は G-不変ではない．

証明 $\rho \in \Delta^{\beta,\Phi}$ による期待値を $\langle \cdot \rangle_\rho$ で表わす．ρ は G-不変であるので，$\langle \tilde{A} \rangle_\rho = 0$ である．したがって，$C_\rho(\tilde{A}) > 0$ となる．ここで $C_\rho(\tilde{A})$ は ρ に対する $C(\tilde{A})$ である．ρ は端点ではないので定理 5.5.10 によって

$$\langle\tilde{A}\rangle_\rho=\int_{\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})}d\mu_\rho(\chi)\langle\tilde{A}\rangle_\chi$$

と書ける．ここで，μ_ρ は $\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})$ 上に台をもつ確率測度で，μ_ρ の台は少なくとも2つの端点を含む．χ は端点であるから，エルゴード的であり，したがって，

$$|\langle\tilde{A}\rangle_\chi|^2=C_\chi(\tilde{A}).$$

ゆえに

$$\int_{\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})}d\mu_\rho(\chi)|\langle\tilde{A}\rangle_\chi|^2=\int_{\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})}d\mu_\rho(\chi)C_\chi(\tilde{A})$$
$$=C_\rho(\tilde{A})>0.$$

すなわち，ある $\mathbf{E}\subset\mathcal{E}(\Delta^{\beta,\Phi})$ が存在して，$\mu_\rho(\mathbf{E})>0$，$\chi\in\mathbf{E}$ に対して $\langle\tilde{A}\rangle_\chi\neq 0$．一方，すべての $\chi\in\mathbf{E}$ に対して，

$$\int_G d\mu(g)\langle\tau_g\tilde{A}\rangle_\chi=0$$

となる．ゆえに，すべての $\chi\in\mathbf{E}$ に対して状態 $\langle\cdot\rangle_\chi$ は G-不変ではない．∎

上の定理は，相転移をもつある種の系に対しては，相互作用があるコンパクト位相群 G に対して不変であっても，G-不変でない平衡状態が存在することを示している．このような系は**自発的対称性の破れ**をもつという．この場合，G-不変でない状態は $\tau_g(g\in G)$ によって別の純粋状態に写されるのである（χ が $\Delta^{\beta,\Phi}$ の端点ならば $\chi(\tau_g\cdot)$ も $\Delta^{\beta,\Phi}$ の端点である）．後に，実際に具体的なモデルについて相転移の存在と対称性の自発的破れを示す（6章4節参照）．

●演習問題

5.1　(i)　一般に，$\mathbf{K}$ をコンパクト Hausdorff 空間，$\mathrm{C}(\mathbf{K})$ を $\mathbf{K}$ 上の連続関数の全体とする．このとき，$\mathrm{C}(\mathbf{K})$ 上の任意の正値線形汎関数 ρ は有界であり，そのノルム

$$\|\rho\|_*\equiv\sup_{\substack{f\in\mathrm{C}(\mathbf{K})\\ f\neq 0}}\frac{|\rho(f)|}{\|f\|_\infty}\qquad(\|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbf{K}}|f(x)|)$$

は

$$\|\rho\|_*=\rho(1)$$

によってあたえられることを示せ.

(ii) X を可分な Banach 空間, X 上の有界線形汎関数の全体を X^* とする. このとき, X^* は汎弱位相についてコンパクトである. すなわち, X^* の元の列 $\{\varphi_n\}$ が有界であれば, その適当な部分列 $\{\psi_n\}$ が存在して, $\{\psi_n\}$ はある $\varphi\in X^*$ に汎弱収束する. このこと示せ.

注: X^* の汎弱位相とは, $\varphi_n\to\varphi$ $(n\to\infty)$ $(\varphi_n,\varphi\in X^*)$ であることを $\varphi_n(f)\to\varphi(f), \forall f\in X$, によってあたえる位相であり, $\varphi\in X^*$ のノルムは

$$\|\varphi\|_* = \sup_{\substack{f\in X\\ f\neq 0}} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|}, \qquad (\|f\| \text{ は } X \text{ における } f \text{ のノルム})$$

によって定義する (それが存在する場合).

(iii) (i), (ii) を使い, 定義 3.1.1 の次に述べた主張を証明せよ.

5.2 $\mathbf{E}^I$ は凸集合であり, 汎弱位相についてコンパクトであることを示せ.

5.3 定理 3.4.1 が $\Phi\in \mathrm{B}_0$ の場合に示せたとして, これを $\Phi\in\mathrm{B}_2$ の場合に拡張せよ.

5.4 X を一般の位相空間, $\{f_n(x)\}_{n=1}$ を X 上の上半連続な関数の列とする. このとき

$$f(x)=\inf_n f_n(x)$$

も上半連続であることを示せ.

5.5 補題 5.6.2 の詳しい証明をあたえよ.

●文献

Bourbaki, N. (1965), *Eléments de Mathématique*: *Intégration*, Hermann, Paris.

Bratteli, O. and D. W. Robinson (1979), *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* I —— *C*- and W*-Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*, Springer-Verlag, New York.

Choquet, G. and P. A. Meyer (1963), Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier **13**, 139–154.

Dobrushin, P. L. (1968), The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity, Theor. of Prob. and its Appl. **13**, 197–224.

江沢 洋・恒藤敏彦編 (1977), 『量子物理学の展望——50年の歴史に立って (上)』, 岩波書店.

江沢 洋 (1978), 量子力学の構造, 湯川・豊田 (1978), 第IV部.

Fröhlich, J. (1978), The pure phases (harmonic functions) of generalized processes, or: Mathematical Physics of phase transitions and symmetry breaking, Bull. A. M. S. **84,** 165–193.

Israel, R. (1979), *Convexity in the Theory of Lattice Gases,* Princeton University Press, Princeton.

Lanford III, O. E. (1973), Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics, *in* Lenard (1971), pp. 1–113.

Lenard, A. ed. (1971), *Statistical Mechanics and Mathematical Problems,* Lecture Note in Physics XX, Berlin, Springer 1973.

Phelps, R. R. (1966), *Lectures on Choquet's Theorem,* Van Nostrand Mathematical Studies, Van Nostrand, New York.

ポントリャーギン (1957),『連続群論 (上),(下)』, 柴岡泰光・杉浦光夫・宮崎 功訳 岩波書店.

Reed, M. and B. Simon (1972), *Methods of Modern Mathematical Physics* I, *Functional Analysis,* Academic Press, New York.

Ruelle, D. (1969), *Statistical Mechanics-Rigorous Results,* W. A. Benjamin, Massachusetts.

湯川秀樹・豊田利幸編 (1978),『量子力学 II』, 岩波講座・現代物理学の基礎 4, 岩波書店.

第6章

鏡映正値性の方法

場の量子論，統計力学の具体的なモデルにおける相転移の存在を証明するのに有用な鏡映正値性（reflection positivity）について基本的な理論を述べる．

6.1 鏡映正値性

はじめに，鏡映正値性の抽象的な枠組を設定する．格子スピン系における鏡映正値性については次節で詳しく議論する．

A を単位元をもった C^*-代数，$\mathsf{A}_\pm$ を A の閉部分代数としよう．いま，A_+ から A_- への1対1かつ連続な写像 θ があって，

$$\left.\begin{aligned} \theta(A+B) &= \theta(A)+\theta(B) \\ \theta(\alpha A) &= \bar{\alpha}\theta(A) \\ \theta(AB) &= \theta(A)\theta(B) \end{aligned}\right\} \quad A, B \in \mathsf{A}_+, \alpha \in \mathbf{C} \tag{6.1.1}$$

をみたしているものとする．

A 上の線形汎関数を一般に $\langle\cdot\rangle$ で表わす．

定義 6.1.1 A 上の線形汎関数 $\langle\cdot\rangle$ がすべての $A \in \mathsf{A}_+$ に対して

$$\langle\theta(A)A\rangle \geqslant 0$$

をみたすとき，$\langle\cdot\rangle$ は θ に関して**鏡映正値的**（reflection positive）であるという．

抽象論を展開するまえに，鏡映正値性の最も単純な例をあげておこう．

例 6.1.2（1次元のスピン 1/2 の系）

1次元格子上に並んだ $2n$ 個のスピン 1/2 の系を考える．スピンの配位空間

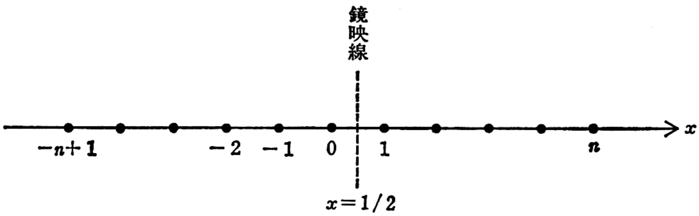


図 6.1　鏡映

は $\mathrm{S}=\{-1/2, 1/2\}$ とする.

$$\Lambda_+ = \{1, \cdots, n\}$$
$$\Lambda_- = \{-n+1, \cdots, 0\}$$
$$\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$$

とおく．このとき，$i \in \Lambda$ に対して，$r(i) \in \Lambda$ を

$$r(i) = -i+1$$

によって定義すれば，r は $\Lambda_\pm$ から $\Lambda_\mp$ の上への 1 対 1 写像であって，座標点 1/2 に関する鏡映を表わす．Ω_i を S のコピーとし，

$$\Omega = \prod_{i \in \Lambda} \Omega_i, \qquad \Omega_\pm = \prod_{i \in \Lambda_\pm} \Omega_i$$

として，

$$\mathsf{A} = \mathsf{C}(\Omega), \qquad \mathsf{A}_\pm = \mathsf{C}(\Omega_\pm)$$

とおく．A は

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$$

をノルムとして可換な C^*-代数であり，$\mathsf{A}_\pm$ は A の閉部分代数をなす．そこで，写像 $\theta: \mathsf{A}_+ \longrightarrow \mathsf{A}_-$ を

$$\theta(F)(\omega) = \overline{F(\theta_* \omega)}, \qquad \omega \in \Omega_-, F \in \mathsf{A}_+$$

によって定義する．ここで，θ_* は

$$(\theta_* \omega)_i = \omega_{r(i)}, \qquad i \in \Lambda_+$$

によってあたえられる Ω_- から Ω_+ への写像である．このとき，θ が 1 対 1 かつ連続な写像で，(6.1.1) をみたすことは容易にわかる．A 上の線形汎関数

$\langle\cdot\rangle_0$ を

$$\langle F\rangle_0 = \sum_{\omega_i=\pm1/2} F(\omega), \qquad \omega = \{\omega_i\}_{i\in\Lambda}, \quad F\in \mathsf{A}$$

によって定義する．$F\in\mathsf{A}_+$ ならば，

$$\langle\theta(F)F\rangle_0 = |\sum_{\substack{\omega_i=\pm1/2\\ i\in\Lambda_+}} F(\omega)|^2 \geqslant 0$$

となるので，$\langle\cdot\rangle_0$ は θ に関して鏡映正値的である．

命題 6.1.3 A 上の線形汎関数 $\langle\cdot\rangle$ が鏡映正値的ならば，不等式

$$|\langle\theta(A)B\rangle|^2 \leqslant \langle\theta(A)A\rangle\langle\theta(B)B\rangle, \qquad A, B\in\mathsf{A}_+$$

が成立する．

証明 $A, B\in\mathsf{A}_+$ に対して $\langle A, B\rangle\in\mathbf{C}$ を

$$\langle A, B\rangle = \langle\theta(A)B\rangle$$

によって定義すれば，(6.1.1) の初めのふたつの式と $\langle\cdot\rangle$ の鏡映正値性によって，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は A_+ 上の内積をあたえる．したがって，Schwarz の不等式

$$|\langle A, B\rangle|^2 \leqslant \langle A, A\rangle\langle B, B\rangle$$

が成立するが，これは求める不等式にほかならない．■

鏡映正値性の概念は次のように一般化できる：

定義 6.1.4 A 上の線形汎関数 $\langle\cdot\rangle$ がすべての $A_1, \cdots, A_n\in\mathsf{A}_+$ $(n=1, 2, \cdots)$ に対して

$$\langle\theta(A_1)A_1\cdots\theta(A_n)A_n\rangle \geqslant 0$$

をみたすとき，$\langle\cdot\rangle$ は θ に関して**一般鏡映正値的**であるという．

$\langle\cdot\rangle$ が一般鏡映正値的ならば，明らかに鏡映正値的でもある．

特別な場合には，一般鏡映正値性と鏡映正値性は同等になる：

定理 6.1.5 A_+ と A_- が互いに可換であるとき，A 上の線形汎関数 $\langle\cdot\rangle$ が鏡映正値的ならば，それは一般鏡映正値的でもある．

証明 $A_n\in\mathsf{A}_+$，$n=1, 2, \cdots$，とすれば，仮定によって

$$\theta(A_n)A_m = A_m\theta(A_n), \qquad n, m = 1, 2, \cdots.$$

したがって

$$\langle\theta(A_1)A_1\cdots\theta(A_n)A_n\rangle=\langle\theta(A_1)\cdots\theta(A_n)A_1\cdots A_n\rangle$$
$$=\langle\theta(A_1\cdots A_n)A_1\cdots A_n\rangle\geqslant 0. \quad \blacksquare$$

定理 6.1.6　A_+ と A_- が互いに可換であり，$\langle\cdot\rangle$ が鏡映正値的でありかつ連続ならば，任意の A,B と $C_i, D_i\in\mathsf{A}_+$ $(i=1,\cdots,k)$ に対して

$$\left\langle\exp\left[A+\theta(B)+\sum_{i=1}^{k}\theta(C_i)D_i\right]\right\rangle$$
$$\leqq\left\langle\exp\left[A+\theta(A)+\sum_{i=1}^{k}\theta(D_i)D_i\right]\right\rangle\left\langle\exp\left[B+\theta(B)+\sum_{i=1}^{k}\theta(C_i)C_i\right]\right\rangle$$

が成立する.

証明　A_+ と A_- の可換性と命題 6.1.3 によって，任意の $A_n, B_n\in\mathsf{A}_+$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して，不等式

$$\begin{aligned}&|\langle\theta(A_1)B_1\cdots\theta(A_n)B_n\rangle|^2\\&=|\langle\theta(A_1\cdots A_n)B_1\cdots B_n\rangle|^2\\&\leqslant\langle\theta(A_1\cdots A_n)A_1\cdots A_n\rangle\langle\theta(B_1\cdots B_n)B_1\cdots B_n\rangle\\&=\langle\theta(A_1)A_1\cdots\theta(A_n)A_n\rangle\langle\theta(B_1)B_1\cdots\theta(B_n)B_n\rangle\end{aligned}\tag{6.1.2}$$

が成立する.

$$\alpha=\exp\left[A+\theta(B)+\sum_{i=1}^{k}\theta(C_i)D_i\right]$$

とすると，有限次元における Lie の積公式*) の拡張によって，A における位相による収束の意味で

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{\theta(B)}{n}}e^{\frac{A}{n}}e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\theta(C_i)D_i}\right\}^n$$

と書ける. exp を級数に展開し，A_+ と A_- の可換性を使えば，α は,

$$\theta(E_1)F_1\cdots\theta(E_l)F_l$$

という項の和の極限として表わされる. ここで，E_j は B と C_i の積からなり，F_j は A と D_i の積とからなる.

---

*) Reed and Simon (1972), 定理 VIII. 29.

これを象徴的に

$$\alpha = \sum \prod_i \theta(E_i) F_i$$

と書けば，$\langle\cdot\rangle$ の連続性と (6.1.2) によって

$$|\langle\alpha\rangle| \leqslant \sum \langle \prod_i \theta(E_i) E_i \rangle^{1/2} \langle \prod_i \theta(F_i) F_i \rangle^{1/2}.$$

右辺の $\sum$ について Schwarz の不等式を用いると，

$$\begin{aligned}|\langle\alpha\rangle|^2 &\leqslant [\sum \langle \prod_i \theta(E_i) E_i \rangle][\sum \langle \prod_i \theta(F_i) F_i \rangle] \\ &= \left\langle \exp\left[A+\theta(A)+\sum_{i=1}^{k}\theta(D_i)D_i\right]\right\rangle \left\langle \exp\left[B+\theta(B)+\sum_{i=1}^{k}\theta(C_i)C_i\right]\right\rangle\end{aligned}$$

となる．∎

場の量子論や古典統計力学の具体的なモデルにおいては

$$\langle\cdot\rangle_H = \frac{\langle \cdot\, e^{-H}\rangle_0}{\langle e^{-H}\rangle_0} \tag{6.1.3}$$

という型の線形汎関数 $\langle\cdot\rangle_H$ が基本的である．ここで，$\langle\cdot\rangle_0$ は $\langle 1\rangle_0 = 1$ をみたす A 上の連続線形汎関数で，H は，物理的には系の相互作用を表わす A の元である（一般には，H が A の元とならない場合も考えられる．たとえば，非有界な連続スピン系の相互作用など）．

古典統計力学では正準分布における物理量 A の平均値が (6.1.3) の形の汎関数により $\langle A\rangle_H$ のようにあたえられる．場の量子論では，その Euclid 式の定式化において Schwinger 関数の経路積分表示が (6.1.3) の形の汎関数を用いて書き表わされるのである．経路積分については江沢 (1978) を参照．

(6.1.3) の形をした線形汎関数の鏡映正値性を調べよう．

定理 6.1.7

$$-H = B+\theta(B)+\sum_{i=1}^{k}\theta(C_i)C_i, \qquad B, C_i \in \mathrm{A}_+ \tag{6.1.4}$$

としよう．このとき，$\langle\cdot\rangle_0$ が一般鏡映正値的ならば，$\langle\cdot\rangle_H$ も一般鏡映正値的である．

証明 定理 6.1.6 におけるのと同様に，A における位相による収束の意味

で

$$e^{-H} = \lim_{n\to\infty}\left\{e^{\frac{\theta(B)}{n}} e^{\frac{B}{n}} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\theta(C_i)C_i}\right\}^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\theta(e^{\frac{B}{n}}) e^{\frac{B}{n}} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\theta(C_i)C_i}\right\}^n.$$

ここで，θ の連続性によって

$$\exp[\theta(B)/n] = \theta(\exp[B/n])$$

となることを用いた．

$$\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\theta(C_i)C_i\right]$$

は級数展開で定義されているので，e^{-H} は

$$\prod_i \theta(D_i)D_i, \qquad D_i \in \mathsf{A}_+$$

という形の項の和の極限として書くことができ，その各項に対する $\langle\cdot\rangle_0$ は仮定によって非負である．したがって，$\langle e^{-H}\rangle_0 \geqslant 0$ となる．同様にして，任意の $A_n \in \mathsf{A}_+$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して

$$\langle\theta(A_1)A_1 \cdots \theta(A_n)A_n e^{-H}\rangle_0 \geqslant 0$$

を得る．ゆえに $\langle\cdot\rangle_H$ は一般鏡映正値的である．∎

注意　上の定理の証明から，

$$-H = B + \theta(B) + \int \theta(C(x))C(x)\,d\rho(x), \qquad B, C(x) \in \mathsf{A}_+$$

という形の H に対しても，定理 6.1.7 は成立することがわかる．ただし，$d\rho(x)$ は $\mathbf{R}^1$ 上の測度で，積分は A の位相による収束で定義し，収束する場合だけを考える．

6.2　格子スピン系の鏡映正値性

この節では，A が古典格子スピン系の観測量の代数，(6.1.3) における $\langle\cdot\rangle_0$

が相互作用のないときの状態，θ が平面に関する鏡映である場合を考える．問題は (1) $\langle\cdot\rangle_0$ の(一般)鏡映正値性と，(2) どのような相互作用が (6.1.4) の形となるか，を調べることである．

(A) 格子点を含まない平面に関する鏡映

Λ を $\mathbf{Z}^\nu$ の有界集合とし，Λ は平面 π によって2つの部分集合 Λ_+ と Λ_- に分割されるとする．ここで，π は格子点を含まないとする．さらに，Λ 上の写像 (‘鏡映’) r があって，Λ_+ を Λ_- の上へ1対1に写し，$r^2=1$ をみたすとしよう*)．さて，記号は 5.1 節と同じとし，$\omega\in\Omega_{\Lambda_-}$ に対して $\theta_*\omega\in\Omega_{\Lambda_+}$ を

$$(\theta_*\omega)_i=\omega_{r(i)},\qquad i\in\Lambda_+ \tag{6.2.1}$$

によって定義する．$\mathrm{A}_\pm\equiv\mathrm{A}_{\Lambda_\pm}$ とおき，$\theta:\mathrm{A}_+\longrightarrow\mathrm{A}_-$ を

$$\theta(F)(\omega)=\overline{F(\theta_*\omega)},\qquad F\in\mathrm{A}_+ \tag{6.2.2}$$

によって定義する．この θ が1対1の連続写像で (6.1.1) の性質をもつことは容易にわかる．A_Λ 上の線形汎関数 $\langle\cdot\rangle_0$ を

$$\langle F\rangle_0=\int_{\Omega_\Lambda}F(\omega)\prod_{i\in\Lambda}d\mu_0(\omega_i) \tag{6.2.3}$$

によって定義する．

命題 6.2.1 (6.2.3) であたえられる $\langle\cdot\rangle_0$ は，(6.2.2) で定義される θ に関して一般鏡映正値的である．

証明 $F\in\mathrm{A}_+$ とすれば

$$\begin{aligned}\langle\theta(F)F\rangle_0&=\int_{\Omega_\Lambda}\overline{F(\theta_*\omega')}F(\omega)\prod_{i\in\Lambda_+}d\mu_0(\omega_i)\prod_{i\in\Lambda_-}d\mu_0(\omega_i')\\&=\left|\int_{\Omega_{\Lambda_+}}F(\omega)\prod_{i\in\Lambda_+}d\mu_0(\omega_i)\right|^2\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

したがって，$\langle\cdot\rangle_0$ は鏡映正値的である．A_+ と A_- は互いに可換であるので，定理 6.1.5 によって，$\langle\cdot\rangle_0$ は一般鏡映正値的である．∎

---

*) 例 6.1.2 を参照．

(B)　格子点を含む平面に関する鏡映

Λ は (A) の場合と同じであるが，平面 π が格子点を含む場合を考える．すなわち，Λ は，$\Lambda_+, \Lambda_0, \Lambda_-$ の3つの部分に分割され，Λ_0 が π 上の格子点となるような場合である．(A) のときと同様に，r は Λ 上の写像（'鏡映'）で Λ_+ を Λ_- の上へ1対1に写し，$r^2=1$ をみたし，さらに Λ_0 を不変にするものとする．θ_* は $\omega\in\Omega_{\Lambda_-}\times\Omega_{\Lambda_0}$ に対して (6.2.1) によって定義する．今度は

$$\mathsf{A}_\pm=\mathsf{A}_{\Lambda_\pm\cup\Lambda_0}$$

とおき，$\theta:\mathsf{A}_+\longrightarrow\mathsf{A}_-$ を (6.2.2) によって定義する．θ は1対1かつ連続写像で (6.1.1) をみたす．A_Λ 上の線形汎関数 $\langle\cdot\rangle_0$ は (6.2.3) によって定義する．

命題 6.2.2　$\langle\cdot\rangle_0$ は θ に関して一般鏡映正値的である．

証明　A_+ と A_- は互いに可換であるので，鏡映正値性のみを示せばよい．分割 $\Omega_{\Lambda_-}\times\Omega_{\Lambda_0}\times\Omega_{\Lambda_+}$ にしたがって変数を $(\omega,\omega',\omega'')$ と書けば，$F\in\mathsf{A}_+$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\theta(F)F\rangle_0&=\int_{\Omega_\Lambda}\overline{F(\theta_*(\omega,\omega'))}F(\omega',\omega'')\prod_{i\in\Lambda_-}d\mu_0(\omega_i)\prod_{i\in\Lambda_0}d\mu_0(\omega_i')\prod_{i\in\Lambda_+}d\mu_0(\omega_i'')\\&=\int_{\Omega_{\Lambda_0}}\prod_{i\in\Lambda_0}d\mu_0(\omega_i')\left|\int_{\Omega_{\Lambda_+}}F(\omega',\omega'')\prod_{i\in\Lambda_+}d\mu_0(\omega_i'')\right|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$ ∎

さて，どのような相互作用のとき，そのハミルトニアンが

$$-H=A+\theta(A)+\int\theta(B(x))B(x)d\rho(x) \tag{6.2.4}$$

という形になるか考えよう．ここで，$d\rho(x)$ は $\mathbf{R}^1$ 上の測度である．

簡単な例として，1 次元スピン系（例 6.1.2）において，相互作用が

$$-H=J\sum_{\substack{|i-j|=1\\ i,j\in\Lambda}}S_iS_j\qquad(J>0)$$

であたえられる場合を考える．ここで，S_i は $\omega_i\in\Omega_i$ のみの関数で $S_i(\pm1/2)=\pm1/2$ をみたす．いま

$$\sum_{\substack{|i-j|=1\\ i,j\in\Lambda}}S_iS_j=\sum_{\substack{|i-j|=1\\ i,j\in\Lambda_+}}S_iS_j+\sum_{\substack{|i-j|=1\\ i,j\in\Lambda_-}}S_iS_j+S_0S_1$$

と書けることに注意し

$$A = J \sum_{\substack{|i-j|=1 \\ i,j \in \Lambda_+}} S_i S_j$$

とおけば，$A \in \mathsf{A}_+$ であり，

$$\theta(A) = J \sum_{\substack{|i-j|=1 \\ i,j \in \Lambda_-}} S_i S_j \quad \in \mathsf{A}_-$$

となり

$$-H = A+\theta(A)+\theta(\sqrt{J}\,S_1)\sqrt{J}\,S_1$$

と表わされる．したがって，(6.2.4) の形になる．

1次元スピン系における一般的な考察に進むため，次の定義をする．

定義 6.2.3 実数列 $\{J(j)\}_{j\geq 1}$ は，次の性質をみたすとき，鏡映正値的であるという：すべての自然数 $m \geqslant 1$ と $z_1, \cdots, z_m \in \mathbf{C}$ に対して

$$\sum_{i,j\geq 1}^{m} \bar{z}_i z_j J(i+j-1) \geqslant 0. \tag{6.2.5}$$

注意 (6.2.5) は，実は，z_i $(i=1, \cdots, m)$ が実数の場合のそれから導かれる．もし，スピンの相互作用が

$$\sum_{i,j} J(i-j) S_i S_j$$

ならば，(6.2.5) の左辺は，格子点 $1, \cdots, m$ に値 $z_1, \cdots, z_m$ をもつスピンとそれらを $j=1/2$ に関して鏡映したスピンとの相互作用エネルギーとみることができる．なぜなら，$j=1/2$ に関する鏡映は $r(i)=-i+1$ であり，$J(i+j-1) = J(i-r(j))$ と書けるからである．以上が，(6.2.5) をみたす $\{J(j)\}_{j\geq 1}$ を‘鏡映正値的’という理由である．

命題 6.2.4 $\{J(j)\}_{j\geq 1}$ を有界な実数列とする．このとき $\{J(j)\}_{j\geq 1}$ が鏡映正値的であるための必要十分条件は，閉区間 $[-1, 1]$ 内に台をもつ，$\mathbf{R}$ 上の測度 $d\rho(x)$ が存在して

$$J(j) = \int_{-1}^{1} x^{j-1} d\rho(x) \qquad (j \geqslant 1) \tag{6.2.6}$$

となることである．ただし，右辺で，$j=1$ のときは，すべての x に対して

$x^0 \equiv 1$ と読む．

証明　(6.2.6) が成立すれば

$$\sum_{i,j\geqslant 1}^{m} \bar{z}_i z_j J(i+j-1) = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{j=1}^{m} z_j x^{j-1} \right|^2 d\rho(x) \geqslant 0$$

となるから $\{J(j)\}_{j\geqslant 1}$ は鏡映正値的である．

逆に，$\{J(j)\}_{j\geqslant 1}$ が鏡映正値的であるとしよう．

$$\mathbf{V} = \left\{ z = \{z_j\}_{j\geqslant 1} \middle| \begin{array}{l} z_j \in \mathbf{C},\ \text{ある } N \text{ が存在して,} \\ \quad n \geqslant N \text{ ならば } z_n = 0 \end{array} \right\}$$

という複素数列のなすベクトル空間を考える．$z, w \in \mathbf{V}$ に対して $\langle z, w\rangle \in \mathbf{C}$ を

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i,j\geqslant 1} \bar{z}_i w_j J(i+j-1)$$

によって定義する．$\{J(j)\}_{j\geqslant 1}$ の鏡映正値性により，$\langle z, z\rangle = 0$ ならば $z=0$ という性質を除いて，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積の性質をすべてみたす．そこで

$$\mathbf{N} = \{z \in \mathbf{V} \mid \langle z, z\rangle = 0\}$$

として，Hilbert 空間 $\mathsf{H} = \overline{\mathbf{V}/\mathbf{N}}$ (商空間 $\mathbf{V}/\mathbf{N}$ の完備化．$z \in \mathbf{V}$ の同値類を $[z]$ と書けば，H の内積 $\langle [z], [w]\rangle$ は $\langle [z], [w]\rangle = \langle z, w\rangle$ であたえられる) をつくる．さて，$z \in \mathbf{V}$ に対して

$$(Az)_1 = 0, \qquad (Az)_j = z_{j-1} \qquad (j \geqslant 2)$$

によって演算子 $A : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ を定義する．このとき

$$\langle Az, w\rangle = \langle z, Aw\rangle, \qquad z, w \in \mathbf{V} \tag{6.2.7}$$

となる．したがって，$\|z\|^2 \equiv \langle z, z\rangle$ とすれば，Schwarz の不等式によって

$$\|Az\| = |\langle z, A^2 z\rangle|^{1/2} \leqslant \|z\|^{1/2} \|A^2 z\|^{1/2}.$$

これをくり返すと

$$\|Az\| \leqslant \|z\|^{1-1/2^n} \|A^{2^n} z\|^{1/2^n}.$$

一方，

$$(A^{2^n} z)_j = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant 2^n$$
$$(A^{2^n} z)_j = z_{j-2^n}, \qquad j \geqslant 2^n+1$$

であるから，

$$\begin{aligned} \|A^{2^n} z\|^2 &= \sum_{i,j\geqslant 1} \overline{(A^{2^n} z)_i} (A^{2^n} z)_j J(i+j-1) \\ &= \sum_{i,j\geqslant 2^n+1} \bar{z}_{i-2^n} z_{j-2^n} J(i+j-1) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j\geq 1} \bar{z}_i z_j J(i+j+2^{n+1}-1)$$
$$\leq (\sum_{i\geq 1}|z_i|)^2 \sup_{j\geq 1} |J(j)|.$$

したがって,

$$\|Az\| \leq \|z\|^{1-1/2^n}(\sum_i |z_i|)^{1/2^n}(\sup_{j\geq 1} |J(j)|)^{1/2^{n+1}}. \tag{6.2.8}$$

ゆえに, $n\to\infty$ として

$$\|Az\| \leq \|z\| \tag{6.2.9}$$

を得る. すなわち, A は $\mathbf{V}$ から $\mathbf{V}$ への有界な線形演算子で $\mathbf{N}$ を不変にするので, H 上の有界な線形演算子 $\tilde{A}$ に拡張される. (6.2.7) のために $\tilde{A}$ は自己共役であり, しかも (6.2.9) によって $\|\tilde{A}\| \leq 1$ である. 自己共役演算子に対するスペクトル定理によって, $j\geq 2$ のとき, 各 $z\in\mathbf{V}$ に対して $[-1,1]$ の中に台をもつ $\mathbf{R}$ 上の測度 $d\rho_z(x)$ が存在して

$$\langle [z], \tilde{A}^{j-1}[z]\rangle = \langle z, A^{j-1}z\rangle$$
$$= \int_{-1}^{1} x^{j-1} d\rho_z(x)$$

となる.

$$\langle z, A^{j-1}z\rangle = \sum_{i,k\geq 1} \bar{z}_i z_k J(i+j+k-2)$$

であるから, 特に z として $z_1=1$, $z_j=0$, $j\geq 2$, となるものをとり, この z に対する $d\rho_z(x)$ を $d\rho(x)$ と記せば,

$$J(j) = \int_{-1}^{1} x^{j-1} d\rho(x) \quad (j\geq 2).$$

ここで

$$\int_{-1}^{1} d\rho(x) = J(1)$$

であるから, 上式は $x^0\equiv 1$ と読むことにより, $j=1$ まで拡張できる. ∎

注意 上の命題は, Hamburger のモーメント問題, すなわち '実数列 $\{a_n\}$ はどのようなときに $\mathbf{R}^1$ 上の測度のモーメントとして表わされるか' という問題の特別な場合の解答である. $\{J(j)\}_{j\geq 1}$ が非有界な実数列の場合にも上の命

題は成立する[*]．ただし，この場合，$d\rho(x)$ の台は有界にはならない．

命題 6.2.4 の応用として，

命題 6.2.5　$\{J(j)\}_{j\geq 1}$ を有界な実数列とし，1次元の Ising モデル

$$-H_n(S) = \sum_{\substack{i,j=-n+1 \\ i>j}}^{n} J(i-j)S_iS_j, \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{6.2.10}$$

を考える（第5章参照）．θ を $j=1/2$ に関する鏡映に対応する写像とする．このとき，すべての n に対して，$-H_n$ が (6.2.4) の形をもつための必要十分条件は $\{J(j)\}_{j\geq 1}$ が鏡映正値的となることである．

証明　$\{J(j)\}_{j\geq 1}$ が鏡映正値的であるとしよう．(6.2.10) は

$$\begin{aligned}-H_n(S) = &\sum_{1\leq j<i\leq n} J(i-j)S_iS_j \\ &+ \sum_{1\leq j<i\leq n} J(i-j)S_{-i+1}S_{-j+1} \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} J(i+j-1)S_iS_{-j+1}\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

と変形できる．いま

$$A_n = \sum_{1\leq j<i\leq n} J(i-j)S_iS_j$$

とおけば，

$$\theta(A_n) = \sum_{1\leq j<i\leq n} J(i-j)S_{-i+1}S_{-j+1}.$$

また，(6.2.6) によって

$$\sum_{i,j=1}^{n} J(i+j-1)S_iS_{-j+1} = \int_{-1}^{1} \theta(B_n(x))B_n(x)d\rho(x)$$

となる．ただし

$$B_n(x) = \sum_{j=1}^{n} x^{j-1}S_j.$$

したがって，

---

*) Reed and Simon (1975), p. 145 参照．

$$-H_n(S) = A_n+\theta(A_n)+\int_{-1}^{1}\theta(B_n(x))B_n(x)d\rho(x).$$

逆に，すべての n に対して，$-H_n(S)$ が (6.2.4) の形をもつとしよう．$H_n(S)$ は S_j の2次形式であり，$B(x)$ は $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ から生成される C^*-代数の元であるから

$$B(x) = \sum_{j=1}^{n}\mu_j(x)S_j, \qquad (\mu_i:\text{ 複素数値関数})$$

という形でなければならない．したがって

$$\int\theta(B(x))B(x)d\rho(x)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n}\int\overline{\mu_i(x)}\mu_j(x)d\rho(x)S_{-i+1}S_j.$$

(6.2.11) と比較して

$$J(i+j-1) = \int\overline{\mu_i(x)}\mu_j(x)d\rho(x).$$

したがって，すべての n に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n}\bar{z}_i z_j J(i+j-1) = \int\left|\sum_{i=1}^{n}z_i\mu_i(x)\right|^2 d\rho(x)$$
$$\geqslant 0.$$

すなわち，$\{J(j)\}_{j\geqslant1}$ は鏡映正値的である．∎

定理 6.1.7，命題 6.2.2，命題 6.2.5 とを合わせると次の結果が得られる．

系 6.2.6 相互作用ハミルトニアンが (6.2.10) であたえられる Ising モデルにおいて，$\langle\cdot\rangle_{H_n}$ は $j=1/2$ の鏡映に関して一般鏡映正値的である．

注意 以上では $j=1/2$ に関する鏡映について考えたわけであるが，格子点に関する鏡映についても同様である．たとえば，$j=0$ に関する鏡映は $r(i) = -i$ であたえられるから，この場合の $\{J(j)\}_{j\geqslant1}$ の鏡映正値性の定義は，すべての $z_1,\cdots,z_m\in\mathbf{C}$ $(m=1,\cdots\cdots)$ に対して

$$\sum_{i,j\geqslant 1}^{m} \bar{z}_i z_j J(i+j) \geqslant 0$$

が成立することとなる．命題 6.2.4 によって，このような $J(j)$（有界な実数列とする）は

$$J(j)=\int_{-1}^{1} x^{j-2} d\rho(x) \qquad (j\geqslant 2)$$

という形に書ける；$J(1)$ は任意である．また，命題 6.2.5 に対応する事柄も成立する．ただし，スピンは $2n+1$ 個 $(S_{-n},\cdots,S_n)$ を考え，θ は $j=0$ に関する鏡映に対応するものとしなければならない．

(6.2.9) のハミルトニアンは有界集合 $\{-n+1,\cdots,n\}$ に対する自由境界条件のハミルトニアンであったが，周期的境界条件のハミルトニアンについても鏡映正値性を考えることは有用である（境界条件については，第5章参照）．スピン S_i と S_j との相互作用が

$$J(|i-j|)S_iS_j$$

であたえられる系の周期的境界条件のハミルトニアン $H_n{}^{\mathrm{P}}$ は

$$-H_n{}^{\mathrm{P}}=\sum_{-n+1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} J_n{}^{\mathrm{P}}(j-i)S_jS_i \tag{6.2.12}$$

となる*)．ここで，

$$J_n{}^{\mathrm{P}}(j)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J(|j+2kn|) \tag{6.2.13}$$

命題 6.2.7　有界な実数列 $\{J(j)\}_{j\geqslant 1}$ は鏡映正値的であるとし，ある j_0 が存在して，

$$j\geqslant j_0 \quad \text{ならば} \quad J(j)=0$$

と仮定する．このとき，$-H_n{}^{\mathrm{P}}$ は，すべての n に対して，(6.2.4)の形をもつ．さらに，$\langle\cdot\rangle_{H_n{}^{\mathrm{P}}}$ は $j=1/2$ に関する鏡映に対して一般鏡映正値的である．

証明　仮定により，$J_n{}^{\mathrm{P}}(j)$ を定義する級数 (6.2.13) は有限個の項の和となるので，$J_n{}^{\mathrm{P}}(j)$ は意味をもち，命題 6.2.4 によって

---

*) 第3章の記号を使えば，この場合の相互作用 $\Phi(X)$ は：$X=\{i,j\}$ ならば，$\Phi(X)=J(|i-j|)S_iS_j$，その他の X に対して $\Phi(X)=0$ である．

$$J_n^{\mathrm{P}}(j)=\int_1^1\sum_{k=-\infty}^{\infty}x^{|j+2kn|-1}d\rho(x).$$

$J_n^{\mathrm{P}}(j+2n)=J_n^{\mathrm{P}}(j)$ であるから，$j=1,\cdots,2n$ の場合を考えれば十分である．したがって，$|x|<1$ に対して

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}x^{|j+2kn|-1}=\frac{x^{j-1}+x^{-j-1}x^{2n}}{1-x^{2n}}.$$

したがって，積分 $\int_{-1}^{1}$ を異常積分の意味にとって

$$J_n^{\mathrm{P}}(j)=\int_{-1}^{1}\frac{x^{j-1}+x^{-j-1}x^{2n}}{1-x^{2n}}d\rho(x)\qquad(j=1,\cdots,2n).$$

これから，$\{J_n^{\mathrm{P}}(j)\}_{j\geqq 1}$ が鏡映正値的であることは容易にわかる．ゆえに，命題 6.2.5 によって，$-H_n^{\mathrm{P}}$ は (6.2.4) の形をもつ．したがってまた系 6.2.6 と同様に，$\langle\cdot\rangle_{H_n^{\mathrm{P}}}$ は一般鏡映正値的である．∎

今までの議論を多次元に拡張することも，それほどむずかしくはない．

定義 6.2.8 $\mathbf{Z}^\nu$ 上の数列 $\{J(j)\}_{j\in\mathbf{Z}^\nu}$ で，各 $l=1,\cdots,\nu$ と $j\in\mathbf{Z}^\nu$ に対して

$$J(j_1,\cdots,j_l,\cdots,j_\nu)=J(j_1,\cdots,-j_l,\cdots,j_\nu)$$

となるものを考える．このとき，すべての有界集合 Λ と $z_i\in\mathbf{C}$ $(i\in\Lambda)$ に対して

$$\sum_{\substack{(i,j)\\ i_1,j_1\geqq 1\\ i,j\in\Lambda}}\bar{z}_iz_jJ(i_1+j_1-1,i_2-j_2,\cdots,i_\nu-j_\nu)\geqq 0 \tag{6.2.14}$$

をみたすならば，$\{J(j)\}$ は鏡映正値的であるという．

上の定義において，‘鏡映’ は平面 $i_1=1/2$ に関するものであり，鏡映正値性は，格子点の第 1 成分についてのみ考慮されている．格子点の他の成分については，それらによって指定される行列の正値性の条件が課されていることになる．

命題 6.2.4 の証明と同様にして次の命題を得る．

命題 6.2.9 $\{J(j)\}_{j\in\mathbf{Z}^\nu}$ を有界な実数列とするとき，これが鏡映正値的であるための必要十分条件は，$[-1,1]$ 上の測度 $d\rho_{j_2\cdots j_\nu}(x)$ が存在して，$j_1\geqq 1$

に対して

$$J(j)=\int_{-1}^{1}x^{j_1-1}d\rho_{j_2\cdots j_\nu}(x)$$

となることである．ここで，$d\rho_{j_2\cdots j_\nu}(x)$ は $[-1,1]$ 上の測度で，任意の有界集合 Λ と $z_i\in\mathbf{C}$ $(i\in\Lambda)$ に対して

$$\sum_{\substack{i_1,j_1\geqslant 1\\ i,j\in\Lambda}}\int_{-1}^{1}(x^{j_1-1}\bar{z}_j)(x^{i_1-1}z_i)d\rho_{(j_2-i_2)\cdots(j_\nu-i_\nu)}(x)\geqslant 0$$

をみたすとする．

この命題から命題 6.2.5 と同様にして次の結果を得る．

命題 6.2.10　$\{J(j)\}_{j\in\mathbf{Z}^\nu}$ を $J(j)=J(-j)$, $j\in\mathbf{Z}^\nu$, をみたす有界な実数列とし，ν 次元の Ising モデル

$$-H_\Lambda=\sum_{\substack{(i,j)\\ i,j\in\Lambda}}J(i-j)S_iS_j \tag{6.2.15}$$

を考える．ここで，Λ は

$$\Lambda=[-n_1+1,n_1]\times[-n_2+1,n_2]\times\cdots\cdots\times[-n_\nu+1,n_\nu] \tag{6.2.16}$$

という形の有界集合とする．θ を $j_1=1/2$ に関する鏡映に対応する写像とする．このとき，すべての Λ に対して，$-H_\Lambda$ が (6.2.4) の形をもつための必要十分条件は，$\{J(j)\}$ が鏡映正値的となることである．さらに，$\{J(j)\}$ が鏡映正値的ならば，$\langle\cdot\rangle_{H_\Lambda}$ は一般鏡映正値的である．

証明　命題 6.2.5 と系 6.2.6 の証明とまったく同様なので省略する．∎

例 6.2.11　$\{J(j)\}_{j\in\mathbf{Z}^\nu,j_1\geqslant 1}$ の最も典型的な例として

$$J(j)=\begin{cases}J>0\ ; & |j_1|^2+\cdots+|j_\nu|^2=1 \text{ のとき}\\ 0\ ; & \text{その他の場合}\end{cases}$$

を考えよう．これは，最近接相互作用に対応する．$\{J(j)\}$ が鏡映正値的であることは容易にみられる．

最後に，周期的境界条件での ν 次元の Ising モデルを考えよう．$\{J(j)\}_{j\in\mathbf{Z}^\nu}$, Λ を命題 6.2.10 のようにとる．このとき，

$$J_\Lambda^{\mathrm{P}}(j) = \sum_{k_1,\cdots,k_\nu=-\infty}^{\infty} J(j_1+2k_1n_1,\cdots,j_\nu+2k_\nu n_\nu) \tag{6.2.17}$$

とすれば，1 次元の場合と同様に，周期的境界条件のハミルトニアン H_Λ^{P} は

$$-H_\Lambda^{\mathrm{P}} = \sum_{\substack{(i,j)\\ i,j\in\Lambda}} J_\Lambda^{\mathrm{P}}(i-j)S_iS_j \tag{6.2.18}$$

であたえられる．このとき，命題 6.2.7 に相当する事実が成立する．

命題 6.2.12 有界な実数列 $\{J(j)\}_{j\in\mathbf{Z}^\nu}$ は鏡映正値的であるとし，ある j_0 が存在して，

$$|j| \geqslant j_0 \quad \text{ならば} \quad J(j) = 0$$

と仮定する．このとき，(6.2.18) であたえられる $-H_\Lambda^{\mathrm{P}}$ は，すべての Λ に対して (6.2.4) の形をもつ．さらに $\langle\cdot\rangle_{H_\Lambda^{\mathrm{P}}}$ は $j=1/2$ に関する鏡映に対して一般鏡映正値的である．

証明 命題 6.2.7 のそれにまったく同様なので省略する．∎

6.3 碁盤目型の評価式

鏡映正値性のひとつの応用として，格子スピン系に対する有用な不等式——碁盤目型の評価式 (chessboard estimate)——を証明する．

はじめに，碁盤目型の評価式を抽象的な形であたえよう：

定理 6.3.1 (抽象的な碁盤目型の評価式) A_0 をベクトル空間，$r:\mathsf{A}_0 \longrightarrow \mathsf{A}_0$ は反線形写像で $r^2=1$ とする．$F(a_1,\cdots,a_{2n})$，$n=1,\cdots$，は

$$\underbrace{\mathsf{A}_0\times\cdots\times\mathsf{A}_0}_{2n}$$

の上の多重線形汎関数で，次の条件をみたすものとする：すべての $a_i, b_j\in\mathsf{A}_0$ $(i=1,\cdots,2n,\ j=1,\cdots,n)$ に対して

$$F(a_1,\cdots,a_n,ra_n,\cdots,ra_1) \geqslant 0, \tag{6.3.1}$$

$$F(a_1,\cdots,a_{2n}) = F(a_2,\cdots,a_{2n},a_1) \tag{6.3.2}$$

$$|F(a_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots,b_1)|^2 \leqslant F(a_1,\cdots,a_n,ra_n,\cdots,ra_1)F(b_1,\cdots,b_n,rb_n,\cdots,rb_1). \tag{6.3.3}$$

このとき，

$$\|a\| = F(a, ra, a, \cdots, a, ra)^{1/2n} \tag{6.3.4}$$ *)

は A_0 上の準ノルムを定義し，次の評価式をあたえる：

$$|F(a_1, \cdots, a_{2n})| \leqslant \prod_{i=1}^{2n} \|a_i\|. \tag{6.3.5}$$

証明　(6.3.5) は，基本的には，(6.3.3) と (6.3.2) をくり返し用いることによって示される．しかし，一般的に証明するためには，まず，すべての $i = 1, \cdots, 2n$ に対して $\|a_i\| \neq 0$ として，集合

$$B = \left\{ b = (b_1, \cdots, b_{2n}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{各 } b_i \text{ は } a_1, \cdots, a_{2n}, ra_1, \cdots, ra_{2n} \\ \text{のどれか} \end{array} \right\}$$

の上に定義された関数

$$\begin{aligned} f(b) &\equiv f(b_1, \cdots, b_{2n}) \\ &\equiv F(b_1, \cdots, b_{2n}) / \prod_{i=1}^{2n} \|b_i\| \end{aligned}$$

を考えると便利である．$r^2 = 1$ と (6.3.2) によって $\|ra\| = \|a\|$ であるので，(6.3.2) と (6.3.3) によって，各 $j = 1, \cdots, n, n+1$ に対して

$$\begin{aligned} |f(b_1, \cdots, b_{2n})|^2 \leqslant{}& f(b_j, \cdots, b_{j+n-1}, rb_{j+n-1}, \cdots, rb_j) \\ &\times f(b_{j-1}, \cdots, b_{2n}, b_1, \cdots, b_{j+n}, rb_{j+n}, \cdots, rb_1, rb_{2n}, \cdots, rb_{j-1}) \end{aligned}$$

となる**)．B は有限集合であるから，

$$M = \max_{b \in B} |f(b)|$$

は存在し，ある $b^M \in B$ に対して，$M = |f(b^M)|$ となる．したがって，

$$M^2 \leqslant f(b_{j+n}{}^M, \cdots, b_{2n}{}^M, b_1{}^M, \cdots, b_{j-1}{}^M, rb_{j-1}{}^M, \cdots, rb_1{}^M, rb_{2n}{}^M, \cdots, rb_{j+n}{}^M) M.$$

$M > 0$ としてよいから，$M = |f(b^M)|$ ならば，$j = 1, \cdots, 2n$ に対して

$$M = f(b_{j+n}{}^M, \cdots, b_{2n}{}^M, b_1{}^M, \cdots, b_{j-1}{}^M, rb_{j-1}{}^M, \cdots, rb_1{}^M, rb_{2n}{}^M, \cdots, rb_{j+n}{}^M) \tag{6.3.6}$$

となる．これから，ある i が存在して

---

*)　(6.3.1) で，$a_{2j-1} = a, a_{2j} = ra, j = 1, \cdots, n$ とおけば，$F(a, ra, a, \cdots, a, ra) \geqslant 0$ となる．

**)　$j = 1$ $(j = n+1)$ に対して，右辺に b_0 (b_{2n+1}) が現われるが，それらは除くものとする．

$$M = f(a_i, ra_i, a_i, \cdots, a_i, ra_i) > 0 \tag{6.3.7}$$

となることを示そう．まず，M をあたえる b^M のうちで，初めの $2l$ 項 ($l \leqslant n$) が

$$(b_1{}^M, \cdots, b_{2l}{}^M) = (a_j, ra_j, \cdots, a_j, ra_j)$$

という形をもっているものを考える．(6.3.2) と (6.3.6) によってこのような l とそれに対応する a_j は存在し，$l \geqslant 1$ である．そこで，そのような b^M のうちで l が最も大きいものを $\tilde{b}$ としよう．(6.3.6) によって ($j-1=n$ とすればよい)

$$f(\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n, r\tilde{b}_n, \cdots, r\tilde{b}_1) = M.$$

$n \leqslant 2l$ ならば，$r^2=1$ によって ($\tilde{b}$ に対応する a_j を $\tilde{a}_j$ として)

$$(\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n, r\tilde{b}_n, \cdots, r\tilde{b}_1) = (\tilde{a}_j, r\tilde{a}_j, \cdots, \tilde{a}_j, r\tilde{a}_j).$$

したがって，(6.3.7) が成立する．$n > 2l$ ならば，(6.3.2) によって

$$C = (\underbrace{\tilde{a}_j, r\tilde{a}_j, \cdots, \tilde{a}_j, r\tilde{a}_j}_{4l}, \tilde{b}_{2l+1}, \cdots, \tilde{b}_n, r\tilde{b}_n, \cdots, r\tilde{b}_{2l+1})$$

として，

$$f(\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n, r\tilde{b}_n, \cdots, r\tilde{b}_1) = f(C)$$

となる．C も f の最大値 M をあたえるが，$4l > 2l$ であるので，これは仮定に反する．したがって，(6.3.7) が成立し，(6.3.4) にある $\|a\|$ の定義によって $M=1$ となる．ゆえに，すべての $b \in \mathrm{B}$ に対して

$$|F(b_1, \cdots, b_{2n})| \leqslant \prod_{i=1}^{2n} \|b_i\|$$

が成立する．特に $b=(a_1, \cdots, a_{2n})$ とすることにより，(6.3.5) を得る．次に，ある i が存在して，$\|a_i\|=0$ ならば $F(a_1, \cdots, a_{2n})=0$ であることを示そう．仮に $F(a_1, \cdots, a_{2n}) \neq 0$ として，集合

$$\mathrm{B}' = \left\{ b=(b_1, \cdots, b_{2n}) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ある } b_j \text{ が存在して，} b_j = a_i,\ \text{かつ各 } b_k \\ (k \neq j) \text{ は } a_1, \cdots, a_{2n}, ra_1, \cdots, ra_{2n} \text{ のどれか} \end{array} \right\}$$

を考え，

$$M' = \max_{b \in \mathrm{B}'} |F(b_1, \cdots, b_{2n})|$$

とおけば，仮定により $M' > 0$．上の議論をくり返すことにより，

$$M' = F(a_i, ra_i, \cdots, a_i, ra_i)$$

でなければならない．しかし，このとき $M'=0$ だから矛盾である．

最後に (6.3.4) で定まる $\|\cdot\|$ が準ノルムであることを示そう．$a, b \in \mathrm{A}_0$ に対して，F の多重線形性によって，c_j を a または b とすると，

$$\begin{aligned}\|a+b\|^{2n} &\leqslant \sum_{2^{2n}\text{項}} |F(c_1, rc_2, \cdots, c_{2n-1}, rc_{2n})| \\ &\leqslant \sum_{2^{2n}\text{項}} \|c_1\|\|rc_2\|\cdots\|rc_{2n}\| \qquad [(6.3.5)\text{ による}] \\ &= \sum_{2^{2n}\text{項}} \prod_{j=1}^{2n} \|c_j\| \\ &= (\|a\|+\|b\|)^{2n}.\end{aligned}$$

すなわち，3角不等式 $\|a+b\| \leqslant \|a\|+\|b\|$ が成立する．また，任意の $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して，$\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\|$ となることは，r の反線形性と F の多重線形性による．よって，$\|\cdot\|$ は A_0 上の準ノルムである．∎

注意　r は鏡映の抽象化であり，(6.3.1), (6.3.3) が鏡映正値性に対応する．なお，抽象的な碁盤目型の評価式 (6.3.5) の証明には，A_0 の線形構造，$r(F)$ の反（多重）線形性は必要でなかったことに注意．

定理 6.3.1 を 1 次元格子スピン系に適用すると次のようになる．

定理 6.3.2　記号は 5.1 節と同様とし，$\Lambda = \{-n+1, \cdots, n\}$ に対して，A_Λ 上の状態 $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ があたえられ，次の条件をみたすとする：

（1）　周期的である．すなわち，任意の $i \in \mathbf{Z}^\nu$ に対して

$$\langle F(S_{-n+1+i}, \cdots, S_{n+i})\rangle_{\Lambda+i} = \langle F(S_{e(-n+1+i)}, \cdots, S_{e(n+i)})\rangle_\Lambda, \qquad F \in \mathrm{A}_\Lambda \tag{6.3.8}$$

が成立する．ここで，$e(j)$ は，

$$e(j)-j \in \{2nk \mid k \in \mathbf{Z}\}, \qquad e(j) \in \Lambda$$

となる点である；

（2）　並進不変である；

（3）　$j=1/2$ に関して鏡映正値的である．

このとき，実数値関数 $a_i \in \mathrm{C}(\mathbf{S}), i \in \Lambda,$ に対して，碁盤目型の評価式

$$|\langle \prod_{i\in\Lambda} a_i(S_i)\rangle_\Lambda| \leqslant \prod_{i\in\Lambda} |\langle \prod_{j\in\Lambda} a_i(S_j)\rangle_\Lambda|^{1/|\Lambda|} \qquad (6.3.9)$$

が成立する.

証明 $\mathsf{A}_0 = \mathsf{C}(\mathbf{S})$ とし, $r: \mathsf{A}_0 \longrightarrow \mathsf{A}_0$ を $ra = \bar{a}$ によって定義する. また, $b_i \in \mathsf{A}_0$ $(i = 1, \cdots, 2n)$ に対して

$$F(b_1, \cdots, b_{2n}) = \left\langle \prod_{i=-n+1}^{n} b_{i+n}(S_i) \right\rangle_\Lambda$$

とおく. 明らかに, $r^2 = 1$ であり, F は

$$\underbrace{\mathsf{A}_0 \times \cdots \times \mathsf{A}_0}_{2n}$$

上の多重線形汎関数である. $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ に対する仮定 (1), (2) により F は

$$F(b_1, \cdots, b_{2n}) = F(b_2, \cdots, b_{2n}, b_1)$$

をみたす. また,

$$A(S_1, \cdots, S_n) = \overline{b_n(S_1)\cdots b_1(S_n)}$$

とし, θ を $j = 1/2$ に関する鏡映とすれば, 鏡映正値性により,

$$\begin{aligned} &F(b_1, \cdots, b_n, rb_n, \cdots, rb_1) \\ &\quad = \langle \theta(A)(S_{-n+1}, \cdots, S_0) A(S_1, \cdots, S_n)\rangle_\Lambda \geqslant 0. \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned} B(S_1, \cdots, S_n) &= \overline{b_n(S_1)\cdots b_1(S_n)}, \\ C &= b_{n+1}(S_1)\cdots b_{2n}(S_n) \end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{aligned} &|F(b_1, \cdots, b_{2n})|^2 \\ &\quad = |\langle \theta(B)(S_{-n+1}, \cdots, S_0) C(S_1, \cdots, S_n)\rangle_\Lambda|^2 \\ &\quad \leqslant \langle \theta(B)B\rangle_\Lambda \langle \theta(C)C\rangle_\Lambda \qquad (\text{命題 } 6.1.3) \\ &\quad = F(b_1, \cdots, b_n, rb_n, \cdots, rb_1) F(b_{2n}, \cdots, rb_{n+1}, rb_{n+1}, \cdots, rb_{2n}). \end{aligned}$$

ゆえに, F は定理 6.3.1 の仮定をみたす. $a \in \mathsf{A}_0$ が実数値関数のとき,

$$\|a\| = |\langle \prod_{i\in\Lambda} a(S_i)\rangle|^{1/2n}$$

であるので, (6.3.5) は, $a_i \in \mathsf{A}_0$ $(i \in \Lambda)$ が実数値関数のとき, (6.3.9) をあたえる. ▮

注意　上の証明からわかるように，碁盤目型の評価式 (6.3.9) は，a_i が必ずしも C(S) の要素ではない場合にも拡張される．

周期的境界条件のハミルトニアン (6.2.12) に対する状態 $\langle\cdot\rangle_{H_n^{\mathrm{P}}}$ は定理 6.3.2 をみたすので，これに対して碁盤目型の評価式が成立する．

高次元の場合の碁盤目型の評価式は次のようになる．

定理 6.3.3

$$\Lambda=[-n_1+1,n_1]\times[-n_2+1,n_2]\times\cdots\cdots\times[-n_\nu+1,n_\nu]\cap\mathbf{Z}^\nu \tag{6.3.10}$$

とし，A_Λ 上の状態 $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ は次の条件をみたすとする：

(1)　各 j 軸方向に対して $2n_j$ の周期で周期的である．すなわち，任意の $i\in\mathbf{Z}^\nu$ に対して

$$\langle F(S_{\Lambda+\alpha})\rangle_{\Lambda+\alpha}=\langle F(S_{e(\Lambda+\alpha)})\rangle_\Lambda,\qquad F\in\mathrm{A}_\Lambda$$

が成立する．ここで，$S_\Lambda=\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $e(\Lambda+\alpha)=\{e(\beta+\alpha)\}_{\beta\in\Lambda}$ であり $e(\gamma)$ は，

$$e(\gamma)-\gamma\in\{(2k_1n_1,\cdots,2k_\nu n_\nu)\mid(k_1,\cdots,k_\nu)\in\mathbf{Z}^\nu\},\qquad e(\gamma)\in\Lambda$$

となる点である；

(2)　並進不変である；

(3)　各平面 $\alpha_j=1/2$ $(j=1,\cdots,\nu)$ に関する鏡映に関して鏡映正値的である．

このとき，実数値関数 $G_\alpha\in\mathrm{A}_\Lambda$ $(\alpha\in\Lambda)$ に対して碁盤目型の評価式

$$|\langle\prod_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha(S_\alpha)\rangle_\Lambda|\leqslant\prod_{\alpha\in\Lambda}|\langle\prod_{\beta\in\Lambda}G_\alpha(S_\beta)\rangle_\Lambda|^{1/|\Lambda|} \tag{6.3.11}$$

が成立する．

証明　$N_1=2^{\nu-1}n_2\cdots n_\nu$ とし，$\mathrm{A}_0{}^{(1)}=\mathrm{C}(\mathbf{S}^{N_1})$ とおく．このとき，$a_1,\cdots,a_{2n_1}\in\mathrm{A}_0{}^{(1)}$ に対して

$$F(a_1,\cdots,a_{2n_1})=\left\langle\prod_{j=-n_1+1}^{n_1}a_{n_1+j}(\{S_\alpha\}_{\alpha_1=j,\alpha\in\Lambda})\right\rangle_\Lambda \tag{6.3.12}$$

とすれば，F は

$$\underbrace{\mathsf{A}_0{}^{(1)} \times \cdots \times \mathsf{A}_0{}^{(1)}}_{2n_1}$$

の上の多重線形汎関数であり，仮定から，定理 6.3.2 と同様にして，F は定理 6.3.1 の仮定をみたすことが示される（r は定理 6.3.2 と同様）．したがって F に対して (6.3.5) が成立する．そこでいま

$$a_{n_1+j}(\{S_\alpha\}_{\alpha_1=j,\alpha\in\Lambda}) = \prod_{\alpha_2\cdots\alpha_\nu} G_{(j,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu)}(S_{(j,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu)})$$

とおけば，

$$|\langle \prod_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha(S_\alpha)\rangle_\Lambda| \leqslant \prod_{\alpha_1} |\langle \prod_{\beta\in\Lambda} G_{(\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_\nu)}(S_\beta)\rangle_\Lambda|^{1/2n_1}.$$

次に，$N_2 = 2^{\nu-1}n_1n_3\cdots n_\nu$ として，$\mathsf{A}_0{}^{(2)} = \mathsf{C}(\mathbf{S}^{N_2})$ を考える．(6.3.12) と同様に

$$\underbrace{\mathsf{A}_0{}^{(2)} \times \cdots \times \mathsf{A}_0{}^{(2)}}_{2n_2}$$

上の多重線形汎関数を考えれば，これに対しても碁盤目型の評価式が成立する．今度は

$$\begin{aligned} &a_{n_2+j}(\{S_\beta\}_{\beta_2=j,\beta\in\Lambda}) \\ &\quad = \prod_{\beta_1,\beta_3,\cdots,\beta_\nu} G_{(\alpha_1,j,\beta_3,\cdots,\beta_\nu)}(S_{(\beta_1,j,\cdots,\beta_\nu)}) \end{aligned}$$

とおけば，

$$\begin{aligned} &\prod_{j=-n_2+1}^{n_2} a_{n_2+j}(\{S_\beta\}_{\beta_2=j,\beta\in\Lambda}) \\ &\quad = \prod_{\beta\in\Lambda} G_{(\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_\nu)}(S_\beta) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} &|\langle \prod_{\beta\in\Lambda} G_{(\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_\nu)}(S_\beta)\rangle_\Lambda| \\ &\quad \leqslant \prod_{\alpha_2} |\langle \prod_{\beta\in\Lambda} G_{(\alpha_1,\alpha_2,\beta_3,\cdots,\beta_\nu)}(S_\beta)\rangle|^{1/2n_2}. \end{aligned}$$

すなわち，

$$\begin{aligned} &|\langle \prod_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha(S_\alpha)\rangle_\Lambda| \\ &\quad \leqslant \prod_{\alpha_1\alpha_2} |\langle \prod_{\beta\in\Lambda} G_{(\alpha_1,\alpha_2,\beta_3,\cdots,\beta_\nu)}(S_\beta)\rangle|^{1/2^2n_1n_2}. \end{aligned}$$

この手続きを各軸方向にくり返してゆけば (6.3.11) が得られる. ∎

6.4 相転移への応用——赤外評価の方法

前節までに得た結果を，格子スピン系・強磁性体モデルの相転移の問題に応用しよう.

自然数 $N \geqslant 1$ を固定し，スピンの配位空間が $\dot{\mathbf{R}}^N$ で，その単独のスピン分布 $d\mu_0(S)$ が

$$d\mu_0(S) = F(S)d^N S \qquad \left(\int d\mu_0(S) = 1\right), \tag{6.4.1}$$

という形であたえられる ν 次元格子スピン系を考える. ここで，$F > 0$ は $\mathbf{R}^N$ 上の可測関数で，$d^N S$ は通常の Lebesgue 測度である. また，任意の $a > 0$ に対して

$$\int \exp[aS^2] d\mu_0(S) < \infty \tag{6.4.2}$$

と仮定する. $\Omega_\Lambda \equiv (\dot{\mathbf{R}}^N)^{|\Lambda|}$ ($\dot{\mathbf{R}}^N$ の $|\Lambda|$ 個の直積) 上の可測関数 A に対して

$$\langle A \rangle_0 = \int A \prod_{\alpha\in\Lambda} d\mu_0(S_\alpha) \tag{6.4.3}$$

とおく.

この節では，以下，Λ は (6.3.10) であたえられるものとし，典型的な強磁性体モデルのハミルトニアン

$$H_\Lambda = -J \sum_{\substack{|\alpha-\beta|=1 \\ \alpha,\beta\in\Lambda}} S_\alpha S_\beta \qquad (J > 0) \tag{6.4.4}$$

を考える. 境界条件は周期的とする. 分配関数 Z_Λ と状態 $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ は

$$Z_\Lambda = \langle \exp[-H_\Lambda] \rangle_0, \tag{6.4.5}$$

$$\langle\cdot\rangle_\Lambda = \frac{\langle \cdot \exp[-H_\Lambda] \rangle_0}{Z_\Lambda} \tag{6.4.6}$$

によって定義される*). 命題 6.2.12 によって $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ は定理 6.3.3 の仮定をみ

*) 温度パラメーター β は J に含ませておく.

たし，したがって，碁盤目型の評価式が成立することを注意しておく．

碁盤目型の評価式を応用することにより，次の重要な結果を得る．

定理 6.4.1 [Gauss 型の上界 (Gaussian Domination)]

$$U_\Lambda(S) = \frac{J}{2}\sum_{\substack{|\alpha-\beta|=1\\ \alpha,\beta\in\Lambda}}(S_\alpha-S_\beta)^2 \tag{6.4.7}$$

としよう．ただし，右辺の和は周期的境界条件でのものとする．$h=\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $h_\alpha\in\mathbf{R}^N$，に対して

$$W_\Lambda(h) = \langle\exp[-U_\Lambda(S-h)]\rangle_0 \tag{6.4.8}$$

を定義する．このとき，

$$W_\Lambda(h) \leqslant W_\Lambda(0). \tag{6.4.9}$$

証明　変数変換

$$S_\alpha-h_\alpha \longrightarrow S_\alpha$$

によって

$$W_\Lambda(h) = \left\langle\left[\prod_{\alpha\in\Lambda}\frac{F(S_\alpha+h_\alpha)}{F(S_\alpha)}\right]\exp[-U_\Lambda(S)]\right\rangle_0$$

と書ける．

$$U_\Lambda(S) = H_\Lambda+2\nu J\sum_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha{}^2 \tag{6.4.10}$$

と表わされるから，線形汎関数 $\langle\cdot\exp[-U_\Lambda(S)]\rangle_0$ に対して碁盤目型の評価式が成立する．したがって，

$$W_\Lambda(h) \leqslant \prod_{\alpha\in\Lambda}\left\langle\left[\prod_{\beta\in\Lambda}\frac{F(S_\beta+h_\alpha)}{F(S_\beta)}\right]\exp[-U_\Lambda(S)]\right\rangle_0^{1/|\Lambda|}.$$

この式の右辺は，α を固定し，変数変換 $S_\beta+h_\alpha \longrightarrow S_\beta$ を行ない，

$$U_\Lambda(\{S_\beta-h_\alpha\}_\beta) = U_\Lambda(\{S_\beta\}_\beta)$$

を使えば，各因子が $W_\Lambda(0)^{1/|\Lambda|}$ となる．ゆえに (6.4.9) を得る．∎

上の定理からいくつかの興味ある結果が得られる．

系 6.4.2

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}h_\alpha=0, \qquad h_\alpha\in\mathbf{R}^N$$

をみたす任意の $h=\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対して,

$$\langle \exp\langle S,h\rangle\rangle_\Lambda \leqslant \exp[(2J)^{-1}\langle h,(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}})^{-1}h\rangle]. \tag{6.4.11}$$

ここで,

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\alpha\in\Lambda}\bar{f}_\alpha g_\alpha$$

で, $\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}}$ は $\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$ における周期的境界条件つきの格子近似のラプラシアンである (付録2参照)*).

証明　まず, 任意の $f=\{f_\alpha\}$, $g=\{g_\alpha\}$, $f_\alpha, g_\alpha\in\mathbf{R}^N$ に対して

$$\sum_{|\alpha-\beta|=1}(f_\alpha-f_\beta)(g_\alpha-g_\beta) = \langle -\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}}f,g\rangle \tag{6.4.12}$$

を示そう. 付録2によって, 各 i 軸 $(i=1,\cdots,\nu)$ 方向に対して $2n_i$ を法として

$$(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}}f)_\alpha = \sum_{i=1}^{\nu}[(f_\alpha-f_{\alpha+\delta_i})+(f_\alpha-f_{\alpha-\delta_i})],\qquad \alpha\in\Lambda$$

と書ける. したがって

(6.4.12) の左辺

$$\begin{aligned}
&=\sum_{\alpha\in\Lambda}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}[(f_\alpha-f_{\alpha+\delta_i})g_\alpha+(f_{\alpha+\delta_i}-f_\alpha)g_{\alpha+\delta_i}]\right\}\\
&=\sum_{\alpha\in\Lambda}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}[(f_\alpha-f_{\alpha+\delta_i})g_\alpha+(f_\alpha-f_{\alpha-\delta_i})g_\alpha]\right\}\\
&=\langle -\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}}f,g\rangle.
\end{aligned}$$

(6.4.12) により, 特に,

$$\sum_{|\alpha-\beta|=1}(h_\alpha-h_\beta)^2 = \langle -\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}}h,h\rangle.$$

したがって,

$$\begin{aligned}
U_\Lambda(S-h) = \frac{J}{2}\sum_{|\alpha-\beta|=1}&(S_\alpha-S_\beta)^2\\
&-J\langle -\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}}h,S\rangle+\frac{J}{2}\langle -\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}}h,h\rangle.
\end{aligned}$$

---

*)　格子間隔を $a=1$ とした.

そこで,

$$\exp[-JS_\alpha{}^2]d\mu_0(S_\alpha)$$

を改めて $d\mu_0(S_\alpha)$ とおけば, 不等式 (6.4.9) は

$$\langle\exp[J\langle-\Delta_\Lambda{}^{\mathrm{P}}h, S\rangle]\rangle_\Lambda \leqslant \exp\left[\frac{J}{2}\langle-\Delta_\Lambda{}^{\mathrm{P}}h, h\rangle\right]$$

を導く. Jh を $(-\Delta_\Lambda{}^{\mathrm{P}})^{-1}h$ とすれば, (6.4.11) を得る. ただし, この場合, 付録2の命題2.3によって, h は $\sum_\alpha h_\alpha=0$ をみたさなければならない. ∎

注意 不等式 (6.4.11) で, 系の仮定をみたす任意の h に対して等号が成立するのは, $d\mu_0(S)$ が Gauss 型, すなわち

$$d\mu_0(S)=(J/\pi)^{N/2}\exp(-JS^2)d^NS \tag{6.4.13}$$

の場合であることは容易にわかる. この理由から, 不等式 (6.4.11) およびこれと同等な不等式 (6.4.9) は 'Gaussian Domination' とよばれている.

系 6.4.3 任意の $h=\{h_\alpha\}$, $h_\alpha\in\mathbf{R}^N$ に対して

$$\langle\exp\langle S, (-\Delta_\Lambda{}^{\mathrm{P}})^{1/2}h\rangle\rangle_\Lambda \leqslant \exp[(2J)^{-1}\langle h, h\rangle]. \tag{6.4.14}$$

証明 上の h に対して, $f=(-\Delta_\Lambda{}^{\mathrm{P}})^{1/2}h$ とおけば容易にわかるように (付録2参照)

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}f(\alpha)=0.$$

したがって, 系 6.4.2 が適用できて, (6.4.14) を得る. ∎

系 6.4.4 任意の $h=\{h_\alpha\}$, $h_\alpha\in\mathbf{R}^N$ に対して

$$\langle\langle S, h\rangle\langle S, -\Delta_\Lambda{}^{\mathrm{P}}h\rangle\rangle_\Lambda\leqslant J^{-1}\langle h, h\rangle. \tag{6.4.15}$$

証明 λ を実数として, $h\longrightarrow\lambda h$ のおきかえを (6.4.14) ですることによって

$$\langle\exp[\lambda\langle S, (-\Delta_\Lambda{}^{\mathrm{P}})^{1/2}h\rangle]\rangle_\Lambda \leqslant \exp[(\lambda^2/2J)\langle h, h\rangle]. \tag{6.4.16}$$

(6.4.16) の左辺は λ について無限回微分可能であり, 特に $\lambda=0$ における2階の微分を考えると

$$\langle\langle S, (-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}})^{1/2}h\rangle^2\rangle_\Lambda \leqslant \lim_{\lambda\to 0}\frac{2(e^{\lambda^2\langle h, h\rangle/2J}-1)}{\lambda^2}$$
$$= J^{-1}\langle h, h\rangle. \tag{6.4.17}$$

一方，

$$\begin{aligned}&(6.4.17)\ \text{の左辺}\\ &= \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda}\langle S_\alpha S_\beta\rangle_\Lambda(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}})^{1/2}h_\alpha(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}})^{1/2}h_\beta\\ &= \langle(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}})^{1/2}h, K(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}})^{1/2}h\rangle.\end{aligned} \tag{6.4.18}$$

ここで，K は

$$Kf_\alpha = \sum_\beta K_{\alpha\beta}{}^{(\Lambda)}f_\beta, \qquad K_{\alpha\beta}{}^{(\Lambda)} = \langle S_\alpha S_\beta\rangle_\Lambda$$

によってあたえられる演算子で，通常のユークリッド内積を入れた有限次元 Hilbert 空間

$$\mathcal{L}_\Lambda = \{f = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\,|\,f_\alpha \in \mathbf{C}^N\}$$

の上で自己共役である．並進不変性により，$K_{\alpha\beta}{}^{(\Lambda)}$ は $\alpha-\beta$ のみによるので，K は $-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}}$ と可換，したがって $(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}})^{1/2}$ とも可換となる．ゆえに (6.4.18) は $\langle h, K(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{P}})h\rangle$ に等しく，これを書きなおせば，(6.4.15) となる．∎

系 6.4.4 から，$\nu \geqslant 3$ での相転移の議論に有用な次の定理が得られる：

定理 6.4.5　任意の $\alpha\in\mathbf{Z}^\nu$ に対して

$$\begin{aligned}F_j(\alpha) &\equiv \lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu}\langle S_\alpha{}^{(j)}S_0{}^{(j)}\rangle_\Lambda, \qquad j=1,\cdots,N\\ &\equiv \langle S_\alpha{}^{(j)}S_0{}^{(j)}\rangle\end{aligned} \tag{6.4.19}$$

が存在すると仮定する．このとき

$$F_j(\alpha) = \int_{[-\pi,\pi]^\nu} dp[a_j\delta(p)+\rho_j(p)]e^{i\alpha p} \tag{6.4.20}$$

と表わされる．ここで

$$a_j = \lim_{|\alpha|\to\infty}\langle S_\alpha{}^{(j)}S_0{}^{(j)}\rangle = \lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu}\frac{1}{|\Lambda|}\langle\sum_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha{}^{(j)}S_0{}^{(j)}\rangle, \tag{6.4.21}$$

$\rho_j(p)$ は $[-\pi, \pi]^\nu$ 上の非負値関数で不等式

$$\rho_j(p) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^\nu 2JE(p)}, \qquad p \neq 0 \tag{6.4.22}$$

をみたす．ただし，

$$E(p) = 2\sum_{i=1}^{\nu}(1-\cos p_i) \tag{6.4.23}$$

証明 有界な台をもつ $f=\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{Z}^\nu}$ に対して，並進不変性によって

$$\sum_{\alpha,\beta}\bar{f}_\alpha F_j(\alpha-\beta)f_\beta \geqslant 0$$

が成立するから，$\{F_j(\alpha-\beta)\}_{\alpha,\beta\in\mathbf{Z}^\nu}$ は正型の無限次元行列である．したがって，Bochner の定理（たとえば，Reed and Simon (1975)，定理 IV. 9）の一般化によって，$[-\pi,\pi]^\nu$ 上のある測度 $d\mu_j(p)$ が存在して，

$$F_j(\alpha) = \int_{[-\pi,\pi]^\nu} e^{i\alpha p}d\mu_j(p)$$

と書ける．いま，f の台が有界なので，(6.4.15) によって

$$\langle\langle S,f\rangle\langle S,-\Delta f\rangle\rangle \leqslant J^{-1}\langle f,f\rangle.$$

ここで，Δ は $\mathbf{Z}^\nu$ における格子近似のラプラシアンである．したがって

$$(2\pi)^\nu\int_{[-\pi,\pi]^\nu} E(p)|\hat{f}(p)|^2d\mu_j(p) \leqslant J^{-1}\int_{[-\pi,\pi]^\nu} dp|\hat{f}(p)|^2 \tag{6.4.24}$$

を得る．ここで，$\hat{f}(p)$ は

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^\nu} f(\alpha)e^{-i\alpha p}$$

で定義される，$[-\pi,\pi]^\nu$ 上の関数である．Hilbert 空間

$$\mathcal{L} = \{f=\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{Z}^\nu}\,|\,f_\alpha\in\mathbf{C}^N, \|f\|^2\equiv\sum_\alpha|f_\alpha|^2<\infty\}$$

を考えると，写像

$$f \longrightarrow \hat{f}\in \mathrm{L}^2([-\pi,\pi]^\nu:\mathbf{C}^N)$$

は，$\mathcal{L}$ から '$\mathbf{C}^N$ の値をとる，$[-\pi,\pi]^\nu$ 上の絶対 2 乗可積分関数の全体のなす Hilbert 空間' $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi]^\nu:\mathbf{C}^N)$ の上へのユニタリ変換をあたえる*)．台が有

*) Fourier 級数論の基本的事実である．

界な $\mathbf{Z}^\nu$ 上の列は $\mathcal{L}$ で稠密であるので，(6.4.24) は，すべての $f \in \mathcal{L}$ に対して拡張される．測度 μ_j を Lebesgue の分解にしたがって，絶対連続部分 $\mu_j{}^{\mathrm{ac}}$ と特異部分 $\mu_j{}^{\mathrm{s}}$ に分けよう．$\mu_j{}^{\mathrm{ac}}$ は，ある非負値可積分関数 $\rho_j(p)$ があって

$$d\mu_j{}^{\mathrm{ac}}(p) = \rho_j(p)dp$$

と書ける．すると (6.4.24) から

$$(2\pi)^\nu E(p)\rho_j(p) \leqslant J^{-1} \qquad \text{a.e. } p \quad . \tag{6.4.25}$$

一方，$\mu_j{}^{\mathrm{s}}$ の台を S とすると $\int_{\mathrm{S}} dp = 0$ だから，(6.4.24) で $\hat{f}$ として S 上の定義関数を考えて，

$$\int_{\mathrm{S}} d\mu_j{}^{\mathrm{s}}(p)E(p) = 0.$$

したがって，$E(p) = 0, p \in \mathrm{S}$．すなわち，$\mathrm{S} = \{p = 0\}$．ゆえに，

$$d\mu_j{}^{\mathrm{s}}(p) = a_j\delta(p)dp$$

という形に書ける．こうして $F_j(\alpha)$ は (6.4.20) の形をもつ．(6.4.22) は (6.4.25) から得られる．また，Riemann-Lebesgue の定理によって，

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} \int dp\rho_j(p)e^{i\alpha p} = 0$$

だから，(6.4.21) の最初の等号を得る；第2番目の等号は

$$a_n \to a \quad \text{ならば} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{N} \to a \quad (N \to \infty)$$

という初等的事実の応用にすぎない．∎

不等式 (6.4.22) を**赤外評価式** (infrared bound) とよぶ．これは，相関関数 $\langle S_\alpha{}^{(j)} S_0{}^{(j)} \rangle$ の運動量空間での $p = 0$ の近傍（'光' の赤外領域）での評価をあたえるからである．

系 6.4.6　$\nu \geqslant 3$ とし，定理 6.4.5 と同じ仮定のもとで

$$c = \lim_{|\alpha|\to\infty} \langle S_\alpha S_0 \rangle = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^\nu} \frac{1}{|\Lambda|} \langle \sum_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha S_0 \rangle \tag{6.4.26}$$

$$I(\nu) = (2\pi)^{-\nu} \int_{[-\pi,\pi]^\nu} dp E(p)^{-1} \tag{6.4.27}$$

とおく．$\nu \geqslant 3$ としたので (6.4.27) の積分は収束する．このとき，

$$c \geqslant \langle |S_0|^2 \rangle - \frac{NI(\nu)}{J} \tag{6.4.28}$$

証明 (6.4.20) で $\alpha=0$ の場合を考えると

$$\langle (S_0{}^{(j)})^2 \rangle = a_j + \int dp\rho_j(p) \leqslant a_j + \frac{I(\nu)}{J}.$$

$\sum_{i=1}^{N} a_j = c$ であるから，両辺を j について加えることにより，(6.4.28) を得る．∎

上の系の結果として，相転移について次の定理が得られる．

定理 6.4.7 最近接相互作用をもつ，ν 次元 ($\nu \geqslant 3$) の強磁性的 N-ベクトルモデル (5.2節参照) を考える．すなわち，(6.3.10) で定めた Λ におけるハミルトニアン

$$H_\Lambda \equiv -J \sum_{\substack{|\alpha-\beta|=1 \\ \alpha,\beta\in\Lambda}} S_\alpha S_\beta \qquad (J>0)$$

を周期的境界条件であたえ，

$$d\mu_0(S) = c_0\delta(S^2-1)d^N S \qquad (c_0>0 : \text{規格化定数})$$

とする．このとき，逆数温度 $\beta > NI(\nu)/2J$ ならば，相転移が存在し，O(N) 対称性の自発的破れがおこる．

注意 (1) このモデルに対しては，第5章で示したように，すべての β に対して無限体積極限は少なくともひとつ存在する．

(2) 測度 $d\mu_0(S) = c_0\delta(S^2-1)d^N S$ に対しても——$\delta(S^2-1)$ は関数ではないが——定理 6.4.1 は成立する (問題 6.1)．

証明 十分に小さな β に対して相転移が存在しないことは，第5章の一意性定理 (定理 5.5.12′) による．いま，無限体積極限

$$\langle \cdot \rangle_\beta = \frac{\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu} \langle \cdot \, e^{-\beta H_\Lambda} \rangle_0}{\langle e^{-\beta H_\Lambda} \rangle_0}$$

をひとつ固定し（$\langle\cdot\rangle_\beta$ は $\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu$ とする Λ の列の選び方によってもよい），c を (6.4.26) であたえられるものとしよう（ここで，系 6.4.6 における J は $J\beta$ で置き換える）．いまのモデルでは

$$\langle|S_0|^2\rangle_\beta = \langle 1\rangle_\beta = 1$$

であるから，(6.4.28) によって，$\beta > NI(\nu)/2J$ ならば，$c>0$ である．一方，$S_\alpha \longrightarrow -S_\alpha$ の対称性により，

$$\langle S_\alpha\rangle_\beta = 0, \qquad \alpha\in\mathbf{Z}^\nu$$

だから，$A=S_0$ とすれば，$c>0$ は (5.6.7) の左辺に等しいので

$$c = C(A) > 0$$

を得る．ゆえに，$\beta > NI(\nu)/2J$ ならば，観測量 S_0 に対して状態 $\langle\cdot\rangle_\beta$ のエルゴード性はこわれ，系 5.6.7 により相転移が存在する．さらに，$\langle\cdot\rangle_\beta$ は $\mathrm{O}(N)$ 不変であるから，定理 5.6.9 により $\mathrm{O}(N)$ 対称性の自発的破れの存在が結論される（問題 6.2）．∎

$\langle S_\alpha\rangle=0$ をみたすモデルでは，結局，$c>0$ が状態の非エルゴード性，すなわち，相転移の存在可能性を意味する．一方，$c>0$ であることは，$\langle S_\alpha S_0\rangle$ の Fourier 変換

$$c\delta(p)+\sum_{j=1}^{N}\rho_j(p)$$

において，$p=0$ に集中した分布 $\delta(p)$ の存在を意味している．こうして，$\nu\geqq 3$ における上記のようなモデルの相転移は，物理的には，S_α の‘スピン波’の運動量空間における運動量 0 での‘凝縮 (condensation)’の存在として理解される．

系 6.4.6 および上の証明からわかるように，一般の有界なスピン系の相転移の存在を示すには，$\langle|S_0|^2\rangle_\beta$ の $\beta\to\infty$（あるいは $J\to\infty$）でのふるまいを知ることがひとつの要点である（N-ベクトルモデルの場合はつねに

$$\langle|S_0|^2\rangle_\beta = 1 > 0$$

でトリヴィアルであった）．そこで，これを次に調べよう．

補題 6.4.8　$H_\Lambda, Z_\Lambda, \langle\cdot\rangle_\Lambda$ を (6.4.4)～(6.4.6) であたえられるものとし，$\langle\cdot\rangle_\beta$ を ($J\longrightarrow\beta J$ と置き換えた) $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ の無限体積極限とする ($\{\Lambda\}, \Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu$,

の選び方によってもよい).

$$m = \max\{\,|S| \mid S \in \operatorname{supp} d\mu_0(S)\}$$

としよう ($m = +\infty$ でもよい). このとき

$$\lim_{\beta\to\infty}\langle |S_0|^2\rangle_\beta = m^2. \tag{6.4.29}$$

証明 $m < \infty$ ならば

$$\sum_{|\alpha-\beta|=1} |S_\alpha|\cdot|S_\beta| \leqslant 2\nu m^2|\Lambda|$$

だから

$$Z_\Lambda \leqslant |\mu_0(\mathbf{R}^N)|^{|\Lambda|}\exp[2\nu\beta J m^2|\Lambda|].$$

任意の $m_1 < m$ に対して,

$$\mu_0(S_{m_1}) > 0, \qquad S\cdot S' \geqslant (m_1)^2, \qquad S, S' \in S_{m_1},$$

となる集合 $S_{m_1} \subset \mathbf{R}^N$ がとれる. したがって

$$Z_\Lambda \geqslant |\mu_0(S_{m_1})|^{|\Lambda|} e^{2\nu\beta J m_1{}^2|\Lambda|}.$$

$P_\Lambda(J) = \beta^{-1}|\Lambda|^{-1}\log Z_\Lambda$ (圧力) とおけば

$$\frac{1}{\beta J}\log\mu_0(S_{m_1}) + 2\nu m_1{}^2 \leqslant \frac{P_\Lambda(J)}{J} \leqslant \frac{1}{\beta J}\log\mu_0(\mathbf{R}^N) + 2\nu m^2.$$

$P_\Lambda(J)$ は J について微分可能で $P_\Lambda(0) = 0$ だから, 平均値の定理により, ある $0 < \theta < 1$ が存在して,

$$\frac{P_\Lambda(J)}{J} = P_\Lambda'(\theta J).$$

$P_\Lambda'(J) = |\Lambda|^{-1}\langle \sum_{|\alpha-\gamma|=1} S_\alpha S_\gamma\rangle_\Lambda = \langle \sum_{|\alpha|=1} S_\alpha S_0\rangle_\Lambda$ だから, $\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^\nu$ として,

$$\frac{1}{\beta J}\log\mu_0(S_{m_1}) + 2\nu m_1{}^2 \leqslant \langle \sum_{|\alpha|=1} S_\alpha S_0\rangle_{\theta\beta} \leqslant \frac{1}{\beta J}\log\mu_0(\mathbf{R}^N) + 2\nu m^2$$

を得る. そこで, $\beta\to\infty$ とすれば

$$\lim_{\beta\to\infty}\langle \sum_{|\alpha|=1} S_\alpha S_0\rangle_\beta = 2\nu m^2 \tag{6.4.30}$$

となる. ここで, $m_1 < m$ が任意であることを用いた. 一方, Schwarz の不

等式によって

$$\langle S_\alpha S_0\rangle_\beta \leqslant \langle |S_0|^2\rangle_\beta.$$

これと (6.4.30) および自明な不等式 $\langle |S_0|^2\rangle_\beta \leqslant m^2$ から, (6.4.29) が得られる. $m=\infty$ の場合も同様. ∎

この補題により, 定理6.4.7より少し一般的な次の定理を得る.

定理 6.4.9　$\nu \geqslant 3$ とし, H_Λ が (6.4.4) であたえられる系の状態 $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ の無限体積極限を $\langle\cdot\rangle_\beta$ とする ($J \longrightarrow \beta J$ の置き換えをする).

$$d\mu_0(S) = d\mu_0(-S)$$

と仮定する. このとき, $\beta_0 > 0$ が存在して, $\beta \geqslant \beta_0$ ならば, $\langle\cdot\rangle_\beta$ はエルゴード的でない.

証明　補題 6.4.8 と系 6.4.6 により, β が十分大きければ $c>0$ である.

$$d\mu_0(S) = d\mu_0(-S)$$

によって $\langle S_\alpha\rangle_\beta = 0$ であるから, $c>0$ は, 状態 $\langle\cdot\rangle_\beta$ がエルゴード的ではないことを示している. ∎

定理 6.4.9 は, スピンが有界, すなわち $d\mu_0(S)$ の台が有界な場合には, 定理6.4.7と同様, 第5章で定義した意味における相転移の存在を示している.

6.5　2点相関関数の単調減少性

この節では, $\mathbf{Z}^\nu$ 上の格子スピン系の抽象的な枠組において, 鏡映正値性をもつ系の2点相関関数の相対座標に関する単調減少性を証明する.

任意の自然数 $\nu \geqslant 1$ に対し

$$\Omega = \dot{\times}_{x\in\mathbf{Z}^\nu} \mathbf{R}_x \qquad (\mathbf{R}_x = \mathbf{R},\, x\in\mathbf{Z}^\nu) \tag{6.5.1}$$

とし, $\langle\cdot\rangle$ を $\mathrm{C}(\Omega)$ 上の並進不変な状態とする. ここで, $\mathrm{C}(\Omega)$ は Ω 上の連続関数の全体である. したがって, Ω 上の並進不変な確率測度 μ が存在して

$$\langle A\rangle = \int_\Omega d\mu(\phi)A(\phi), \qquad A\in\mathrm{C}(\Omega)$$

と書ける*). 以下, 任意の $x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{Z}^\nu$ と任意の定数 $a_j > 0$ ($j = 1, \cdots, n$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$) に対して

$$\int_\Omega d\mu(\phi) \exp\left[\sum_{j=1}^n a_j |\phi(x_j)|\right] < \infty$$

を仮定する.

$\mathbf{Z}^\nu$ の点 x を $x = (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^{\nu-1}$ と書き,

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= \{(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{Z}^\nu \mid t > 0\}, \\ \Lambda_- &= \{(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbf{Z}^\nu \mid t \leqslant 0\} \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

とおく. r を $t = 1/2$ についての鏡映とすれば, r は $\Lambda_\pm$ から $\Lambda_\mp$ の上への1対1の写像であり, $r^2 = 1$ がなりたつ. $\mathsf{A}_\pm = \mathsf{A}_{\Lambda_\pm}$ とし (記号については 5.1 節参照), $\theta : \mathsf{A}_+ \longrightarrow \mathsf{A}_-$ を

$$\theta(F)(\phi) = \overline{F(\theta_* \phi)}, \qquad \phi \in \Omega_{\Lambda_-} \tag{6.5.3}$$

によって定義する. 以下, この節を通して, 状態 $\langle \cdot \rangle$ は, θ について鏡映正値的であると仮定する.

鏡映正値性は, A_+ よりも広い関数族に拡張される.

補題 6.5.1　$F(u_1, \cdots, u_n)$ を $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数で

$$|F(u_1, \cdots, u_n)| \leqslant c \prod_{j=1}^n e^{a_j |u_j|} \tag{6.5.4}$$

をみたすものとする. ただし, $c > 0$, $a_j > 0$ ($j=1, \cdots, n$) は定数である. このとき, 任意の $x_1, \cdots, x_n \in \Lambda_+$ に対して,

$$\langle \theta(F_{x_1 \cdots x_n}) F_{x_1 \cdots x_n} \rangle \geqslant 0. \tag{6.5.5}$$

ここで,

$$F_{x_1 \cdots x_n}(\phi) = F(\phi(x_1), \cdots, \phi(x_n))$$

証明　まず F が連続で有界な台をもつ場合を考える. このとき, $F_{x_1 \cdots x_n} \in \mathsf{A}_+$ ($x_1, \cdots, x_n \in \Lambda_+$) であるから, (6.5.5) がなりたつ. 次に, F を補題の条件をみたすものとすれば, 有界な台をもつ連続関数列 $\{F^{(m)}\}$ で

$$|(F^{(m)} - F)(u_1, \cdots, u_n)| \leqslant \frac{c}{m} \prod_{j=1}^n e^{(a_j+1)|u_j|} \tag{6.5.6}$$

*) 第5章を参照.

となるものが存在する．したがって，特に，$F^{(m)}\to F$ $(m\to\infty)$（各点収束）．一方，前半により，

$$\langle\theta(F_{x_1\cdots x_n}{}^{(m)})F_{x_1\cdots x_n}{}^{(m)}\rangle\geqslant 0. \tag{6.5.7}$$

(6.5.4), (6.5.6) により

$$|\theta(F_{x_1\cdots x_n}{}^{(m)})(\phi)F_{x_1\cdots x_n}{}^{(m)}(\phi)|$$
$$\leqslant d\prod_{j=1}^{n}\exp[(a_j+1)(|\phi(rx_j)|+|\phi(x_j)|)].$$

右辺は，μ について可積分である．よって，(6.5.7) と Lebesgue の収束定理により，$m\to\infty$ として，(6.5.5) を得る．∎

各 $n\geqslant 0$ に対して，n 点相関関数 G_n を

$$G_n(x_1,\cdots,x_n)=\int d\mu(\phi)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n),\qquad x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{Z}^\nu \tag{6.5.8}$$

によって定義する．便宜上 $G_0=1$ としておく．G_n は Euclid 場の量子論で Schwinger 関数とよばれるものに当る（第8章を参照）．

$\mathbf{Z}^{n\nu}$ 上の複素数値関数で，有界な台をもつもののなすベクトル空間を $\mathrm{C}_0(\mathbf{Z}^{n\nu})$ とし，$\mathrm{C}_0(\mathbf{Z}^{n\nu})$ の元のうちで，その台が $\Lambda_\pm{}^n$（$\Lambda_\pm$ の n 個の直積集合）の中にあるもののなす部分空間を $\mathrm{C}_0{}^\pm(\Lambda_\pm{}^n)$ とする．$f\in\mathrm{C}_0(\mathbf{Z}^{n\nu})$ に対して，

$$G_n(f)=\sum_{x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{Z}^\nu}G_n(x_1,\cdots,x_n)f(x_1,\cdots,x_n) \tag{6.5.9}$$

とおく．

命題 6.5.2　$f_0\in\mathbf{C}, f_1\in\mathrm{C}_0{}^+(\Lambda_+),\cdots\cdots,f_n\in\mathrm{C}_0{}^+(\Lambda_+{}^n)$ を任意とする．このとき，すべての有限な $N\geqslant 1$ に対して

$$\sum_{n,m=0}^{N}G_{n+m}(\bar{r}f_n\otimes f_m)\geqslant 0. \tag{6.5.10}$$

ただし，$\bar{r}f_n\in\mathrm{C}_0{}^+(\Lambda_-{}^n)$ は

$$(\bar{r}f_n)\ (x_1,\cdots,x_n)=\overline{f_n(rx_n,\cdots,rx_2,rx_1)} \tag{6.5.11}$$

によって定義される．

証明

$$H(\phi)=f_0+\sum_{n=1}^{N}\sum_{x_1,\cdots,x_n\in\Lambda_+}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)f_n(x_1,\cdots,x_n) \qquad (6.5.12)$$

とおけば，(6.5.10) の左辺は，$\langle\theta(H)H\rangle$ に等しい．(6.5.12) の右辺は，有限個の独立な $\phi(x)$——それらを $\{\phi(x)|x\in S\}$ (S は Λ_+ のある有限部分集合) としよう——の多項式であるので，その $\phi(x)$ のところに $u_x\in\mathbf{R}$ を代入してできる多項式を $F(\{u_x\}_{x\in S})$ とすれば，それは，補題 6.5.1 の仮定をみたす．ゆえに $\langle\theta(H)H\rangle\geqslant 0$，したがって，(6.5.10) を得る．∎

$f\in\mathrm{C}_0(\mathbf{Z}^{n\nu})$ に対して，ノルム $|||f|||_m$ ($m\geqslant 0$) を

$$|||f|||_m{}^2=\sum_{x\in\mathbf{Z}^{n\nu}}(1+|x|^2)^m|f(x)|^2 \qquad (6.5.13)$$

によって定義する．

定理 6.5.3　状態 $\langle\cdot\rangle$ は次の (i)—(iii) をみたすとしよう：

(i)　各平面 $x_j=1/2$，および $x_j=0$ ($j=1,\cdots,\nu$，x_j は $x\in\mathbf{Z}^\nu$ の j 成分) について鏡映正値的である．

(ii)　各 $n\geqslant 1$ に対して，ある $m\geqslant 0$ と定数 $c>0$ が存在して，すべての $f\in\mathrm{C}_0(\mathbf{Z}^{n\nu})$ に対して

$$|G_n(f)|\leqslant c|||f|||_m$$

がなりたつ．

(iii)　各 $j=1,\cdots,\nu$ に対して

$$G_2(0,(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_\nu))=G_2(0,(x_1,\cdots,-x_j,\cdots,x_\nu)),$$
$$x=(x_1,\cdots,x_\nu)\in\mathbf{Z}^\nu.$$

このとき，$G_2(0,x)$ は，各 $|x_j|$ について単調減少である．

証明　ベクトル空間 $\mathbf{S}_+$ を

$$\mathbf{S}_+=\mathbf{C}\oplus\left[\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}_0(\Lambda_+{}^n)\right] \qquad (\text{不完全無限直和})$$

によって定義する．$f\in\mathbf{S}_+$ を成分表示

$$f=\{f_n\}_{n=0}^{\infty},\quad f_0\in\mathbf{C},\ f_n\in\mathrm{C}_0(\Lambda_+{}^n),\ n\geqslant 1,$$

で表わそう．$\mathbf{S}_+$ が不完全無限直和であるとは，$f_n\neq 0$ となる番号 n の個数が有限であることを意味する．

$f, g \in \mathbf{S}_+$ に対して，$(f, g)_+ \in \mathbf{C}$ を

$$(f, g)_+ = \sum_{m,n=0}^{\infty} G_{n+m}(\bar{r}f_n \otimes g_m)$$

によって定義する（右辺の和で 0 でない項数は有限である）．命題 6.5.2 によって，$(f, f)_+ \geqslant 0$ である．したがって，$(\cdot, \cdot)_+$ は $\mathbf{S}_+$ 上の内積をあたえる．いま

$$\mathbf{N}_+ = \{f \in \mathbf{S}_+ \mid (f, f)_+ = 0\}$$

とおき，$\mathbf{S}_+$ の $\mathbf{N}_+$ による商空間を完備化してできる Hilbert 空間を H_+ とする*)．

さて，各自然数 $t = 0, 1, 2, \cdots$, に対して，写像

$$T_t : \mathbf{S}_+ \longrightarrow \mathbf{S}_+$$

を

$$\begin{aligned}(T_t f)_n(t_1, x_1, \cdots, t_n, x_n) \\ = f(t_1 - t, x_1, \cdots, t_n - t, x_n)\end{aligned}$$

明らかに，

$$T_0 = I \quad (\text{単位演算子}),$$
$$T_{t+s} = T_t T_s$$

がなりたつ．また，$\langle \cdot \rangle$ の並進不変性により，T_t は

$$(f, T_t g)_+ = (T_t f, g)_+, \qquad f, g \in \mathbf{S}_+ \tag{6.5.14}$$

をみたす．

$$F(t) = (f, T_t f)_+$$

とおく．(6.5.14) によって，$F(2t) \geqslant 0$ である．平面 $x_1 = 0$ についての鏡映正値性と並進不変性により，$F(2t+1) \geqslant 0$ もなりたつ．Schwarz の不等式によって

$$\begin{aligned}F(t) &\leqslant \|f\|_+ \|T_t f\|_+ \\ &= \|f\|_+ (f, T_{2t} f)_+^{1/2} \\ &\leqslant \|f\|_+{}^{1+1/2} \|T_{2t} f\|_+{}^{1/2}.\end{aligned}$$

ここで，$\|f\|_+{}^2 \equiv (f, f)_+$．この手続きをくり返すと，

*) 江沢 (1978)，§ 18.1 を参照．

$$F(t) \leqslant \|f\|_+^{1+1/2+1/2^2+\cdots+1/2^{n-1}} F(2^n t)^{1/2^n}$$

が得られる．両辺の対数をとると

$$\log F(t) \leqslant 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\log\|f\|_+ + \frac{1}{2^n}\log F(2^n t). \tag{6.5.15}$$

一方，仮定 (ii) によって，

$$F(t) \leqslant c_f(1+t^m)$$

がなりたつ．ここで $c_f>0$ は f に依存する定数．よって，(6.5.15) における最後の項は $\log[c_f(1+2^{nm})]/2^n$ で上からおさえられるので，極限 $n\to\infty$ をとって，

$$\log F(t) \leqslant 2\log\|f\|_+,$$

すなわち，

$$F(t) \leqslant \|f\|_+^2 \tag{6.5.16}$$

を得る．これから，T_t が有界であり，$\mathbf{N}_+$ を不変にすることがわかる．よって，T_t は，H_+ 上の有界な自己共役演算子に拡大される．その拡張も同じ記号 T_t で表わすことにすると，その演算子ノルム $\|T_t\|$ は，(6.5.16) によって $\|T_t\|\leqslant 1$ をみたす．$F(t)\geqslant 0$ であったから，$T_t\geqslant 0$ である．したがって，T_t のスペクトルは $[0,1]$ に含まれるので，任意の $\Psi\in\mathsf{H}_+$ に対して，

$$\langle\Psi, T_t\Psi\rangle \geqslant \langle\Psi, T_t^2\Psi\rangle = \langle\Psi, T_{2t}\Psi\rangle.$$

こうして，$\langle\Psi, T_t\Psi\rangle$ は t について単調減少であることがわかった．したがって，とくに $F(t)$ は t について単調減少である．f として，$f_n=0,\ n\neq 1,\ f_1(x)=\delta_{x,0}$ の場合を考えると，$G_2(0,(t,\mathbf{0}))$ は t について単調減少であることがわかる．

上に定義した $\{T_t\}$ は，x_1 の正方向への並進群に対応するものであったが，仮定 (i) によって，任意の $j=2,\cdots,\nu$ に対しても，x_j の正方向への並進群に対応する同様の自己共役演算子 $\{T_t^{(j)}\}$ で，

$$0\leqslant T_t^{(j)}\leqslant 1$$

をみたすものがつくれる．しかも，$T_t^{(i)}$ と $T_s^{(j)}(i\neq j)$ は可換である．これから，$G_2(0,x)$ は，$x_j\geqslant 0$ $(j=1,\cdots,\nu)$ のとき，各 x_j について単調減少であることが証明される．これと仮定 (iii) とによって，$G_2(0,x)$ は，各 $|x_j|$ について単調減少であることが結論される．∎

定理6.5.3の仮定をみたす例は，第8章であたえる．

●演習問題

6.1 定理6.4.1を

$$d\mu_0(S_\alpha)=c_0\delta(|S_\alpha|^2-1)dS_\alpha$$

の例でチェックせよ．

6.2 定理6.4.7における O(N) 対称性の自発的な破れの部分を証明せよ．

6.3

$$\Lambda=\{0,1\}\subset\mathbf{Z}$$

とし，Λ の各点の単独のスピン分布を

$$d\mu_0(S)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(S+\frac{1}{2}\right)+\delta\left(S-\frac{1}{2}\right)\right]e^{-S}dS$$

$$d\mu_1(S)=\delta\left(S-\frac{1}{2}\right)dS$$

であたえる．

$$H_\Lambda=-JS_0S_1,\qquad J\leqslant 2,$$

とし，

$$\langle F\rangle_\Lambda=\frac{\displaystyle\int d\mu_0(S)d\mu_1(S)e^{-H_\Lambda}F}{\displaystyle\int d\mu_0(S)d\mu_1(S)e^{-H_\Lambda}}$$

とおく．このとき，$\langle\cdot\rangle_\Lambda$ は，$x=\dfrac{1}{2}$ の鏡映について鏡映正値的でないことを示せ．

注: この例は，各格子点におけるスピンの単独分布が等しくない場合には，相互作用が (6.1.4) の形をしていても，鏡映正値性は一般には成立しないことを示している．

6.4

$$\Lambda=\{0,1,2\}\subset\mathbf{Z}$$

とし，Λ の各点の単独のスピン分布は等しく，

$$d\mu(S)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(S+\frac{1}{2}\right)+\delta\left(S-\frac{1}{2}\right)\right]dS$$

であたえられるとしよう．スピンどうしの相互作用を

$$H_\Lambda=-J(S_0S_1-S_1S_2),\qquad J\neq 0,\ \ J\in\mathbf{R},$$

期待値を

$$\langle F\rangle_\Lambda=\frac{\displaystyle\int d\mu(S_0)d\mu(S_1)d\mu(S_2)e^{-H_\Lambda}F}{\displaystyle\int d\mu(S_0)d\mu(S_1)d\mu(S_2)e^{-H_\Lambda}}$$

とする．このとき，$x=1$ に関する鏡映について，$\langle\cdot\rangle_\Lambda$ は鏡映正値的でないことを示せ．

注: この例は，各格子点の単独のスピン分布が等しくても，相互作用が，(6.1.4) の形をしていない場合には，鏡映正値性は一般には成立しないことを示している．

6.5

$$\Lambda=\{0,1\}\subset\mathbf{Z}$$

とし，Λ の各点の単独のスピン分布を

$$d\mu_0(S)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(S+\frac{1}{2}\right)+\delta\left(S-\frac{1}{2}\right)\right]dS$$

$$d\mu_1(S)=\frac{1}{2}[\delta(S+1)+\delta(S-1)]dS$$

としよう．この系に対して，不等式 (6.4.9) は成立しないことを示せ．

注: この例は，各格子点における単独のスピン分布が等しくない場合には，'Gauss 型の上界' が一般には成立しないことを示している．

6.6 (1) ρ を $\mathbf{R}$ 上の測度で

$$\int_0^\infty e^{-y}d\rho(y)<\infty$$

をみたすものとする．このとき，

$$J(n)=\int_0^\infty e^{-ny}d\rho(y),\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

で定義される正数列 $\{J(n)\}$ は鏡映正値的であることを示せ．

(2) 任意の $c\geqslant 0$ と $\alpha>0$ に対して

$$J(n)=\frac{1}{(n+c)^\alpha}$$

は鏡映正値的であることを証明せよ．

ヒント:

$$\frac{1}{t^\alpha}=\int_0^\infty e^{-ty}d\rho(y)$$

となる ρ を見出し，(1) を使え．

6.7 ハミルトニアンが (6.2.12) であたえられる系に対して，6.4 節の方法を拡張し，$J(j)$ が問題 6.6 (2) の $J(j)$ であたえられる場合に相転移の有無を論ぜよ．

●文献

江沢 洋 (1978)，量子力学の構造，湯川・豊田 (1978)，第 IV 部．

Fröhlich, J., B. Simon and T. Spencer (1976), Infrared bounds, phase transitions and continuous symmetry breaking, Commun. Math. Phys. **50,** 79-85.

Fröhlich, J. and E. Lieb (1978), Phase transitions in anisotropic lattice spin systems, Commun. Math. Phys. **60,** 233-267.

Fröhlich, J., R. Israel, E. Lieb and B. Simon (1978), Phase transitions and reflection positivity. I, Commun. Math. Phys. **62,** 1-34.

Fröhlich, J. (1978), The pure phases —— harmonic functions of generalized processes or: mathematical physics of phase transitions and symmetry breaking, Bull. Amer. Math. Soc. **84,** 165-193.

Fröhlich, J., R. Israel, E. Lieb and B. Simon (1980), Phase transitions and reflection positivity. II, Short-range lattice models, J. Stat. Phys. **22,** 297-347.

Osterwalder, K. and R. Schrader (1973), Axioms for Euclidean Green's Functions, Commun. Math. Phys. **31,** 83-112.

Reed, M. and B. Simon (1972), *Methods of Modern Mathematical Physics I. Functional Analysis*, Academic Press, New York.

Reed, M. and B. Simon (1974), *Methods of Modern Mathematical Physics II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York.

Ruelle, D. (1969), *Statistical Mechanics : Rigorous Results*, *Benjamin*, New York.

湯川秀樹・豊田利幸編(1978),『量子力学II』, 岩波講座・現代物理学の基礎 4, 岩波書店.

第7章

相関不等式

相関不等式 (correlation inequality) は，スピンから生成される観測量の期待値——相関関数 (correlation function)——の間になりたつ不等式の総称であって，それらは統計力学の厳密な数学的基礎づけのために重要な役割をはたす.

7.1 Ginibre の方法

はじめに，Ginibre (1970) にしたがって，ひとつの抽象的な定式化をする. $(\mathbf{X}, d\mu)$ を有限測度空間とし，

$$Z=\int_{\mathbf{X}} d\mu, \tag{7.1.1}$$

$$\langle\cdot\rangle=\frac{\int_{\mathbf{X}} \cdot\, d\mu}{Z} \tag{7.1.2}$$

とおく.

定義 7.1.1 G を $\mathbf{X}$ 上のある可積分関数の集合とし，G の任意の元の積は $d\mu$ に関して可積分であると仮定する．このとき，$\{(\mathbf{X}, d\mu), \mathrm{G}\}$ が性質 G をもつとは，すべての $g_i \in \mathrm{G}$, すべての $n=1,2,\cdots$, すべての $\pm$ の組合せに対して

$$\int d\mu(x) d\mu(y) \prod_{i=1}^{n}[g_i(x) \pm g_i(y)] \geqslant 0 \tag{7.1.3}$$

が成立することをいう.

命題 7.1.2　$\{(\mathrm{X}, d\mu), \mathrm{G}\}$ が性質 G をもつとき，次の不等式がなりたつ：

（1）　$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} g_i \right\rangle \geqslant 0, \quad g_i \in \mathrm{G}, \quad n=1,2,\cdots, \tag{7.1.4}$$

（2）　$$\langle gh \rangle \geqslant \langle g \rangle \langle h \rangle, \quad g, h \in \mathrm{G}, \tag{7.1.5}$$

（3）　$$\int d\mu(x) d\mu(y) \prod_{i=1}^{n} [g_i(x)h_i(x) \pm g_i(y)h_i(y)] \geqslant 0,$$
$$g_i, h_i \in \mathrm{G}, \quad n=1,2,\cdots. \tag{7.1.6}$$

ここで，± の符号はすべての組合せをとる．

証明　まず

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} g_i \right\rangle = \frac{\int d\mu(x) d\mu(y) \left[\prod_{i=1}^{n} g_i(x) + \prod_{i=1}^{n} g_i(y) \right]}{2Z^2}$$

と書けることに注意する．ところが

$$\prod_{i=1}^{n} g_i(x) \pm \prod_{i=1}^{n} g_i(y) = \frac{1}{2}[g_1(x)+g_1(y)] \left[\prod_{i=2}^{n} g_i(x) \pm \prod_{i=2}^{n} g_i(y) \right]$$
$$+ \frac{1}{2}[g_1(x)-g_1(y)] \left[\prod_{i=2}^{n} g_i(x) \mp \prod_{i=2}^{n} g_i(y) \right]$$

（複号同順）

であるから，これを繰り返してゆけば，

$$\prod_{i=1}^{n} g_i(x) + \prod_{i=1}^{n} g_i(y)$$

は，

$$\prod_i [g_i(x) \pm g_i(y)]$$

という形の項の有限和となる．したがって，(7.1.4) を得る．

不等式 (7.1.5) は

$$\int d\mu(x) d\mu(y) [g(x)-g(y)][h(x)-h(y)]$$
$$= 2Z^2 \langle gh \rangle - 2Z^2 \langle g \rangle \langle h \rangle$$

から得られる．

不等式 (7.1.6) を得るには

$$
\begin{aligned}
&g_i(x)h_i(x)\pm g_i(y)h_i(y)\\
&=\frac{1}{2}[g_i(x)\pm g_i(y)][h_i(x)+h_i(y)]\\
&\quad+\frac{1}{2}[g_i(x)\mp g_i(y)][h_i(x)-h_i(y)] \qquad (\text{複号同順})
\end{aligned}
$$

に注意すればよい. ∎

次に測度 $d\mu$ が '摂動' を受けた場合を考えよう. これは, 応用上, 重要である.

命題 7.1.3 $\{(\mathbf{X}, d\mu), \mathsf{G}\}$ が性質 G をもつとする. $f\in\mathsf{G}$ は, 任意の $g_i\in\mathsf{G}$ と $n=1,2,\cdots,$ に対して

$$
\left\{\prod_{i=1}^{n}|g_i(x)|\right\}\exp|f(x)|
$$

が $d\mu$ について可積分であるようなものとする. このとき, $\{(\mathbf{X}, e^f d\mu), \mathsf{G}\}$ は性質 G をもつ.

証明 仮定と Lebesgue の収束定理によって

$$
\begin{aligned}
&\int d\mu(x)d\mu(y)e^{f(x)}e^{f(y)}\prod_{i=1}^{n}[g_i(x)\pm g_i(y)]\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int d\mu(x)d\mu(y)[f(x)+f(y)]^m\prod_{i=1}^{n}[g_i(x)\pm g_i(y)]
\end{aligned}
$$

と書ける. 右辺の各項は非負であるから, 左辺も非負となる. ∎

次の命題も, 応用上, 重要である.

命題 7.1.4 $(\mathbf{X}_i, d\mu_i), i=1,2,$ を 2 つの有限測度空間とし, $\{(\mathbf{X}_1, d\mu_1), \mathsf{G}_1\}$, $\{(\mathbf{X}_2, d\mu_2), \mathsf{G}_2\}$ はそれぞれ性質 G をもつとして,

$$
\mathbf{X}=\mathbf{X}_1\times\mathbf{X}_2, \qquad d\mu=d\mu_1\otimes d\mu_2,
$$
$$
\mathsf{G}=\{gh \mid g\in\mathsf{G}_1, h\in\mathsf{G}_2\}
$$

とおこう. このとき, $\{(\mathbf{X}, d\mu), \mathsf{G}\}$ は性質 G をもつ.

証明

$$f_i(x_1, x_2) = g_i(x_1)h_i(x_2), \qquad g_i \in \mathsf{G}_1,\ \ h_i \in \mathsf{G}_2,\ \ (x_1, x_2) \in \mathbf{X}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} f_i(x_1, x_2) \pm f_i(y_1, y_2) \\ &= \frac{1}{2}[g_i(x_1) \pm g_i(y_1)][h_i(x_2) + h_i(y_2)] \\ &\quad + \frac{1}{2}[g_i(x_1) \mp g_i(y_1)][h_i(x_2) - h_i(y_2)] \end{aligned}$$

だから,

$$\prod_{i=1}^{n} [f_i(x_1, x_2) \pm f_i(y_1, y_2)]$$

は

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} [g_i(x_1) \pm g_i(y_1)] \right\} \times \left\{ \prod_{i=1}^{n} [h_i(x_2) \pm h_i(y_2)] \right\}$$

という形の項の和として表わされる. $d\mu$ は $d\mu_1$ と $d\mu_2$ の積測度であるから, $\{(\mathbf{X}, d\mu), \mathsf{G}\}$ が性質 G をもつことが結論される. ∎

最後に, 性質 G をもつ $\{(\mathbf{X}, d\mu), \mathsf{G}\}$ の例をあげておこう.

命題 7.1.5　$d\mu(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の有限な偶測度, すなわち

$$d\mu(x) = d\mu(-x)$$

をみたす有限な測度としよう. G を次の 2 つの条件をみたす, $\mathbf{R}$ 上の実数値関数の集合とする:

（1）　$g \in \mathsf{G}$ は奇関数か非負値偶関数のどちらかである;

（2）　$g \in \mathsf{G}$ は $[0, \infty)$ で単調増加である.

このとき, $\{(\mathbf{R}, d\mu), \mathsf{G}\}$ は性質 G をもつ.

証明　最初に, $g_1, \cdots, g_n \in \mathsf{G}$ を奇関数とし

$$I \equiv \int d\mu(x)d\mu(y) \prod_{i=1}^{k} [g_i(x) + g_i(y)] \prod_{i=k+1}^{n} [g_i(x) - g_i(y)] \geqslant 0 \tag{7.1.7}$$

を示したい.

$$d\mu(x) = d\mu(-x),$$
$$g_i(x) = -g_i(-x)$$

を用いると

$$I = [1+(-1)^n](I_+ + I_-),$$

と表わされる．ここで,

$$I_\pm = \int_{x\geqq 0, y\geqq 0} d\mu(x)d\mu(y) \prod_{i=1}^{k} [g_i(x) \pm g_i(y)] \prod_{i=k+1}^{n} [g_i(x) \mp g_i(y)].$$

(複号同順).

さらに，積分領域を

$$\{x \geqq y \geqq 0\} \cup \{y \geqq x \geqq 0\}$$

と分けて考えることにより

$$J_\pm = \int_{x\geqq y\geqq 0} d\mu(x)d\mu(y) \prod_{i=1}^{k} [g_i(x) \pm g_i(y)] \prod_{i=k+1}^{n} [g_i(x) \mp g_i(y)]$$

(複号同順),

とおけば,

$$I_+ = [1+(-1)^{n-k}]J_+$$
$$I_- = [1+(-1)^k]J_-$$

となる．g_i は奇関数で単調増加であるから,

$$g_i(x) \geqq g_i(y) \geqq 0, \qquad x \geqq y \geqq 0.$$

したがって，$J_\pm \geqq 0$ となるから，$I_\pm \geqq 0$. ゆえに，$I \geqq 0$ を得る．すなわち，(7.1.7) が示された．

次に，$g \in \mathrm{G}$ が非負値偶関数であるとしよう．このとき，$c \equiv g(0) \geqq 0$ として

$$h(x) = \begin{cases} [g(x)-c]^{1/2} & x \geqq 0 \\ -[g(x)-c]^{1/2} & x < 0 \end{cases}$$

を考えると，h は $\mathbf{R}$ 上の実数値奇関数であり，$x \geqq 0$ で単調増加である．この式を逆に解けば,

$$g(x) = c + h(x)^2$$

であるから,

$$g(x)+g(y) = 2c+\frac{1}{2}[h(x)+h(y)]^2+\frac{1}{2}[h(x)-h(y)]^2$$

$$g(x)-g(y) = [h(x)-h(y)][h(x)+h(y)].$$

それゆえ，任意の非負値偶関数 $g_i \in \mathrm{G}$ に対して

$$\prod_{i=1}^{n}[g_i(x)\pm g_i(y)]$$

$$= \sum \prod_i [h_i(x)\pm h_i(y)]+(\text{非負の関数})$$

$$h_i \in \mathrm{G}：\text{奇関数}$$

という形に表わされるので（$\sum$ は和の意味），初めに示した (7.1.7) によって

$$\int d\mu(x)d\mu(y)\prod_{i=1}^{n}[h_i(x)\pm h_i(y)] \geqslant 0$$

を得る．▮

上の命題は，1成分スピン系への応用を念頭に置いたものであるが，N-ベクトル モデルなど多成分スピン系の場合を次に考えよう．

$N \geqslant 2$ とし，$x, y \in \mathbf{R}^N$ が各 $i=1,\cdots,N$ に対して $x_i \geqslant y_i$ をみたすならば，$x > y$ と書く．

$\mathbf{R}^N$ 上の実数値関数 f が

$$x > y \text{ ならば，} f(x) \geqslant f(y)$$

をみたすとき，f は単調増加であるという．

系 7.1.6　$d\mu(x)$ を $\mathbf{R}^N$ 上の有限測度で，各 $i=1,\cdots,N,$ に対して，

$$d\mu(x_1,\cdots,-x_i,\cdots,x_N) = d\mu(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_N)$$

をみたすとする．すなわち，$\mathbf{R}^N$ 上の任意の可積分関数 f に対して

$$\int f(x_1,\cdots,-x_i,\cdots,x_N)d\mu$$

$$= \int f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_N)d\mu, \quad i=1,\cdots,N$$

がなりたつとする．G を次の2つのどちらかの条件をみたす，$\mathbf{R}^N$ 上の実数値関数の集合とする：

（1）　$g \in \mathrm{G}$ は

$$g(x_1, \cdots, -x_i, \cdots, x_N) = -g(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N), \quad i = 1, \cdots, N,$$

をみたし，かつ単調増加である；

（2） $g \in \mathrm{G}$ は

$$g(x_1, \cdots, -x_i, \cdots, x_N) = g(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N), \quad i=1, \cdots, N, \quad g \geqslant 0,$$

かつ $x > 0$ のとき，$g(x)$ は単調増加である．

このとき，$\{(\mathbf{R}^N, d\mu), \mathrm{G}\}$ は性質 G をもつ．

証明 $g_1, \cdots, g_n \in \mathrm{G}$ が上の条件 (1) をみたしている場合には，命題 7.1.5 の証明の前半を変数 x, y の各成分ごとに行なうことによって，(7.1.7) を示すことができる．上の条件 (2) をみたす関数は命題 7.1.5 の場合と同様に，条件 (1) をみたす関数で表わされる．したがって，$\{(\mathbf{R}^N, d\mu), \mathrm{G}\}$ は性質 G をもつ． ∎

7.2 Griffiths-Kelly-Sherman 不等式——強磁性スピン系の無限体積極限

強磁性的 Ising スピン系の理論にとって有用な Griffiths-Kelly-Sherman (GKS) 不等式を，前節の理論を応用して導こう．

定理 7.2.1 (GKS 不等式) $d\mu_\alpha(x)$ $(\alpha \in \mathbf{Z}^\nu)$ を $\mathbf{R}$ 上の有限な偶測度*)とし，Λ を $\mathbf{Z}^\nu$ の有界部分集合としよう．S_α $(\alpha \in \mathbf{Z}^\nu)$ を $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x) = x$ のコピーとし（格子点 α における‘スピン’），また有界な $A \subset \mathbf{Z}^\nu$ に対して $n(A) = \{n_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $n_\alpha = 0, 1, 2, \cdots$, を考え，

$$S^{n(A)} \equiv \prod_{\alpha \in A} S_\alpha{}^{n_\alpha} \tag{7.2.1}$$

とおく．さらに，

$$H_\Lambda = -\sum_{A \subset \Lambda} J_A S^{n(A)}, \quad J_A \geqslant 0, \tag{7.2.2}$$

を考え，

---

*) すなわち，$\mathbf{R}$ 上の任意の可積分関数 f に対して，$\int f(x) d\mu(x) = \int f(-x) d\mu(x)$ がなりたつようなもの．

$$\langle\cdot\rangle_\Lambda=\frac{\int\cdot\, e^{-H_\Lambda}\prod_{\alpha\in\Lambda}d\mu_\alpha,}{Z_\Lambda} \tag{7.2.3}$$

$$Z_\Lambda=\int e^{-H_\Lambda}\prod_{\alpha\in\Lambda}d\mu_\alpha \tag{7.2.4}$$

を定義する．ここで，任意の $n(\Lambda)$ に対して，

$$\int|S^{n(\Lambda)}|e^{|H_\Lambda|}\prod_{\alpha\in\Lambda}d\mu_\alpha<\infty \tag{7.2.5}$$

を仮定する．このとき，次の不等式が成立する：

(GKS-Ⅰ)　$\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda\geqslant 0\qquad A\subset\Lambda,$　(7.2.6)

(GKS-Ⅱ)　$\langle S^{n(A)}S^{n(B)}\rangle_\Lambda\geqslant\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda\langle S^{n(B)}\rangle_\Lambda\qquad A,B\subset\Lambda,$　(7.2.7)

証明

$$\mathsf{G}_\alpha=\{aS_\alpha{}^n\mid a>0,\ n=0,1,2,\cdots\}$$

とおけば，命題 7.1.5 によって，$\{(\mathbf{R},d\mu_\alpha),\mathsf{G}_\alpha\}$ は性質 G をもつ．したがって，命題 7.1.4 を繰り返し用いることにより，

$$\mathsf{G}_{|\Lambda|}=\{a\prod_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha{}^{n_\alpha}\mid a>0,\ n_\alpha=0,1,\cdots\}$$

とおけば，

$$\{(\mathbf{R}^{|\Lambda|},\prod_{\alpha\in\Lambda}d\mu_\alpha),\mathsf{G}_{|\Lambda|}\}$$

は性質 G をもつことがわかる．さらに，$-H_\Lambda$ は $\mathsf{G}_{|\Lambda|}$ の元のいくつかの和として書かれているので，命題 7.1.3 を繰り返し用いることにより，

$$\{(\mathbf{R}^{|\Lambda|},e^{-H_\Lambda}\prod_{\alpha\in\Lambda}d\mu_\alpha),\mathsf{G}_{|\Lambda|}\}$$

は性質 G をもつことが結論される．(7.2.6) と (7.2.7) は，命題 7.1.2 から得られる．∎

例 7.2.2

$$J_A=\begin{cases}J>0 & ;\ A=\{\alpha,\beta\},\ \text{かつ}\ |\alpha-\beta|=1\ \text{のとき}\\ h_\alpha\geqslant 0 & ;\ A=\{\alpha\}\ \text{のとき}\\ 0 & ;\ \text{その他のとき}\end{cases}$$

とし，(7.2.2) の右辺の $n(A)$ として $n_\alpha=1\ (\alpha\in A)$ となるようなものを考えると強磁性的モデルのハミルトニアン

$$H_\Lambda=-J\sum_{\substack{|\alpha-\beta|=1\\(\alpha,\beta)\subset\Lambda}}S_\alpha S_\beta-\sum_{\alpha\in\Lambda}h_\alpha S_\alpha$$

を得る．定理 7.2.1 の仮定をみたすような測度 $d\mu_\alpha$ としては，たとえば，

$$d\mu_\alpha(S)=e^{-\lambda S^4-aS^2}dS,\qquad \lambda>0,a\in\mathbf{R},$$

がある．このモデルは，場の理論の $(\phi^4)_\nu$ モデルに相当する（第8章参照）．

N 成分スピンの強磁性的な系に対しても，系 7.1.6 を応用することによって，定理 7.2.1 と同様な不等式を証明することができるが，省略する．

定理 7.2.1 のひとつの応用として，強磁性的スピン系の相関関数の無限体積極限の存在に関し次の結果が得られる．

系 7.2.3 $d\mu_\alpha, H_\Lambda$ を定理 7.2.1 と同じものとしよう．このとき，$A\subset\Lambda_1\subset\Lambda_2\subset\mathbf{Z}^\nu$ に対して

$$\langle S^{n(A)}\rangle_{\Lambda_2}\geqslant\langle S^{n(A)}\rangle_{\Lambda_1}\tag{7.2.8}$$

が成立する．すなわち，相関関数 $\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda$ は Λ の単調増加関数である．したがって，Λ によらない定数 $c>0$ が存在して

$$\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda\leqslant c$$

ならば，無限体積極限

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu}\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda$$

が存在する．

証明 $\lambda\in[0,1]$ として

$$H(\lambda)=H_{\Lambda_1}+H_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}-\lambda I$$

を考える．ここで

$$I=\sum_{\substack{A\subset\Lambda_2\\A\cap\Lambda_1\neq\phi}}J_AS^{n(A)}.$$

いま，

$$\langle\cdot\rangle(\lambda)=\frac{\displaystyle\int\cdot\, e^{-H(\lambda)}\prod_{\alpha\in\Lambda_2}d\mu_\alpha}{Z(\lambda)}$$

$$Z(\lambda)=\int e^{-H(\lambda)}\prod_{\alpha\in\Lambda_2}d\mu_\alpha$$

とおけば，$A\ (\subset \Lambda_1)$ におけるスピンと $\Lambda_2\backslash\Lambda_1$ におけるスピンは独立であり，また，$H(1)=H_{\Lambda_2}$ だから

$$\langle S^{n(A)}\rangle(0) = \langle S^{n(A)}\rangle_{\Lambda_1}, \tag{7.2.9}$$

$$\langle S^{n(A)}\rangle(1) = \langle S^{n(A)}\rangle_{\Lambda_2} \tag{7.2.10}$$

を得る．測度 $d\mu_\alpha$ に対する仮定により，$\langle S^{n(A)}\rangle(\lambda)$ は $\lambda\in(0,1)$ で微分可能であり，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\langle S^{n(A)}\rangle(\lambda) &= \langle S^{n(A)}I\rangle(\lambda)-\langle S^{n(A)}\rangle(\lambda)\langle I\rangle(\lambda)\\ &= \sum_{\substack{B\subset\Lambda_2\\ B\cap\Lambda_1\neq\phi}} J_B[\langle S^{n(A)}S^{n(B)}\rangle(\lambda)-\langle S^{n(A)}\rangle(\lambda)\langle S^{n(B)}\rangle(\lambda)]\end{aligned}$$

期待値 $\langle\cdot\rangle(\lambda)$ に対しても GKS 不等式はなりたつから上式の右辺の各項は非負，したがって

$$\frac{d}{d\lambda}\langle S^{n(A)}\rangle(\lambda) \geqslant 0$$

ゆえに，$\langle S^{n(A)}\rangle(\lambda)$ は λ について単調増加であり，(7.2.9) と (7.2.10) によって，(7.2.8) を得る．■

系 7.2.4　$d\mu_\alpha, H_\Lambda$ を定理 7.2.1 と同じものにし，μ_α の台は，$\alpha\in\mathbf{Z}^\nu$ について一様に有界であるとする．このとき，任意の $A, n(A)$ と有界な台をもつ，$\mathbf{Z}^\nu$ 上の関数 $h=\{h_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{Z}^\nu}$，$h_\alpha\in\mathbf{C}$，に対して

$$\langle S^{n(A)}\rangle \equiv \lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu}\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda, \tag{7.2.11}$$

$$C(h) \equiv \lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu}\langle\exp[\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^\nu}h_\alpha S_\alpha]\rangle_\Lambda \tag{7.2.12}$$

は存在し，$C(h)$ は h_α について全平面で解析的であり，

$$\langle S^{n(A)}\rangle = \left.\frac{\partial^n C(h)}{\partial h_{\alpha_1}{}^{n_1}\cdots\partial h_{\alpha_l}{}^{n_l}}\right|_{h=0} \tag{7.2.13}$$

が成立する．ただし，

$$A=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\},\qquad n(A)=\{n_1,\cdots,n_l\},\qquad n_1+\cdots+n_l=n$$

とする．

証明　μ_α の台に関する仮定により，任意の $\alpha\in\mathbf{Z}^\nu$ に対して，

$$|S_\alpha| \leqq M < \infty$$

となる定数 M が存在するとして一般性を失わないから，$A \subset \Lambda$ に対して

$$\langle S^{n(A)} \rangle_\Lambda \leqq M^{\sum_{\alpha \in A} n_\alpha}.$$

したがって，系 7.2.3 によって，$\langle S^{n(A)} \rangle_\Lambda$ は $\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^\nu$ のとき，収束する．次に，系に述べた h_α をとって，

$$K = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^\nu} h_\alpha S_\alpha, \qquad a = \sum_\alpha |h_\alpha|$$

とおけば

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{|K^n|}{n!} \leqq \exp(aM)$$

であるから，Lebesgue の収束定理によって

$$\langle \exp K \rangle_\Lambda = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \langle K^n \rangle_\Lambda.$$

さらに，$|\langle K^n \rangle_\Lambda| \leqq (aM)^n$ であり，前半によって，$\langle K^n \rangle_\Lambda$ は $\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^\nu$ のとき $\langle K^n \rangle$ に収束するから，

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}^\nu} \langle \exp K \rangle_\Lambda = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \langle K^n \rangle$$

となる．右辺は，h の級数として絶対収束であるから，h_α について，全平面で解析的である．したがって，$C(h)$ は h_α について微分可能であり，(7.2.13) が得られる．▮

(7.2.12) で定義される関数 $C(h)$ は，(7.2.13) が示すように，相関関数に対する母関数 (generating function) である．

7.3 Fortuin-Kasteleyn-Ginibre 不等式

Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) (1971) は，前節で証明した GKS-II 型の不等式 (7.2.7) が成立する十分条件を，結合的な有限束とその上の（適当な凸性の条件をみたす）測度を用いて，抽象的な形で定式化した．この節では，

応用上便利なように，連続的な束 $\mathbf{R}^n$ の上での定式化を述べる．

定理 7.3.1 (FKG 不等式)　$x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して，$x \vee y, x \wedge y \in \mathbf{R}^n$ を $(x \vee y)_i = \max\{x_i, y_i\}$, $(x \wedge y)_i = \min\{x_i, y_i\}$ によって定義する．$d\mu_1, \cdots, d\mu_n$ を $\mathbf{R}$ 上の測度，$U(x)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の狭義の正値関数で

$$U(x \wedge y)U(x \vee y) \geqq U(x)U(y), \qquad x, y \in \mathbf{R}^n \tag{7.3.1}$$

をみたすものとし，測度

$$d\mu(x) = U(x)\prod_{i=1}^{n} d\mu_i(x_i)$$

は $\mathbf{R}^n$ 上の有限測度をあたえると仮定する．

$$\langle \cdot \rangle = \frac{\displaystyle\int \cdot\, d\mu}{\mu(\mathbf{R}^n)}$$

としよう．このとき，$\mathbf{R}^n$ 上の単調増加関数 f, g *) に対して

$$\langle fg \rangle \geqq \langle f \rangle \langle g \rangle \tag{7.3.2}$$

が成立する．ただし，(7.3.2) の両辺の積分は収束するものとする．

証明　n に関する帰納法によって証明する．

1.　$n=1$ の場合．

$$\begin{aligned}&\langle fg \rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle \\ &= \frac{1}{2\mu(\mathbf{R})^2}\int [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]d\mu(x)d\mu(y)\end{aligned}$$

と書けて，$x \geqq y$ または $y \geqq x$ のいずれの場合でも，f, g の単調性により，$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geqq 0$ となるから，(7.3.2) を得る．

2.　n を固定し，$(n-1)$ 次元の場合まで (7.3.2) が示せたとしよう．$x \in \mathbf{R}^n$ を $x=(p, s)$ $(p \in \mathbf{R}^{n-1}, s \in \mathbf{R})$ と表示すれば

$$\begin{aligned}&\int [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]d\mu(x)d\mu(y) \\ &= \int A(s,t)d\mu_n(s)d\mu_n(t)\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

*)　すなわち，$x_i \leqq y_i$, $i=1, \cdots, n$ ならば，$f(x) \leqq f(y)$, $g(x) \leqq g(y)$

と書ける．ここで，

$$A(s,t)=\int[f(\boldsymbol{p},s)-f(\boldsymbol{q},t)][g(\boldsymbol{p},s)-g(\boldsymbol{q},t)]$$
$$\times U(\boldsymbol{p},s)U(\boldsymbol{q},t)\prod_{i=1}^{n-1}d\mu_i(p_i)d\mu_i(q_i) \qquad (7.3.4)$$

したがって，$A(s,t)\geqslant 0$ を示せばよい．そうすれば，(7.3.3) の左辺 $\geqslant 0$，すなわち (7.3.2) が成立する．

$A(s,t)=A(t,s)$ だから，$s\leqslant t$ と仮定して一般性を失わない．(7.3.4) の右辺を展開すると

$$A(s,t)=H(s)Z(t)+H(t)Z(s)$$
$$-F(s)G(t)-F(t)G(s)$$

と表わされる．ただし，

$$Z(s)=\int U(\boldsymbol{p},s)\prod_{i=1}^{n-1}d\mu_i(p_i),$$
$$H(s)=\int f(\boldsymbol{p},s)g(\boldsymbol{p},s)U(\boldsymbol{p},s)\prod_{i=1}^{n-1}d\mu_i(p_i),$$
$$\begin{Bmatrix}F(s)\\G(s)\end{Bmatrix}=\int\begin{Bmatrix}f(\boldsymbol{p},s)\\g(\boldsymbol{p},s)\end{Bmatrix}U(\boldsymbol{p},s)\prod_{i=1}^{n-1}d\mu_i(p_i).$$

したがって

$$\begin{aligned}&Z(s)Z(t)A(s,t)\\&\quad=Z(s)^2[Z(t)H(t)-F(t)G(t)]+Z(t)^2[Z(s)H(s)-F(s)G(s)]\\&\qquad+[Z(s)F(t)-Z(t)F(s)][Z(s)G(t)-Z(t)G(s)].\end{aligned} \qquad (7.3.5)$$

そこで，$\mathbf{R}^{n-1}$ 上の有限測度

$$d\mu_s(\boldsymbol{p})=U(\boldsymbol{p},s)\prod_{i=1}^{n-1}d\mu_i(p_i)$$

を考え，

$$\langle\cdot\rangle_s=\frac{\int\cdot\,d\mu_s}{\mu_s(\mathbf{R}^{n-1})}$$
$$f_s(\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{p},s)$$

を定義すれば，

$$H(s) = Z(s)\langle f_s g_s \rangle_s, \qquad F(s) = Z(s)\langle f_s \rangle_s$$

と書けるから

$$Z(s)H(s) - F(s)G(s) = Z(s)^2(\langle f_s g_s \rangle_s - \langle f_s \rangle_s \langle g_s \rangle_s)$$

となる．$f_s(\boldsymbol{p})$ は $\boldsymbol{p}$ について単調増加であり，

$$U(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}, s)U(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}, s) \geqslant U(\boldsymbol{p}, s)U(\boldsymbol{q}, s)$$

であるから，帰納法の仮定によって

$$\langle f_s g_s \rangle_s \geqslant \langle f_s \rangle_s \langle g_s \rangle_s, \qquad s \in \mathbf{R},$$

したがって

$$Z(s)H(s) - F(s)G(s) \geqslant 0, \qquad s \in \mathbf{R}, \tag{7.3.6}$$

を得る．

次に，(7.3.5) の右辺の第3項の符号を調べよう．

$$V(\boldsymbol{p}) = \frac{U(\boldsymbol{p}, t)}{U(\boldsymbol{p}, s)} \qquad (t, s \text{ : 固定})$$

とおく．$x = (\boldsymbol{p}, s)$，$y = (\boldsymbol{q}, t)$　($p_i \geqslant q_i$，$i = 1, \cdots, n-1$) に対して，$x \vee y = (\boldsymbol{p}, t), x \wedge y = (\boldsymbol{q}, s)$ だから

$$U(\boldsymbol{p}, t)U(\boldsymbol{q}, s) \geqslant U(\boldsymbol{p}, s)U(\boldsymbol{q}, t)$$

がなりたつ．したがって，$V(\boldsymbol{p}) \geqslant V(\boldsymbol{q})$，すなわち，$V(\boldsymbol{p})$ は $\mathbf{R}^{n-1}$ 上の単調増加関数である．ゆえに，帰納法の仮定により，

$$\langle f_s V \rangle_s \geqslant \langle f_s \rangle_s \langle V \rangle_s.$$

これは

$$Z(s)\left(\int f_s(\boldsymbol{p})U(\boldsymbol{p}, t)\prod_{i=1}^{n-1} d\mu_i(p_i)\right) \geqslant F(s)Z(t)$$

を意味する．この式の左辺は，$s \leqslant t$ から $f_s(\boldsymbol{p}) \leqslant f_t(\boldsymbol{p})$ なので，$Z(s)F(t)$ としてよく，したがって

$$Z(s)F(t) - Z(t)F(s) \geqslant 0, \qquad s \leqslant t, \tag{7.3.7}$$

を得る．(7.3.5)，(7.3.6)，(7.3.7) から $A(s, t) \geqslant 0$ となる．∎

次に，不等式 (7.3.1) をみたす $U(x)$ に対する条件を考えよう．

命題 7.3.2　実数値関数 $W \in C^2(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$U(x)=e^{-W(x)}$$

とおく．このとき，$U(x)$ が (7.3.1) をみたすための必要十分条件は

$$\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0, \qquad i \neq j,\ i,j=1,\cdots,n \tag{7.3.8}$$

となることである．

証明　$U(x)$ が (7.3.1) をみたすことと

$$W(x\wedge y)+W(x\vee y)-W(x)-W(y) \leqslant 0 \tag{7.3.9}$$

とは同等である．W が (7.3.9) をみたすとしよう．$\varepsilon, \delta>0$ として，

$$x=(z_1,\cdots,z_{i-1},z_i+\varepsilon,z_{i+1},\cdots,z_n)$$
$$y=(z_1,\cdots,z_{j-1},z_j+\delta,z_{j+1},\cdots,z_n) \qquad (i\neq j)$$

とすれば，

$$x\wedge y=z=(z_1,\cdots,z_n)\in \mathbf{R}^n$$
$$x\vee y=(z_1,\cdots,z_i+\varepsilon,\cdots,z_j+\delta,\cdots,z_n)$$

であるから，

$$\lim_{\varepsilon,\delta\to 0}\frac{\{W(x\wedge y)+W(x\vee y)-W(x)-W(y)\}}{\varepsilon\delta}=\frac{\partial^2 W(z)}{\partial z_i \partial z_j}$$

となる．したがって，(7.3.8) を得る．

逆に，W が (7.3.8) をみたすとしよう．

$$W_{ij}(x)=\frac{\partial^2 W(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

とおけば，任意の $a_i\in\mathbf{R}$ に対して

$$W(x)+W(x)|_{x_i=a_i,x_j=a_j}-W(x)|_{x_i=a_i}-W(x)|_{x_j=a_j}$$
$$=\int_{a_i}^{x_i}\int_{a_j}^{x_j}W_{ij}(x)|_{x_i=y_i,x_j=y_j}dy_i dy_j$$

が成立する．これから，

$$I\equiv W(x)+W(a)-W(X)-W(Y)$$

は

$$\int_{a_i}^{x_i}\int_{a_j}^{x_j}W_{ij}dy_i dy_j$$

の型の積分のいくつかの和として表わされることがわかる．ただし，$X=(X_1,$

$\cdots, X_n)$，$Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$，X_i, Y_i は a_i または x_i であり，X と Y は集合として共通部分をもたない．したがって，$x_i \geqslant a_i$, $i=1,\cdots,n$, のとき，$I \leqslant 0$ であり，$X\wedge Y=a$, $X\vee Y=x$ であるから

$$W(X\wedge Y)+W(X\vee Y)-W(X)-W(Y)\leqslant 0. \tag{7.3.10}$$

X, Y は独立変数と考えなおせるから，(7.3.10) はすべての $X, Y\in\mathbf{R}^n$ についてなりたつ．∎

$n=3$ の場合に，上の証明を書き下すことを問題7.1としておく．

FKG 不等式のひとつの応用として，相関関数の外部磁場依存性を調べよう．$\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$ を有界集合として，ハミルトニアン

$$H_\Lambda{}^h(S)=-\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\subset\Lambda\\ \alpha\neq\beta}}J_{\alpha\beta}S_\alpha S_\beta-\sum_{\alpha\in\Lambda}h_\alpha S_\alpha \tag{7.3.11}$$

で記述されるスピン系を考える．ここで，$J_{\alpha\beta}\geqslant 0$，$J_{\alpha\beta}=J_{\beta\alpha}$．$h_\alpha\in\mathbf{R}$ は，物理的には，外部磁場を表わす．$d\mu_\alpha$ を $\mathbf{R}$ 上の測度とし

$$\langle\cdot\rangle_\Lambda(h)=\frac{\displaystyle\int\cdot\, e^{-H_\Lambda{}^h}\prod_{\alpha\in\Lambda}d\mu_\alpha}{Z_\Lambda(h)} \tag{7.3.12}$$

$$Z_\Lambda(h)=\int e^{-H_\Lambda{}^h}\prod_{\alpha\in\Lambda}d\mu_\alpha \tag{7.3.13}$$

を定義する．積分はつねに存在すると仮定する．このとき，次の一般的な結果を得る．

定理 7.3.3　任意の $A\subset\Lambda$ と $S^{n(A)}$ が $\mathbf{R}^{|A|}$ 上の単調増加関数となる $n(A)$ に対して $\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda(h)$ は $h=\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ の単調増加関数である．

証明

$$\frac{\partial^2 H_\Lambda{}^h}{\partial S_\alpha\partial S_\beta}=-J_{\alpha\beta}\leqslant 0$$

であるから，命題 7.3.2 と定理 7.3.1 によって，$\langle\cdot\rangle_\Lambda(h)$ は FKG 不等式を成立させる．

$$\frac{\partial}{\partial h_\beta}\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda(h) = \langle S_\beta S^{n(A)}\rangle_\Lambda(h) - \langle S_\beta\rangle_\Lambda(h)\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda(h)$$

であり，$S_\beta, S^{n(A)}$ は単調増加関数であるから，FKG 不等式により，上式の右辺は非負であり，したがって

$$\frac{\partial}{\partial h_\beta}\langle S^{n(A)}\rangle_\Lambda(h) \geqslant 0.$$

ゆえに，求める結果を得る．∎

注意 単独のスピン分布測度 $d\mu_\alpha$ が偶測度で，$h_\alpha \geqslant 0$ ならば，定理 7.3.3 は GKS-II 不等式からも得られる．

定理 7.3.3 から次のような物理的結論が引き出せる．外部磁場 h のもとでの系の磁化 (magnetization) $M(h)$ を

$$M(h) = \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle S_\alpha\rangle_\Lambda(h) \tag{7.3.14}$$

によって定義する．すると，

系 7.3.4 磁化 $M(h)$ は h の単調増加関数である．

証明 $A=\{\alpha\}, \alpha\in\Lambda,\ n(A)=\{1\}$ として，定理 7.3.3 を適用すればよい．∎

7.4 Lebowitz の不等式と Griffiths-Hurst-Sherman 不等式

この節では，ハミルトニアン

$$H_\Lambda^h(S) = -\sum_{\substack{(\alpha,\beta)\subset\Lambda\\ \alpha\neq\beta}} J_{\alpha\beta}S_\alpha S_\beta - \sum_{\alpha\in\Lambda} h_\alpha S_\alpha,$$

$$(J_{\alpha\beta}=J_{\beta\alpha}\geqslant 0,\ h_\alpha\in\mathbf{R}) \tag{7.4.1}$$

をもつ，有界領域 $\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$ におけるスピン系を考える．スピンの配位空間は $\mathbf{R}$ (あるいは $\dot{\mathbf{R}}$) であり，さらに，単独のスピン分布が

$$d\mu_\alpha(S) = ce^{-P(S)}dS \tag{7.4.2}$$

であたえられるとする．ここで，$c>0$ は規格化定数であり，$P(S)$ は

$$P(S)=\sum_{i=1}^{n}a_iS^{2i} \tag{7.4.3}$$

という形の多項式で，

$$a_n>0, \quad a_i\geqslant 0,\ i=2,\cdots,n-1, \quad a_1\in\mathbf{R},$$

とする．この系の分配関数，期待値（状態）をそれぞれ $Z_\Lambda, \langle\cdot\rangle_\Lambda$ と記す．

なお，$J_{\alpha\beta}$ が

$$J_{\alpha\beta}=\begin{cases}J>0 & ;\ |\alpha-\beta|=1 \text{ のとき}\\ 0 & ;\ |\alpha-\beta|\neq 1 \text{ のとき}\end{cases}$$

となる場合，すなわち，相互作用が最近接的であるならば，これは，格子上の場の理論の，(7.4.3) の多項式 P に関する $P(\phi)_\nu$ モデルに対応する（第8章参照）．

この節の目標は，上のモデルの相関関数に対して，前節までに得られた不等式とは違った型の不等式を得ることにある．

そのために，まず，もうひとつのスピン変数 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ を導入し，

$$H_\Lambda{}^h(S,T)=H_\Lambda{}^h(S)+H_\Lambda{}^h(T) \tag{7.4.4}$$

を考え，

$$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^\sim=Z_\Lambda{}^{-2}\int\cdot\, e^{-H_\Lambda{}^h(S,T)}\prod_{\alpha\in\Lambda}d\mu_\alpha(S_\alpha)d\mu_\alpha(T_\alpha) \tag{7.4.5}$$

を定義する．新しく変数 $p_\alpha, q_\alpha\ (\alpha\in\Lambda)$ を

$$p_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(S_\alpha+T_\alpha), \qquad q_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(S_\alpha-T_\alpha) \tag{7.4.6}$$

によって導入しよう．目標は次の不等式を証明することである：

定理 7.4.1（Lebowitz の不等式） $h_\alpha\geqslant 0, \alpha\in\Lambda$ と仮定する．このとき，任意の $A,B\subset\Lambda,\ n(A),n(B)$ に対して

$$\langle p^{n(A)}p^{n(B)}\rangle_\Lambda{}^\sim\geqslant\langle p^{n(A)}\rangle_\Lambda{}^\sim\langle p^{n(B)}\rangle_\Lambda{}^\sim, \tag{7.4.7}$$

$$\langle p^{n(A)}q^{n(B)}\rangle_\Lambda{}^\sim\leqslant\langle p^{n(A)}\rangle_\Lambda{}^\sim\langle q^{n(B)}\rangle_\Lambda{}^\sim, \tag{7.4.8}$$

$$\langle q^{n(A)}q^{n(B)}\rangle_\Lambda{}^\sim\geqslant\langle q^{n(A)}\rangle_\Lambda{}^\sim\langle q^{n(B)}\rangle_\Lambda{}^\sim. \tag{7.4.9}$$

上の定理を証明するためには，しかし，さらに工夫を要する．すなわち，

S_α, T_α に加えて，もう2つスピン変数 S_α', T_α' を導入し，

$$H_\Lambda^h(S, T, S', T') = H_\Lambda^h(S, T) + H_\Lambda^h(S', T') \qquad (7.4.10)$$

を考え，

$$\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle_\Lambda = Z_\Lambda^{-4} \int \cdot\, e^{-H_\Lambda^h(S,T,S',T')} \times \prod_{\alpha\in\Lambda} d\mu_\alpha(S_\alpha) d\mu_\alpha(T_\alpha) d\mu_\alpha(S_\alpha') d\mu_\alpha(T_\alpha') \qquad (7.4.11)$$

を定義する．S_α, T_α の場合と同様に，新しい変数 p_α', q_α' を

$$p_\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_\alpha' + T_\alpha'), \qquad q_\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_\alpha' - T_\alpha') \qquad (7.4.12)$$

によって定義する．さらに，

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_\alpha + p_\alpha'), \qquad y_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_\alpha - p_\alpha') \\ z_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_\alpha + q_\alpha'), \qquad w_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}(q_\alpha - q_\alpha') \end{aligned}\right\} \qquad (7.4.13)$$

とおこう．このとき，次の定理を得る．

定理 7.4.2 $h_\alpha \geqslant 0$, $\alpha \in \Lambda$, ならば，任意の $A, B, C, D \subset \Lambda$, に対して

$$\langle\!\langle x^{n(A)} y^{n(B)} z^{n(C)} w^{n(D)} \rangle\!\rangle_\Lambda \geqslant 0. \qquad (7.4.14)$$

証明 直接に計算することにより

$$\begin{aligned} &H_\Lambda^h(S, T, S', T') \\ &= -\sum J_{\alpha\beta}(x_\alpha x_\beta + y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta + w_\alpha w_\beta) - 2\sum h_\alpha x_\alpha. \end{aligned}$$

変換

$$(S_\alpha, T_\alpha, S_\alpha', T_\alpha') \longrightarrow (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha)$$

は $\mathbf{R}^4$ 上の直交変換であるから，

$$\begin{aligned} &S_\alpha^2 + T_\alpha^2 + S_\alpha'^2 + T_\alpha'^2 = x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 + w_\alpha^2 \\ &dS_\alpha dT_\alpha dS_\alpha' dT_\alpha' = dx_\alpha dy_\alpha dz_\alpha dw_\alpha \end{aligned}$$

さらに，多項定理によって

$$\begin{aligned} &S_\alpha^{2i} + T_\alpha^{2i} + S_\alpha'^{2i} + T_\alpha'^{2i} \\ &\quad = U_i(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha) - V_i(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha) \end{aligned}$$

と表わされる．ここで，$U_i(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha)$ は

$$c x_\alpha^{2k} y_\alpha^{2l} z_\alpha^{2m} w_\alpha^{2r} \qquad (k+l+m+r = i,\ c > 0)$$

という形の項の和からなり，一方，$V_i(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha)$ は，

$$d{x_\alpha}^{2k-1}{y_\alpha}^{2l-1}{z_\alpha}^{2m-1}{w_\alpha}^{2r-1} \qquad (k+l+m+r-2=i,\ d>0)$$

という形の項の和からなる．そこで，

$$F(x,y,z,w) = -H_\Lambda{}^0(x,y,z,w)+2\sum_\alpha h_\alpha x_\alpha + \sum_{i=2}^n \sum_\alpha a_i V_i(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha)$$

$$d\lambda(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha) = \exp\left[-\sum_{i=2}^n a_i U_i(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha) - a_1({x_\alpha}^2+{y_\alpha}^2+{z_\alpha}^2+{w_\alpha}^2)\right] \times dx_\alpha dy_\alpha dz_\alpha dw_\alpha$$

とおけば，

$$\langle\!\langle \cdot \rangle\!\rangle_\Lambda = Z_\Lambda{}^{-4} \int \cdot\, e^{F(x,y,z,w)} \prod_{\alpha\in\Lambda} d\lambda(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha) \qquad (7.4.15)$$

と書ける．そこで　・　$= x^{n(A)}y^{n(B)}z^{n(C)}w^{n(D)}$ として，$\exp F$ を展開して項別積分する（Lebesgue の収束定理により正当化できる）．$d\lambda(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha)$ は各変数について偶であり，$\exp F$ の展開係数はすべて非負だから，展開の各項に対する積分は正または 0 となる．よって，(7.4.14) を得る．∎

定理 7.4.2 のひとつの帰結として，定理 7.4.1 を証明することができる：

定理 7.4.1 の証明

記号の節約のため，$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^\sim$ を単に $\langle\cdot\rangle$ と記す（$\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle_\Lambda$ についても同様）．$c = 2^{-(|A|+|B|)/2}$ とおこう．このとき，

$$\langle p^{n(A)}p^{n(B)}\rangle - \langle p^{n(A)}\rangle\langle p^{n(B)}\rangle = \langle\!\langle p^{n(A)}(p^{n(B)}-p'^{n(B)})\rangle\!\rangle = c\langle\!\langle (x+y)^{n(A)}[(x+y)^{n(B)}-(x-y)^{n(B)}]\rangle\!\rangle, \qquad (7.4.16)$$

$$\langle p^{n(A)}q^{n(B)}\rangle - \langle p^{n(A)}\rangle\langle q^{n(B)}\rangle = \langle\!\langle p^{n(A)}(q^{n(B)}-q'^{n(B)})\rangle\!\rangle = c\langle\!\langle (x+y)^{n(A)}[(z-w)^{n(B)}-(z+w)^{n(B)}]\rangle\!\rangle, \qquad (7.4.17)$$

$$\langle q^{n(A)}q^{n(B)}\rangle - \langle q^{n(A)}\rangle\langle q^{n(B)}\rangle = \langle\!\langle q'^{n(A)}(q'^{n(B)}-q^{n(B)})\rangle\!\rangle = \langle\!\langle (z+w)^{n(A)}[(z+w)^{n(B)}-(z-w)^{n(B)}]\rangle\!\rangle. \qquad (7.4.18)$$

一方，任意の $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i=1,\cdots,n$, $k_i=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{k_i}=\sum_{0\leqq r_i\leqq k_i}\prod_{i=1}^{n}{}_{k_i}\mathrm{C}_{k_i-r_i}a_i^{k_i-r_i}b_i^{r_i},$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^{k_i}=\sum_{0\leqq r_i\leqq k_i}(-1)^{\sum_{i=1}^{n}r_i}\prod_{i=1}^{n}{}_{k_i}\mathrm{C}_{k_i-r_i}a_i^{k_i-r_i}b_i^{r_i}.$$

したがって，

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{k_i}\pm\prod_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^{k_i}$$

は，a_i, b_i の正係数の多項式である．これを使えば，(7.4.16) ((7.4.18)) の右辺の《・》の中は，x, y (z, w) の正係数の多項式，(7.4.17) の右辺の《・》の中は，x, y, z, w の負係数の多項式であることがわかる．したがって，定理 7.4.2 によって，(7.4.16) と (7.4.18) の右辺は非負，(7.4.17) の右辺は非正となる．∎

注意 (7.4.7) は GKS-II 不等式からも得られる．

Lebowitz の不等式から，(7.4.1) のハミルトニアン $H_\Lambda^h(S)$ をもつ系の相関関数に対して，次のようにいくつかの興味ある不等式が得られる．GHS は Griffiths-Hurst-Sherman の略である．

系 7.4.3 $\langle\cdot\rangle_\Lambda=\langle\cdot\rangle$ と略記する．このとき

(1) **(GHS 不等式)** $h_\alpha\geqq 0$, $\alpha\in\Lambda$ ならば，

$$\langle S_\alpha S_\beta S_\gamma\rangle+2\langle S_\alpha\rangle\langle S_\beta\rangle\langle S_\gamma\rangle-\langle S_\alpha\rangle\langle S_\beta S_\gamma\rangle$$
$$-\langle S_\beta\rangle\langle S_\gamma S_\alpha\rangle-\langle S_\gamma\rangle\langle S_\alpha S_\beta\rangle\leqq 0. \qquad (7.4.19)$$

(2) **(Lebowitz 不等式)** $h=0$ ならば，

$$\langle S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta\rangle-\langle S_\alpha S_\beta\rangle\langle S_\gamma S_\delta\rangle$$
$$-\langle S_\alpha S_\gamma\rangle\langle S_\beta S_\delta\rangle-\langle S_\alpha S_\delta\rangle\langle S_\beta S_\gamma\rangle\leqq 0. \qquad (7.4.20)$$

証明

(1) $\langle\cdot\rangle_\Lambda^\sim$ を $\langle\cdot\rangle^\sim$ と記すと直接の計算によって，

$$\langle p_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle^\sim-\langle p_\alpha\rangle^\sim\langle q_\beta q_\gamma\rangle^\sim$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times[(7.4.19)\text{ の左辺}]$$

となる．したがって，(7.4.8) から，(7.4.19) を得る．

（2） $h=0$ ならば，$\langle S_\alpha \rangle = 0$ であるから，これを用いると

$$\langle p_\alpha p_\beta q_\gamma q_\delta \rangle^\sim = \frac{1}{2}\{\langle S_\alpha S_\beta S_\gamma S_\delta \rangle + \langle S_\alpha S_\beta \rangle \langle S_\gamma S_\delta \rangle - \langle S_\alpha S_\gamma \rangle \langle S_\beta S_\delta \rangle - \langle S_\alpha S_\delta \rangle \langle S_\beta S_\gamma \rangle\},$$

$$\langle p_\alpha p_\beta \rangle^\sim = \langle S_\alpha S_\beta \rangle, \qquad \langle q_\gamma q_\delta \rangle^\sim = \langle S_\gamma S_\delta \rangle.$$

したがって，

$$\langle p_\alpha p_\beta q_\gamma q_\delta \rangle^\sim - \langle p_\alpha p_\beta \rangle^\sim \langle q_\gamma q_\delta \rangle^\sim = \frac{1}{2} \times [(7.4.20) \text{ の左辺}].$$

この式の左辺は，(7.4.8) によって非正であるから，(7.4.20) を得る．▮

注意　不等式 (7.4.19) と (7.4.20) はもともとスピン 1/2 の系に対して得られた (Griffiths, Hurst, Sherman (1970), Lebowitz (1974))．スピン 1/2 の系に対する不等式は

$$P(S) = a(S^2-1)^2 \qquad (a>0),$$

とし，$a \to \infty$ をとることによって得られる．なぜなら超関数の意味で，

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-a(S^2-1)^2} \xrightarrow[a\to\infty]{} \frac{1}{2}[\delta(S+1)+\delta(S-1)]$$

となるからである．定理 7.4.1, 7.4.2 の不等式に対しても同様である．

GHS 不等式のひとつの応用として，磁化の凸性を証明しよう．

系 7.4.4　ハミルトニアンが (7.4.1)，単独スピンの分布が (7.4.2) であたえられる系を考え，これに対して，磁化 $M(h)$ を (7.3.14) によって定義し，すべての $\alpha \in \Lambda$ に対して $h_\alpha = H$ の場合の $M(h)$ を $M(H)$ と書く．このとき，$M(H)$ は $H \in \mathbf{R}$ の単調増加な奇関数であって，$H \geqslant 0$ で上に凸である (図 7.1)．

証明　単調増加であることは系 7.3.4 の特別の場合として知られる．

凸性を示すために $M(H)$ の 2 階微分を考えよう：簡単のため，$\langle\cdot\rangle_\Lambda(h) = \langle\cdot\rangle$，$M(H) = M$ と書くと，

$$\frac{\partial M}{\partial H}=\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{\alpha,\beta\in\Lambda}[\langle S_\alpha S_\beta\rangle-\langle S_\alpha\rangle\langle S_\beta\rangle]$$

であるから，

$$\frac{\partial^2 M}{\partial H^2}=\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{\alpha,\beta,\gamma\in\Lambda}[\langle S_\alpha S_\beta S_\gamma\rangle-\langle S_\alpha S_\beta\rangle\langle S_\gamma\rangle-\langle S_\alpha S_\gamma\rangle\langle S_\beta\rangle$$
$$+2\langle S_\alpha\rangle\langle S_\gamma\rangle\langle S_\beta\rangle-\langle S_\alpha\rangle\langle S_\beta S_\gamma\rangle].$$

したがって，GHS 不等式によって，$\partial^2 M/\partial H^2\leqslant 0$ $(H\geqslant 0)$ を得る．▮

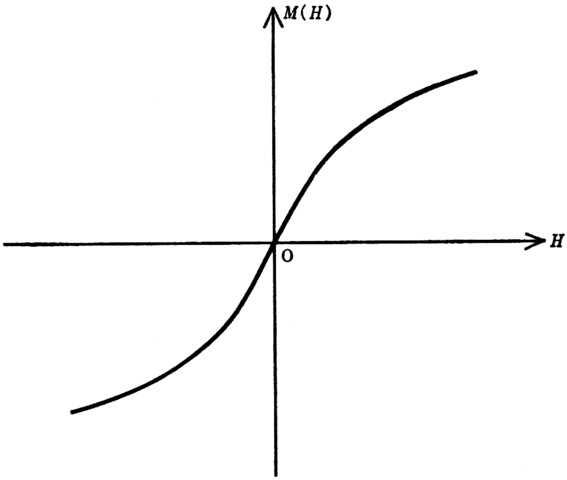


図 7.1 磁化の一般的な形（有限格子系）

7.5 Newman の不等式

この節では，スピン 1/2 の Ising モデルや量子場の $(\phi^4)_2$ モデルに応用される重要な相関不等式をやや抽象的な枠組のなかで導く．

$(\mathbf{X}, d\mu)$ を確率測度空間とし，期待値を

$$\langle\cdot\rangle=\int_{\mathbf{X}}\cdot\, d\mu \tag{7.5.1}$$

によって定義する．

定義 7.5.1　X 上の実数値関数 f に対して，複素変数関数 $E(z)$ を

$$E(z) = \langle e^{zf} \rangle, \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{7.5.2}$$

によって定義する．$E(z)$ が z の整関数であり，さらに，次の2条件をみたすとき，f は $\mathscr{L}$ **型**であるという：

（1）$E(z) = E(-z)$, $z \in \mathbf{C}$, で，$E(z)$ の零点は純虚数に限られる；

（2）ある定数 $c_1, c_2 \geqslant 0$ が存在して

$$|E(z)| \leqslant c_1 e^{c_2|z|^2}, \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{7.5.3}$$

$\mathscr{L}$ 型の確率変数の例はあとで示すことにして，$\mathscr{L}$ 型の確率変数のもつ性質を調べよう．基礎となるのは次の命題である．

命題 7.5.2　f を $\mathscr{L}$ 型とし，$E(z)$ の零点を $ia_1, ia_2, \cdots, -ia_1, -ia_2, \cdots$, $(0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots)$ とする．このとき，

$$\sum_n (1/a_n)^2 < \infty$$

であり，ある定数 $c \geqslant 0$ が存在して，

$$E(z) = e^{cz^2} \prod_n \left[1 + \left(\frac{z}{a_n}\right)^2\right] \tag{7.5.4}$$

と表わされる．ただし，集合 $\{a_n\}$ の元の数は，有限，または可算無限である．

証明　$E(z)$ に対する仮定を考慮して，Hadamard の因数分解定理*) を適用すると，ある定数 a が存在して

$$E(z) = e^{az^2} \prod_n \left[1 + \left(\frac{z}{a_n}\right)^2\right] e^{(z/a_n)^2/2} \tag{7.5.5}$$

となる．$\{a_n\}$ が有限個の場合は，

$$b = \sum_n (1/a_n)^2/2$$

とおけば

$$E(z) = e^{(a+b)z^2} \prod_n \left[1 + \left(\frac{z}{a_n}\right)^2\right]. \tag{7.5.6}$$

---

*)　たとえば Boas (1954), §2.7.

となって，(7.5.4) の形を得る．$\{a_n\}$ が無限個の場合は(7.5.5)の右辺は絶対収束であるから，特に $z=1$ とおいて，

$$\sum_n \left\{\log\left[1+\frac{1}{a_n{}^2}\right]+\frac{1}{2a_n{}^2}\right\}<\infty$$

でなければならない．したがって，$\sum_n 1/a_n{}^2<\infty$ であって，有限個の場合と同様に，(7.5.4) の形を得る．$\{a_n\}=\phi$ なら，もちろん，$E(z)=e^{az^2}$ の形となる．そこで次に，(7.5.4) における定数 c が非負であることを示そう．まず，$\{a_n\}$ が空または有限個の場合は，$c<0$ ならば，r を実数とするとき，$E(r)\to 0$ $(r\to\pm\infty)$．しかし，

$$B_+=\{x\in X\,|\,f(x)>0\},$$
$$B_-=\{x\in X\,|\,f(x)\leqslant 0\}$$

とし，$B_\pm$ に対する定義関数を $\chi_{B_\pm}$ とすれば，

$$E(r)\geqslant\begin{cases}\langle\chi_{B_+}\rangle\ ;\ r>0 \text{ のとき}\\ \langle\chi_{B_-}\rangle\ ;\ r<0 \text{ のとき}\end{cases}$$

となるので，$E(r)\to 0$ $(r\to\pm\infty)$ となるのは不可能．ゆえに，$c\geqslant 0$ でなければならない．$\{a_n\}$ が無限個の場合は，

$$\prod_{n=k+1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{r}{a_n}\right)^2\right]\leqslant\exp\left[r^2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{a_n{}^2}\right]$$

であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある k_0 が存在して $k\geqslant k_0$ ならば

$$\prod_{n=k+1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{r}{a_n}\right)^2\right]\leqslant e^{\varepsilon r^2}.$$

したがって，

$$E(r)\leqslant e^{(c+\varepsilon)r^2}\prod_{n=1}^{k}\left[1+\left(\frac{r}{a_n}\right)^2\right].$$

そこで，$c<0$ とすれば，$c+\varepsilon<0$ となるような ε と k_0 がとれるが，このとき上式によって $E(r)\to 0$ $(r\to\pm\infty)$．したがって，先と同じ理由により矛盾である．ゆえに，$c\geqslant 0$. ∎

さて，確率変数 f に対して，$E(z)$ が $z=0$ の近傍で正則のとき，モーメント M_n，**キュミュラント** U_n を

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{n!} z^n = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{n!} z^n\right] \tag{7.5.7}$$

によって定義する.

定理 7.5.3　f を $\mathscr{L}$ 型とする．このとき，$m=1,2,\cdots,$ に対して,

$$U_{2m-1} = 0, \qquad (-1)^{m-1} U_{2m} \geqslant 0.$$

さらに，ある $m \geqslant 2$ に対して，$U_{2m} = 0$ ならば，すべての $n > 2$ に対して $U_n = 0$ であり，f は Gauss 型である.

証明　命題 7.5.2 と

$$\log(1+z^2) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} z^{2m}/m, \qquad |z| < 1$$

を使うと，$|z| < a_1$ に対して,

$$E(z) = \exp\left[cz^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^{2n} \sum_m \frac{1}{a_m{}^{2n}}\right].$$

したがって，すべての $m \geqslant 1$ に対して $U_{2m-1} = 0$ であり,

$$U_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}(2m)!}{m} \sum_n \left(\frac{1}{a_n}\right)^{2m}, \qquad m = 2, 3, \cdots \tag{7.5.8}$$

すなわち,

$$(-1)^{m-1} U_{2m} \geqslant 0, \qquad m = 2, 3, \cdots.$$

また,

$$M_2 = U_2 = 2\left(c + \sum_n \frac{1}{a_n{}^2}\right). \tag{7.5.9}$$

(7.5.8) から，ある $m \geqslant 2$ に対して $U_{2m} = 0$ ならば，$\{a_n\} = \phi$ でなければならない．したがって，すべての $n > 2$ に対して $U_n = 0$ となり，$E(z) = \exp[cz^2]$ となるから，f は Gauss 型である．∎

上の定理の後半，すなわち，<u>ひとつの</u> U_{2m} $(m \geqslant 2)$ が 0 ならば，<u>すべての</u> U_n $(n > 2)$ が 0 となってしまうという結果は後に重要な役をする.

以上の準備のもとに，$E(z), M_n, U_n$ に対する不等式を導く.

定理 7.5.4　f が $\mathscr{L}$ 型ならば，すべての $k = 0, 1, 2, \cdots$ と実数 r に対して

$$\exp\left[\sum_{n=1}^{4k}\frac{U_n}{n!}r^n\right]\leqslant E(r)\leqslant\exp\left[\sum_{n=1}^{4k+2}\frac{U_n}{n!}r^n\right]. \tag{7.5.10}$$

特に，すべての複素数 z に対して

$$|E(z)|\leqslant\exp\left[\frac{1}{2}M_2(\mathrm{Re}\,z)^2\right]. \tag{7.5.11}$$

証明 まず，(7.5.8) によって

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{U_{2m}}{(2m)!}r^{2m}=\sum_n\log\left[1+\left(\frac{r}{a_n}\right)^2\right]+cr^2$$

と変形する．そこで，すべての $a\geqslant 0$ に対して成立する不等式

$$\sum_{m=1}^{2k}\frac{(-1)^{m-1}}{m}a^m\leqslant\log(1+a)\leqslant\sum_{m=1}^{2k+1}\frac{(-1)^{m-1}}{m}a^m \tag{7.5.12}$$

で，$a=(r/a_n)^2$ とおくことにより，(7.5.10) を得る．(7.5.12) を示すには，たとえば，

$$\log(1+a)=\int_0^a\frac{1}{1+x}dx$$

$$\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{m}a^m=\int_0^a\frac{1+(-1)^{k+1}x^k}{1+x}dx$$

に注目すればよい．不等式 (7.5.11) は

$$|E(z)|\leqslant E(\mathrm{Re}\,z)$$

と (7.5.10) において，$k=0$ の場合を考えることによって得られる．∎

定理 7.5.5 f を $\mathscr{L}$ 型とする．このとき，すべての $m=1,2,\cdots,$ に対して

$$M_{2m-1}=0 \tag{7.5.13}$$

であり，

$$0\leqslant M_{2m}\leqslant\frac{(2m)!}{2^m m!}(M_2)^m, \tag{7.5.14}$$

$$0\leqslant(-1)^{m-1}U_{2m}\leqslant\frac{(2m)!}{2^m m}(M_2)^m. \tag{7.5.15}$$

証明 (7.5.13) は $U_{2m-1}=0$ による．

(7.5.14) を示すために，まず，$[1+(r/a_n)^2]$ の Taylor 係数は，明らかに，

$\exp[(r/a_n)^2]$ の Taylor 係数以下であることに注意する．したがって，

$$\prod_n [1+(r/a_n)^2]$$

の Taylor 係数は

$$\exp[\sum_n (1/a_n)^2 r^2]$$

の Taylor 係数で抑えられる．ゆえに，(7.5.4) によって，$E(r)$ の r^{2m} の係数は

$$\exp[\{c+\sum_n (1/a_n)^2\} r^2]$$

の r^{2m} の係数

$$\frac{\{c+\sum_n (1/a_n)^2\}^m}{m!} = \frac{(M_2)^m}{2^m m!}$$

によって抑えられる．したがって (7.5.14) の右側の不等式を得る．$M_{2m} \geqslant 0$ は (7.5.4) の Taylor 展開から明らか．(7.5.15) を示すには，(7.5 8) と

$$\sum_n (1/a_n)^{2m} \leqslant (\sum_n (1/a_n)^2)^m \leqslant (M_2/2)^m$$

に注意すればよい．ここで，第一の不等号は Jensen の不等式による．∎

注意　f が Gauss 型ならば，(7.5.14) の右側の不等式において等号が成立する．

ある確率変数が $\mathcal{L}$ 型であるか否かを判定する上でむずかしいのは，それに対応する $E(z)$ の零点の位置を知ることである．これに対するひとつの判定条件が，一般化された Lee-Yang の定理によってあたえられる．その定理を述べるために，まず記号を定義しよう．$d\mu_j(S)$ を $\mathbf{R}$ 上の偶の確率測度で，任意の $a>0$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}} e^{aS^2} d\mu_j(S) < \infty \tag{7.5.16}$$

となるものとし，$J_{jk} \geqslant 0$，$j, k = 1, \cdots, N$，として，期待値 $\langle \cdot \rangle_J$ を

$$\langle \cdot \rangle_J = \frac{\int \cdot \exp\left[\sum_{j,k=1}^{N} J_{jk} S_j S_k\right] \prod_{j=1}^{N} d\mu_j(S_j)}{\int \exp\left[\sum_{j,k=1}^{N} J_{jk} S_j S_k\right] \prod_{j=1}^{N} d\mu_j(S_j)} \tag{7.5.17}$$

によって定義する.

定理 7.5.6 (一般化された Lee-Yang の定理) 各 j に対して,

$$\int \exp[zS] d\mu_j(S)$$

の零点が純虚数ならば，すべての $\alpha_j \geqslant 0$ に対して,

$$\left\langle \exp\left[z \sum_{j=1}^{N} \alpha_j S_j\right] \right\rangle_J$$

の零点も純虚数である.

証明 Newman (1974) を参照されたい. ∎

この定理からただちに次の結果を得る:

系 7.5.7 定理 7.5.6 の仮定が成立するならば，すべての $\alpha_j \geqslant 0$, $j=1, \cdots, N$, に対して,

$$f \equiv \sum_{j=1}^{N} \alpha_j S_j$$

は $\mathcal{L}$ 型の確率変数である.

証明 (7.5.17) であたえられる $\langle \cdot \rangle$ と上の f に対して (7.5.2) の $E(z)$ を考えると，測度 $d\mu_j$ は偶だから $E(z)=E(-z)$ である．また，(7.5.16) から不等式 (7.5.3) を得る．最後に，仮定と定理 7.5.6 によって $E(z)$ の零点は純虚数である. ∎

$\mathcal{L}$ 型の確率変数の例

(1) スピン 1/2 の Ising モデル.

$$d\mu_j(S) = \frac{1}{2}[\delta(S+1)+\delta(S-1)]dS$$

これから

$$\int \exp[zS]d\mu_j(S) = \cosh z$$

となるので，定理 7.5.6 の仮定はみたされる．ゆえに，

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j S_j \qquad (\alpha_j \geqslant 0,\ j=1,\cdots,N)$$

は $\mathscr{L}$ 型の確率変数である．

（2）$(\phi^4)_\nu$ モデル．$\lambda>0$, $a\in\mathbf{R}$, として，

$$d\mu_j(S) = \exp[-\lambda S^4 - aS^2]dS$$

これが，定理 7.5.6 の仮定をみたすことについては，Newman (1974) を参照（問題 7.4）．この場合も

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j S_j \qquad (\alpha_j \geqslant 0,\ j=1,\cdots,N)$$

は $\mathscr{L}$ 型の確率変数である．

最後に，定理 7.5.6 の仮定をみたす $d\mu_j(S)$ からつくられる期待値 $\langle\cdot\rangle_J$ に対する相関不等式を導こう．

任意のベクトル $f=(f(1),\cdots,f(N))\in\mathbf{C}^N$ に対して*)，$\mathbf{R}^N$ 上の関数 $S(f)$ を

$$S(f) = \sum_{j=1}^{N} S_j f(j) \tag{7.5.18}$$

によって定義する．

定理 7.5.8　$d\mu_j(S)$ は定理 7.5.6 の仮定をみたすとする．このとき，任意のベクトル列 f, $f_1,\cdots,f_{2m}\in\mathbf{C}^N$ に対して

$$|\langle S(f_1)\cdots S(f_{2m})\rangle_J| \leqslant \frac{(2m)!}{2^m m!}\prod_{j=1}^{2m}\langle S(|f_j|)^2\rangle_J^{1/2}, \tag{7.5.19}$$

$$|\langle e^{S(f)}\rangle_J| \leqslant \exp\left[\frac{1}{2}\langle S(|\mathrm{Re}\,f|)^2\rangle_J\right]. \tag{7.5.20}$$

ただし，

$$|\mathrm{Re}\,f| = (|\mathrm{Re}\,f(1)|,\cdots,|\mathrm{Re}\,f(N)|),\quad |f| = (|f(1)|,\cdots,|f(N)|).$$

---

*) 前に出てきた確率変数と同じ記号を使うが，違うものなので注意．

証明 ここでは $\langle\cdot\rangle_J=\langle\cdot\rangle$ と略記する．仮定によって，$\langle\cdot\rangle$ に対して GKS 不等式が成立するから，任意の $i_1,\cdots,i_n\in\{1,\cdots,N\}$ に対して

$$\langle S_{i_1}\cdots S_{i_n}\rangle\geqslant 0.$$

したがって，

$$|\langle S(f_1)\cdots S(f_{2m})\rangle|\leqslant\langle S(|f_1|)\cdots S(|f_{2m}|)\rangle,$$
$$|\langle e^{S(f)}\rangle|\leqslant\langle e^{S(|\mathrm{Re}f|)}\rangle$$

系 7.5.7 によって，$S(|\mathrm{Re}f|)$ は $\mathscr{L}$ 型の確率変数だから，(7.5.11) より，(7.5.20) を得る（いまの場合，$M_2=\langle S(|\mathrm{Re}f|)^2\rangle$，$z=1$）．さらに，Hölder の不等式によって

$$\begin{aligned}I&\equiv\langle S(|f_1|)\cdots S(|f_{2m}|)\rangle\\&\leqslant\langle S(|f_1|)^{2m}\rangle^{1/2m}\langle|S(|f_2|)\cdots S(|f_{2m}|)|^{2m/(2m-1)}\rangle^{(2m-1)/2m}.\end{aligned}$$

これをくり返すと

$$I\leqslant\prod_{j=1}^{2m}\langle S(|f_j|)^{2m}\rangle^{1/2m}$$

を得る．(7.5.14) によって

$$\langle S(|f_j|)^{2m}\rangle\leqslant\frac{(2m)!}{2^m m!}\langle S(|f_j|)^2\rangle^m$$

であるから，(7.5.19) を得る．∎

不等式 (7.5.19)，(7.5.20) は，それぞれ相関関数およびその母汎関数が 2 点相関関数だけを用いて評価されるということを示すもので，注目すべき結果である．状態 $\langle\cdot\rangle_J$ は，後に示すとおり，たとえば $(\phi^4)_\nu$ モデル (p. 288 の例 (2)) の格子近似の有界領域における状態と見ることができ，これをもとにして無限体積極限や格子間隔を 0 にする極限を調べることになる．その際，上の定理は，2 点相関関数のみを評価すればよいことを示す．この点がたいへんありがたいわけである．

●演習問題

7.1 命題 7.3.2 につき，$n=3$ の場合を実際に確かめよ．

7.2　定理 7.2.1 において，

$$\Lambda = \{0, 1, 2\} \subset \mathbf{Z}$$

を考え，

$$H_\Lambda = -J(S_0 S_1 + S_1 S_2), \qquad J > 0$$

とする．このとき，(GKS–I) 不等式を直接に確かめよ．$J<0$ の場合はどうなるか ($J<0$ のときは，反強磁性的とよばれる)．これらの考察から，(GKS–I) 不等式の '物理的解釈' を見出せ．

7.3　μ を $\mathbf{R}$ 上の有限測度とし，任意の $a>0$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}} e^{aS^2} d\mu(S) < \infty$$

をみたすものとする．$\mathbf{C}$ 上の正則関数

$$f_\mu(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{zS} d\mu(S), \qquad z \in \mathbf{C},$$

の零点はすべて純虚数であるとしよう．このとき，任意の $b>0$ に対して，正則関数

$$f_{\mu,b}(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{zS} e^{bS^2} d\mu(S)$$

の零点もすべて純虚数となることを以下の手順によって証明せよ．

(1)　正則関数

$$a_m(z) \equiv \int_{\mathbf{R}} e^{zS}(1+\alpha S^2)^m d\mu(S), \qquad \alpha > 0,\ m = 1, 2, \cdots,$$

の零点はすべて純虚数であることを示せ．

ヒント：

$$a_m(z) = \left(1+\alpha \frac{d^2}{dz^2}\right)^m f_\mu(z)$$

と書けることに注意し，$f_\mu(z)$ に対して (7.5.4) と同様な表示式を使え．無限乗積を有限乗積で近似し，Hurwitz の定理を利用せよ．

(2)

$$\int e^{zS}\left(1+\frac{bS^2}{n}\right)^n d\mu(S), \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

は $n\to\infty$ のとき，$f_{\mu,b}(z)$ に，$\mathbf{C}$ の任意のコンパクト集合上で一様収束することを示せ．

7.4　正則関数

$$E(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{zS} e^{-\lambda S^4 - aS^2} dS, \qquad z \in \mathbf{C},\ \lambda > 0,\ a \in \mathbf{R},$$

の零点はすべて純虚数であることを以下の手順によって証明せよ．

(1)　各 $n = 1, 2, \cdots,$ に対して $\mathbf{C}$ 上の正則関数

$$E_n(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{zS} \exp\left[-4!\lambda n^4\left[\cosh\left(\frac{S}{n}\right)-1-\frac{1}{2}\left(\frac{S}{n}\right)^2\right]-aS^2\right]dS$$

を考える．$E_n(z)$ は，$n\to\infty$ のとき，$E(z)$ に，$\mathbf{C}$ の任意のコンパクト集合上で一様収束することを示せ．

（2） 第2種の変形 Bessel 関数 $K_\nu(z)$ は積分表示

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty \cosh(\nu x) e^{-z\cosh x} dx$$

をもつ*)．$z>0$ を任意に固定し，$K_\nu(z)$ を $\nu\in\mathbf{C}$ の関数とみるとき，その零点は純虚数に限られる，という事実および問題7.3の結果を利用して，十分に大きなすべての n に対して，$E_n(z)$ の零点は，すべて純虚数であることを示せ．

7.5 f を $\mathbf{Z}^\nu$ 上の有界な非負値関数とし，$\mathbf{Z}^\nu$ の部分集合 $\mathbf{B}\subset\{\beta\in\mathbf{Z}^\nu \mid |\beta|\leqslant R\}$ があって，$|\alpha|>R$ をみたすすべての $\alpha\in\mathbf{Z}^\nu$ に対して

$$f(\alpha)\leqslant\sum_{\beta\in\mathbf{B}} a(\beta)f(\alpha-\beta)$$

が成立するとしよう．ただし，$a(\beta)\geqslant 0$ で

$$\sum_{\beta\in\mathbf{B}} a(\beta)\equiv A_0<1$$

とする．このとき，不等式

$$|f(\alpha)|\leqslant\|f\|_\infty e^{-m_0 g(\alpha)}$$

が成立することを証明せよ．ただし，

$$\|f\|_\infty=\sup_{\alpha\in\mathbf{Z}^\nu}|f(\alpha)|,\qquad g(\alpha)=R\left[\frac{|\gamma|}{R}\right]$$

$$m_0=-\frac{\log A_0}{R}$$

ここに，$[x]$ は x を越えない最大の整数を表わす．

ヒント：仮定にあたえられた不等式を逐次代入せよ．

7.6 （1） 7.4節のスピン系を考え，$h=0$ とする．A, B を $\mathbf{Z}^\nu$ の部分集合で，$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{Z}^\nu$，$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\phi$ をみたすものとする．このとき，任意の $\alpha\in\mathbf{A}$，$\beta\in\mathbf{B}$ に対して

$$\langle S_\alpha S_\beta\rangle_\Lambda\leqslant\sum_{\substack{\gamma\in\mathbf{A}\\ \delta\in\mathbf{B}}} J_{\gamma\delta}[\langle S_\alpha S_\gamma\rangle_\Lambda\langle S_\delta S_\beta\rangle_\Lambda+\langle S_\alpha S_\delta\rangle_\Lambda\langle S_\gamma S_\beta\rangle_\Lambda],$$

を証明せよ．

ヒント：$J_{\gamma\delta}$ のうち，$\gamma\in\mathbf{A}$，$\delta\in\mathbf{B}$ である．$J_{\gamma\delta}$ を $\varepsilon J_{\gamma\delta}$（$\varepsilon>0$）で置き換えた期待値を $\langle\cdot\rangle_\Lambda(\varepsilon)$ とすると，$\alpha\in\mathbf{A}$，$\beta\in\mathbf{B}$ に対して

$$\langle S_\alpha S_\beta\rangle_\Lambda=\int_0^1\frac{d}{d\varepsilon}\langle S_\alpha S_\beta\rangle_\Lambda(\varepsilon)d\varepsilon$$

と書けることに注意し，Lebowitz の不等式（7.4.20）を適用せよ．

---

*) たとえば，森口繁一ほか『数学公式III』（岩波書店，1959）．

（2） (1) のスピン系において，相互作用は最近接で，スピンは 1/2 の場合（すなわち，$d\mu_\alpha(S)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(S-\frac{1}{2}\right)+\delta\left(S+\frac{1}{2}\right)\right]dS$ の場合）を考え，その無限体積極限の状態のひとつを $\langle\cdot\rangle$ で表わす．このとき，

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^\nu}\langle S_0S_\alpha\rangle$$

が十分小さいならば，十分大きな $|\alpha-\beta|$ に対して

$$\langle S_\alpha S_\beta\rangle\leqslant Ce^{-m_0|\alpha-\beta|}$$

となる定数 $C>0$，$m_0>0$ が存在することを示せ．

ヒント：7.6 (1) と 7.5 を用いよ．

●文献

Boas, R. P. (1954), *Entire Functions*, Academic Press, New York.

Ellis, R., J. Monroe and C. Newman (1976), The GHS and other correlation inequalities for a class of even ferromagnets, Commun. Math. Phys. **46**, 167–182.

Fortuin, C., P. Kasteleyn and J. Ginibre (1971), Correlation inequalities on some partially ordered sets, Commun. Math. Phys. **22**, 89–103.

Ginibre, J. (1970) General formulation of Griffiths' inequality, Commun. Math. Phys. **16**, 310–328.

Glimm, J. and A. Jaffe (1981, 1987), *Quantum Physics*, Springer. New York.

Griffiths, R. (1967a), Correlation in Ising ferromagnets, I, J. Math. Phys. **8**, 478–483.

Griffiths, R. (1967b), Correlation in Ising ferromagnets, II, J. Math. Phys. **8**, 484–489.

Griffiths, R. (1967c), Correlation in Ising ferromagnets, III, Commun. Math. Phys. **6**, 121–127.

Griffiths, R., C. Hurst and S. Sherman (1970), Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field, J. Math. Phys. **11**, 790–795.

Kelly, D. and S. Sherman (1968), General Griffiths' inequalities on correlations in Ising ferromagnets, J. Math. Phys. **9**, 466–484.

Lebowitz, J. (1974), GHS and other inequalities, Commun. Math. Phys. **35**, 87–92.

Newman, C. (1974), Zeros of the partition function for generalized Ising

systems, Commun. Pure Appl. Math. **27,** 143–159.

Newman, C. (1975a), Inequalities for Ising models and field theories which obey the Lee-Yang theorem, Commun. Math. Phys. **41,** 1–9.

Newman, C. (1975b), Gaussian correlation inequalities for ferromagnets, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. Gebiete **33,** 75–93.

Simon, B. (1974), *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory,* Princeton University Press, Princeton.

Simon, B. (1979), *Functional Integration and Quantum Physics,* Academic Press, New York.

Simon, B. (1980), Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets, Commun. Math. Phys. **77,** 111–126.

Sylvester, G. (1975), Representation and inequalities for Ising model Ursell functions, Commun. Math. Phys. **42,** 209–220.

第8章

格子上の $P(\phi)_\nu$ モデル

この章では，ν 次元格子空間上にスカラー場の $P(\phi)_\nu$ モデルを構成する．これは，連続体 $\mathbf{R}^\nu$ 上の相対論的な $P(\phi)_\nu$ モデルの構成へのひとつのステップをなす．他方，このモデルは，統計力学的にみれば，非有界な格子スピンの最近接相互作用のひとつのモデルにもなっている．構成の基本となる道具は，鏡映正値性と相関不等式である．

8.1 はじめに——目標

本書では，簡単のため，1 成分のスカラー場の $P(\phi)_\nu$ モデルだけを考える*)．

$\mathbf{Z}_a{}^\nu$ を格子間隔 $a>0$ の ν 次元立方格子としよう．この格子空間上のスカラー場の $P(\phi)_\nu$ モデルの構成の問題は，数学的には，次のように述べられる：

問題　下に有界な多項式 $P=P(X)$ があたえられたとしよう．このとき，その形式的表現が，

$$d\mu_\lambda(\phi) \underset{\text{formal}}{=} N\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{\substack{|x-y|=a\\ x,y\in\mathbf{Z}_a{}^\nu}} a^{\nu-2}[\phi(x)-\phi(y)]^2-\frac{m^2}{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu} a^\nu\phi(x)^2$$

$$-\lambda\sum_{x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu} a^\nu :P(\phi(x)):\Big]\times\prod_{x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu} d\phi(x) \qquad (8.1.1)$$

である，$\mathbf{R}^{\mathbf{Z}_a{}^\nu}$ 上の確率測度 $d\mu_\lambda(\phi)$ およびそのモーメント

*)　N 成分のスカラー場を考えるときは，以下の記号で $\phi(x)$ のところを $\phi(x)=(\phi_1(x),\cdots,\phi_N(x))$ とし，$\phi(x)$ に関係する量を然るべく変更すればよい．もちろん，$N=1$ の場合の議論が一般の N に対する場合にもそのまま成立するとは限らない．

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) \equiv \int \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) d\mu_\lambda(\phi),$$
$$x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{Z}_a{}^\nu \qquad (8.1.2)$$

の存在を示し，それらの性質を調べよ．

ここで，

$$\phi = \{\phi(x) \mid x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu\} \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}_a{}^\nu}.$$

各 $x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu$ に対して $d\phi(x)$ は，$\mathbf{R}$ 上の通常の Lebesgue 測度（したがって，$\prod_{x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu} d\phi(x)$ は，いわば，$\mathbf{R}^{\mathbf{Z}_a{}^\nu}$ 上の‘形式的 Lebesgue 測度’）であり，N は形式的な規格化定数である．$\phi \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}_a{}^\nu}$ を **Euclid 格子スカラー量子場** (Euclidean quantum lattice scalar field) あるいは単に **(Euclid) 格子場**とよぶ．関数 $:P(\phi(x)):$ は，$\phi(x)$ の多項式 $P(\phi(x))$ の，測度 $d\mu_0(\phi)$ についての Wick 積*)であり，物理的には，格子場どうしの相互作用を表わす．$m > 0, \lambda \geqslant 0$ は，それぞれ，格子場の質量，相互作用定数を表わすパラメーターである．

(8.1.1) において，

$$S_0(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{|x-y|=a \\ x, y \in \mathbf{Z}_a{}^\nu}} a^{\nu-2} [\phi(x) - \phi(y)]^2 + \frac{m^2}{2} \sum_{x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu} a^\nu \phi(x)^2 \qquad (8.1.3)$$

$$S_I(\phi) = \lambda \sum_{x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu} a^\nu :P(\phi(x)): \qquad (8.1.4)$$

とおけば，$S_0(\phi)$ は，相互作用のないとき（すなわち，$\lambda = 0$ のとき）の格子場の (Euclid 的)‘作用積分’になっており，$S_I(\phi)$ は相互作用項 $\lambda :P(\phi(x)):$ の‘作用積分’になっている．

(8.1.2) で定義される関数 S_n を格子場の ***n* 点 Schwinger 関数**とよび，それらのつくる関数列 $\{S_n\}$ 全体が格子上の $P(\phi)_\nu$ モデルを定義するものと考える．

そのもとになっているのは，第1に Gell-Mann-Low の公式 (1.3.6) である．それを $t \longrightarrow it$ のおきかえによってユークリッド化し，‘時’空連続体を

*) 確率変数の Wick 積（第3章参照）．$d\mu_0(\phi)$ は，分散が $(-\varDelta_a + m^2)^{-1}$，平均0の Gauss 測度として厳密な数学的意味をもつ(問題 8.1)．ここで $\varDelta_a$ は $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ 上のラプラシアンである（付録2参照）．

格子 $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ でおきかえ，その上で経路積分表示*)をすれば (8.1.2) に到達する．

重要なのは，むしろ第2点であって，それは第2章に述べた Osterwalder-Schrader の公理系をみたし，かつトリヴィアルでないモデルをつくるという目標である．それには，もちろん格子から ν 次元連続体へ極限移行し，またその全体積を無限大にする極限（熱力学的極限）をとらねばならない．こうして構成した Euclid 空間上の Schwinger 関数が Osterwalder-Schrader の公理系をみたしていれば，これから適当な解析接続により Minkowski 空間上で Wightman の公理系をみたす Wightman 関数が得られる．これに GNS 構成法を適用すれば Hilbert 空間とその上で作用する場の演算子がつくれて，しかるべき物理的要請をみたす．つまり，場の量子論が得られるのである．

この第2の点から見ると，Gell-Mann-Low の公式に示唆をもとめたという第1の点は，そのようにすれば場の量子論に道がつながるだろうという期待感に支えられているにすぎないともいえる．Euclid 空間における Schwinger 関数の構成は，本来，もっと自由であってもよいのである．しかし，実際上は Osterwalder-Schrader の公理系をみたすものを徒手でつくるのはむずかしい．

(8.1.1) であたえられた表現は，もちろん，そのままでは，数学的に意味をなさないので，これをいわば‘シンボル’とするような測度を構成しなければならない．これが，上に言った問題にほかならない．数学的には，無限次元位相空間上の確率測度で，並進不変性のような，いくつかの‘よい’性質をもち，かつ Gauss 型でないものを構成するという問題としてとらえることもできる．

形式的な測度 $d\mu_\lambda$ に対応する数学的に意味のある測度の構成法は，次の通りである：

まず，$\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の有界領域 Λ で (8.1.1) に対応する測度 $d\mu_{\lambda,\Lambda}$（これは $\mathbf{R}^{|\Lambda|}$ 上の測度）**) をつくり，そのあと，特性関数の収束の意味で***)，

$$\lim_{\Lambda\nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu} d\mu_{\lambda,\Lambda}$$

*)　経路積分については，江沢 (1978) や Simon (1979) を参照．

**)　$|\Lambda|$ は Λ の点の個数．

***)　$K_\Lambda(f)=\int \exp[i\phi(f)]d\mu_\Lambda \xrightarrow[\Lambda\nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu]{} K(f)$（各 f ごとの収束）．これに対応する確率測度を $d\mu_\lambda$ とする．ここで，$\phi(f)$ は，(8.3.14) で定義される．

の存在を示し，それを $d\mu_\lambda$ と定義する．しかし，$d\mu_{\lambda,\Lambda}$ をつくる際にある問題が生じる．すなわち，Λ における $S_0(\phi)$ の定義において，Λ での境界条件を定めなければならないことである．これは，$S_0(\phi)$ に含まれる場 $\phi(x)$ が最近接格子点 ($|x-y|=a$) 上の場 $\phi(y)$ とつながっているからである．境界条件の設定を数学的な表現を用いて行なうには，$S_0(\phi)$ が形式的に

$$S_0(\phi)=\frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu}a^\nu\phi(x)(-\Delta_a+m^2)\phi(x) \tag{8.1.5}$$

と書かれることに注意する．ここで，Δ_a は $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ 上の格子近似の ν 次元ラプラシアンである（付録 2 参照）．したがって，Λ における $S_0(\phi)$ を定義するには，Δ_a に対して境界条件を設定すればよい．ここでは，境界条件として，自由境界条件，周期的境界条件，Dirichlet 境界条件の三つを考える．これらの定義といくつかの性質については，付録 2 を参照せよ．なお，記号は付録のものをそのまま使うことにするが，いまは 1 成分スカラー場を考えているので，付録の記号でいって，$N=1$ の場合を扱うことになる．

8.2 有界領域での自由な Euclid 格子場

Λ を $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の有界領域とし，$C_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(x,y)$ $(x,y\in\Lambda)$ を境界条件 $(\mathrm{B})=\mathrm{P}$, D, F に対する $(-\Delta_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}+m^2)^{-1}$ の核 (kernel) としよう．ただし，周期的境界条件 P のときは，Λ として‘直方体’のものだけを考える．有限次元ベクトル空間 $\mathscr{L}_{a,\Lambda}$（付録 2）に

$$\langle f,g\rangle_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}\equiv 2\sum_{x,y\in\Lambda}a^{2\nu}\overline{f(x)}C_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(x,y)g(y) \qquad f,g\in\mathscr{L}_{a,\Lambda} \tag{8.2.1}$$

で定義される内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}$ を導入し，この内積と $\mathscr{L}_{a,\Lambda}$ の実ベクトルから生成される実 Hilbert 空間を $\mathsf{H}_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}$ とする．

定義 8.2.1 $\mathsf{H}_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}$ を指標とする Gauss 超過程 $\phi_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}(\cdot)$ を境界条件 (B) に対する，Λ における自由な Euclid 格子場とよび，$\phi_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}(\cdot)$ に対応する Gauss 型測度を $d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}$ と記す．

任意の $x\in\Lambda$ に対して，ベクトル $e_x\in H_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}$ を

$$e_x(y) = a^{-\nu}\delta_{x,y} \text{ (Kronecker の } \delta \text{ 関数)}, \quad y \in \Lambda, \tag{8.2.2}$$

によって定義し $\phi_\Lambda{}^{(B)}(e_x)$ を簡略に $\phi_\Lambda{}^{(B)}(x)$ と書けば，定義から

$$\int \phi_\Lambda{}^{(B)}(x)\phi_\Lambda{}^{(B)}(y)d\mu_{0,\Lambda}{}^{(B)} = C_{a,\Lambda}{}^{(B)}(x,y). \tag{8.2.3}$$

実 Hilbert 空間 $H_\Lambda{}^{(B)}$ は有限次元（$|\Lambda|$ 次元）であるから，$d\mu_{0,\Lambda}{}^{(B)}$ は $\mathbf{R}^{|\Lambda|}$ 上の Gauss 型測度として次の形であたえられる：

$$d\mu_{0,\Lambda}{}^{F} = N_\Lambda{}^{F}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{\substack{|x-y|=a\\ \{x,y\}\subset\Lambda}} a^{\nu-2}\phi(x)\phi(y) - \frac{1}{2}(2\nu a^{-2}+m^2)\sum_{x\in\Lambda} a^\nu\phi(x)^2 + \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\partial\Lambda} B_{\partial\Lambda}(x,y)\phi(x)\phi(y)\right]\prod_{x\in\Lambda} d\phi(x), \tag{8.2.4}$$

$$d\mu_{0,\Lambda}{}^{P} = N_\Lambda{}^{P}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{\substack{|x-y|=a\\ \{x,y\}\subset\Lambda}}^{P} a^{\nu-2}\phi(x)\phi(y) - \frac{1}{2}(2\nu a^{-2}+m^2)\sum_{x\in\Lambda} a^\nu\phi(x)^2\right]\prod_{x\in\Lambda} d\phi(x). \tag{8.2.5}$$

$$d\mu_{0,\Lambda}{}^{D} = N_\Lambda{}^{D}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{\substack{|x-y|=a\\ \{x,y\}\subset\Lambda}} a^{\nu-2}\phi(x)\phi(y) - \frac{1}{2}(2\nu a^{-2}+m^2)\sum_{x\in\Lambda} a^\nu\phi(x)^2\right]\prod_{x\in\Lambda} d\phi(x). \tag{8.2.6}$$

ここで，$\{\phi(x)\}_{x\in\Lambda} \in \mathbf{R}^{|\Lambda|}$，各 $x \in \Lambda$ に対して $d\phi(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度*)，$N_\Lambda{}^{(B)}$ は規格化定数で，(8.2.5) の右辺における記号 $\sum^{P}$ は各座標軸方向に対して，その周期を法として定義される和を表わす．$d\mu_{0,\Lambda}{}^{(B)}$ の形を見ればわかるように，これは，スピンの単独分布が

$$(\text{定数})\times\exp\left[-\frac{1}{2}(2\nu a^{-2}+m^2)S^2\right]dS$$

であたえられる，一般化された強磁性的 Ising モデル（5.2節参照）になっている（(B) = P, D，の場合，相互作用は最近接型である）．

---

*）したがって，$\prod_{x\in\Lambda} d\phi(x)$ は $\mathbf{R}^{|\Lambda|}$ 上の Lebesgue 測度．

8.3 相互作用の導入と Schwinger 関数

自由な Euclid 格子場の相互作用は $d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}$ に対する摂動として導入される. $P(X)$ を下に有界な多項式とし, 場の相互作用を $P(\phi(x))$ の Wick 積として定義したいわけであるが, Wick 積のとり方には, 前節で導入した測度 $d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}$ に応じて3通りある. 境界条件 (B) に対応する Wick 積を $::_{\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}$ と書こう. すなわち,

$$:\phi(x)^n:_{\Lambda}{}^{(\mathrm{B})} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!}\phi(x)^{n-2k}\left(-\frac{1}{2}C_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(x,x)\right)^k, \quad n=1,2,\cdots. \tag{8.3.1}$$

場の相互作用 $\lambda U_{\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}$ は

$$\lambda U_{\Lambda}{}^{(\mathrm{B})} = \lambda \sum_{x\in\Lambda} a^{\nu} :P(\phi(x)):_{\Lambda}{}^{(\mathrm{B})} \tag{8.3.2}$$

によって定義される. (B) = F のときは, 単に $U_{\Lambda}^{\mathrm{F}} = U_{\Lambda}, ::_{\Lambda}^{F} = ::_{\Lambda}$ と書く. 以下, $\lambda=1$ とする*).

補題 8.3.1 $P(X)$ を下に有界な多項式とする. このとき, 任意の境界条件の対 (B, B′) に対して

$$\exp[-U_{\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}] \in \bigcap_{p<\infty} \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^{|\Lambda|}, d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B}')}). \tag{8.3.3}$$

証明 下に有界な多項式は

$$P(X) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k X^k, \qquad \alpha_{2n} > 0, \tag{8.3.4}$$

という形をもつ. (8.3.2) によって, $U_{\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}$ は, 次数 $2n$ の下に有界な $\phi(x)$ の多項式である. したがって, $\exp[-pU_{\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}]$ は任意の $p>0$ に対して有界であるから, (8.3.3) を得る. ∎

以下, P は下に有界な多項式であるとしよう. このとき, 上の補題によって,

---

*) 必要となれば, P の係数を λ 倍することにより, つねに λ を回復できる.

分配関数

$$Z_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}=\int\exp[-U_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}]d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})} \tag{8.3.5}$$

および，期待値

$$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}=\frac{\displaystyle\int\cdot\exp[-U_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}]d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}}{Z_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}} \tag{8.3.6}$$

が定義される．また，(8.3.5) と (8.3.6) とは違った型の分配関数，期待値を定義することも可能である．ここでは次の2つを考えよう：

$$Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}=\int\exp[-U_\Lambda]d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}, \tag{8.3.7}$$

$$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}=\frac{\displaystyle\int\cdot\exp[-U_\Lambda]d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}}{Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}}, \tag{8.3.8}$$

$$Z_\Lambda{}^{\mathrm{HP}}=\int\exp[-U_\Lambda]d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}, \tag{8.3.9}$$

$$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HP}}=\frac{\displaystyle\int\cdot\exp[-U_\Lambda]d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}}{Z_\Lambda{}^{\mathrm{HP}}}. \tag{8.3.10}$$

HD, HP は，それぞれ，半 Dirichlet および半周期的境界条件ともよぶべきものである．分配関数，期待値に対して境界条件を示す記号 (B) を用いるときは，HD, HP も含ませることにする．

さて，有界領域 Λ における格子上の $\boldsymbol{n}$ 点 **Schwinger 関数**は

$$S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(x_1,\cdots,x_n)=\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_\Lambda{}^{(\mathrm{B})},$$
$$x_1,\cdots,x_n\in\Lambda, \tag{8.3.11}$$

によって定義される．この Schwinger 関数のいくつかの基本的な性質を調べよう．

命題 8.3.2　$P(X)=Q(X)-hX$, $h\geqslant 0$ とし，$Q(X)$ は偶数次の項のみからなる下に有界な多項式としよう．このとき，どの境界条件 (B) に対しても，次の不等式が成立する：

(1)　$S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0,\quad x_1,\cdots,x_n\in\Lambda.$　(8.3.12)

（2） $S_{m+n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$

$$\geqslant S_{m,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(x_1, \cdots, x_m) S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(y_1, \cdots, y_n),$$
$$x_1, \cdots, x_m, \ \ y_1, \cdots, y_n \in \Lambda. \qquad (8.3.13)$$

証明 仮定により，$:Q(\phi(x)):$ は $\phi(x)$ の偶数次の多項式であるので，$\mathbf{R}$ 上の偶測度 $d\mu$ と $J_{xy} > 0$ が存在して，

$$d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})} \exp[-U_\Lambda{}^{(\mathrm{B}')}]$$
$$= \prod_{x\in\Lambda} d\mu(\phi(x)) \exp\Big[\sum_{x,y\in\Lambda} J_{xy}\phi(x)\phi(y) + \sum_{x\in\Lambda} h\phi(x)\Big]$$

という形に書ける．$h \geqslant 0$ であるから，GKS 不等式（定理 7.2.1）が適用できて，上の不等式を得る．∎

有界な台をもつ，$\mathbf{Z}_a{}^\nu$ 上の複素数値関数の全体を $\mathrm{C}_0(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ とし，$f \in \mathrm{C}_0(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ に対して**均された**（smeared）**格子場** $\phi(f)$ を

$$\phi(f) = \sum_{x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu} a^\nu \phi(x) f(x) \qquad (8.3.14)$$

によって定義する．上の f のことを‘試験関数’とよぶことがある．有界領域 Λ に台をもつ試験関数 $f_1, \cdots, f_n$ に対して，**均された Schwinger 関数**

$$S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_n) \equiv \langle \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) \rangle_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}$$
$$\equiv \sum_{x_1,\cdots,x_n\in\Lambda} a^{n\nu} S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(x_1, \cdots, x_n) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \qquad (8.3.15)$$

を導入する．このとき，上の命題の系として，次を得る．

系 8.3.3 命題 8.3.2 の仮定に加えて，$f_j, g_j \geqslant 0$，としよう．このとき，任意の（B）に対して，

（1） $S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_n) \geqslant 0,$ (8.3.16)

（2） $S_{m+n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_m, g_1, \cdots, g_n)$

$$\geqslant S_{m,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_m) S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(g_1, \cdots, g_n). \qquad (8.3.17)$$

Schwinger 関数をまとめて考えるには，その**母汎関数**（generating functional）

$$K_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}(f) = \langle e^{i\phi(f)} \rangle_\Lambda{}^{(\mathrm{B})} \qquad (8.3.18)$$

を定義すると便利である．というのは，

$$S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1,\cdots,f_n)=(-i)^n\frac{\partial^n K_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)}{\partial\zeta_1\cdots\partial\zeta_n}\Bigg|_{\zeta_1=\cdots=\zeta_n=0} \tag{8.3.19}$$

となるからである．つまり，

$$K_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)$$

は $\zeta_1,\cdots,\zeta_n$ の整関数となり，その Taylor 係数として，Schwinger 関数があたえられることになる．

無限体積極限 $\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu$ を考えるためには，Schwinger 関数およびその母汎関数の Λ 依存性を調べておく必要がある．

$\Lambda'\subset\Lambda$ として，

$$U_{\Lambda,\Lambda'}=\sum_{x\in\Lambda'}a^\nu:P(\phi(x)):_\Lambda \tag{8.3.20}$$

とおき，$x_1,\cdots,x_n\in\Lambda$ に対して

$$S_{n,\Lambda,\Lambda'}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\int d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{F}}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)e^{-U_{\Lambda,\Lambda'}}}{Z_{\Lambda,\Lambda'}}, \tag{8.3.21}$$

$$S_{n,\Lambda,\Lambda'}{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\int d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)e^{-U_{\Lambda,\Lambda'}}}{Z_{\Lambda,\Lambda'}{}^{\mathrm{HD}}} \tag{8.3.22}$$

を定義する．ただし，

$$Z_{\Lambda,\Lambda'}=\int d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{F}}e^{-U_{\Lambda,\Lambda'}} \tag{8.3.23}$$

$$Z_{\Lambda,\Lambda'}{}^{\mathrm{HD}}=\int d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}e^{-U_{\Lambda,\Lambda'}}. \tag{8.3.24}$$

定理 8.3.4　$P(X)$ は，命題 8.3.2 と同じものとし，

$$\Lambda_1\subset\Lambda_2,\quad \Lambda_1'\subset\Lambda_1,\quad \Lambda_2'\subset\Lambda_2,\quad \Lambda_2'\cap\Lambda_1=\Lambda_1'$$

としよう．このとき，すべての $x_1,\cdots,x_n\in\Lambda$ に対して

（1）$S_{n,\Lambda_1,\Lambda_1'}{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n)\leqslant S_{n,\Lambda_2,\Lambda_2'}{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n)$　(8.3.25)

（2）$S_{n,\Lambda_1,\Lambda_1'}{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n)\leqslant S_{n,\Lambda_2,\Lambda_2'}(x_1,\cdots,x_n)$　(8.3.26)

証明 記号の節約のため，$a=1$ とし，

$$S_{n,\Lambda_j,\Lambda_j'}{}^{(\mathrm{B})}=S_j{}^{(\mathrm{B})},\qquad j=1,2,\ (\mathrm{B})=\mathrm{F},\mathrm{HD}$$

と書く．

（1） $d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}$ の陽な形を用いると

$$S_j{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n)=\int\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{\substack{|x-y|=1\\ \{x,y\}\subset\Lambda_j}}\phi(x)\phi(y)\right]$$
$$\times\prod_{x\in\Lambda_j}\exp\left[-\frac{1}{2}(2\nu+m^2)\phi(x)^2\right]$$
$$\times\prod_{x\in\Lambda_j'}\exp[-:P(\phi(x)):_{\Lambda_j}]\prod_{x\in\Lambda_j}d\phi(x)/Z_{\Lambda_j,\Lambda_j'}{}^{\mathrm{HD}}$$

そこで，$t\in[0,1]$ に対して，測度

$$\begin{aligned}d\mu(t)&\\&=\exp\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{|x-y|=1\\ \{x,y\}\subset\Lambda_1}}\phi(x)\phi(y)+\sum_{\substack{|x-y|=1\\ \{x,y\}\subset\Lambda_2\setminus\Lambda_1}}\phi(x)\phi(y)+t\sum_{\substack{|x-y|=1\\ x\in\Lambda_1,y\in\Lambda_2\setminus\Lambda_1}}\phi(x)\phi(y)\right)\right.\\&\qquad-\frac{1}{2}(2\nu+m^2)\sum_{x\in\Lambda_2}\phi(x)^2\\&\qquad\left.-\sum_{x\in\Lambda_1'}:P(\phi(x)):_{\Lambda_2}-\sum_{x\in\Lambda_2'\setminus\Lambda_1}:P(\phi(x)):_{\Lambda_2}\right]\prod_{x\in\Lambda_2}d\phi(x)\end{aligned}$$

を考え，

$$\langle\cdot\rangle_t=\frac{\displaystyle\int\cdot\,d\mu(t)}{\displaystyle\int d\mu(t)}$$

とする．

$$F(t)=\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_t$$

とおけば，容易にわかるように

$$F(0)=S_1{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n),$$
$$F(1)=S_2{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n).$$

$F(t)$ を t で微分すると，

$$\frac{d}{dt}F(t)=\sum_{\substack{|x-y|=1\\ x\in\Lambda_1,y\in\Lambda_2\setminus\Lambda_1}}\frac{1}{2}\{\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(x)\phi(y)\rangle_t$$

$$-\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_t\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_t\}$$

を得る．期待値 $\langle\cdot\rangle_t$ についても GKS 不等式はなりたつから，$dF(t)/dt\geqslant 0$ となる．したがって，$F(1)\geqslant F(0)$ を得る．これは，(8.3.25) にほかならない．

（2） この場合は，

$$d\tilde{\mu}(t)=\exp\left[\frac{1}{2}t\sum_{\substack{|x-y|=1\\ x,y\in\partial\Lambda_2}}B_{\partial\Lambda_2}(x,y)\phi(x)\phi(y)\right]d\mu(t)$$

という測度を考え，

$$\langle\cdot\rangle_t^{\sim}=\frac{\displaystyle\int\cdot\, d\tilde{\mu}(t)}{\displaystyle\int d\tilde{\mu}(t)}$$

とする．

$$\tilde{F}(t)=\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_t^{\sim}$$

とおけば，

$$\tilde{F}(0)=S_1^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n),$$
$$\tilde{F}(1)=S_2(x_1,\cdots,x_n).$$

$B_{\partial\Lambda_2}(x,y)\geqslant 0$ だから，期待値 $\langle\cdot\rangle_t^{\sim}$ に対しても，GKS 不等式がなりたつ．したがって，(1) と同様にして $\tilde{F}(0)\leqslant\tilde{F}(1)$ を得る．∎

系 8.3.5 $P(X)$ は命題 8.3.2 と同じとし，$f\geqslant 0$ とする．このとき，$K_\Lambda^{\mathrm{HD}}(-if)$ は Λ の単調増加関数である．

証明 $\exp|\phi(f)|$ は測度

$$\exp[-U_\Lambda]d\mu_{0,\Lambda}^{\mathrm{D}}$$

について可積分であるから，Lebesgue の収束定理によって

$$K_\Lambda^{\mathrm{HD}}(-if)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S_{n,\Lambda}^{\mathrm{HD}}(f,\cdots,f)$$

が成立する．これと定理 8.3.4 から，求める結果を得る．∎

この節を終えるにあたって，いま考えているモデルにおける鏡映正値性の表

現をあたえておこう.

Λ は直方体の形をした格子点の有界集合で，各軸方向の，原点に関する鏡映で不変であるものとする．Λ の点を $(t, \boldsymbol{x})$ で表わす.

$$\Lambda_{\pm} = \{(t, \boldsymbol{x}) \in \Lambda \mid t \gtrless 0,\ \ \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}_a{}^{\nu-1}\}$$
$$\Lambda_0 = \{(0, \boldsymbol{x}) \in \Lambda\}$$

とおく．r を $t=0$ に関する鏡映とすれば，r は，$\Lambda_+(\Lambda_-)$ を $\Lambda_-(\Lambda_+)$ の上へ 1 対 1 に写し，$r^2=1$ をみたす．また，$x \in \Lambda_0$ に対しては，$rx = x$ と定義しておく．$\mathsf{A}_{\pm} = \mathsf{A}_{\Lambda_{\pm} \cup \Lambda_0}$ とし（記号については，5.1 節を参照），$\theta : \mathsf{A}_{\pm} \longrightarrow \mathsf{A}_{\mp}$ を

$$\theta(F)(\omega) = \overline{F(\theta_* \omega)}$$

によって定義する.

状態 $\langle \cdot \rangle_{\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}$ は，

$$\langle \cdot \rangle_{\Lambda}{}^{\mathrm{HD}} = \frac{\displaystyle\int \cdot\, e^{-H_{\Lambda}} d\Phi_{0,\Lambda}}{\displaystyle\int e^{-H_{\Lambda}} d\Phi_{0,\Lambda}} \tag{8.3.27}$$

と書けることに注意する．ただし，

$$H_{\Lambda} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{|x-y|=a \\ \{x,y\} \subset \Lambda}} a^{\nu} \phi(x) \phi(y), \tag{8.3.28}$$

$$d\Phi_{0,\Lambda} = \prod_{x \in \Lambda} \exp\Big[-\frac{1}{2} (2\nu a^{-2} + m^2) a^{\nu} \phi(x)^2 - a^{\nu} :P(\phi(x)):_{\Lambda} \Big] d\phi(x). \tag{8.3.29}$$

したがって，命題 6.2.10 と同様に，$\langle \cdot \rangle_{\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}$ は，θ に関して，一般鏡映正値的である.

$(\mathbf{Z}_a{}^{\nu})^n$ ($\mathbf{Z}_a{}^{\nu}$ の n 個の直積) 上の複素数値関数で，Λ^n 上に台をもつものの全体を $\mathrm{C}_0(\Lambda^n)$ とし，$f \in \mathrm{C}_0(\Lambda^n)$ に対して

$$S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(f) = \sum_{x_1, \cdots, x_n} a^{n\nu} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{\Lambda}{}^{\mathrm{HD}} f(x_1, \cdots, x_n) \tag{8.3.30}$$

を定義する．これは，$S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n)$ の拡張である．また，

$$\mathrm{C}_0{}^+(\Lambda^n)=\{f\in \mathrm{C}_0(\Lambda^n)\mid \operatorname{supp} f\subset\{(t_1,x_1,\cdots,t_n,x_n)\mid 0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\}\}$$

とおく.

定理 8.3.6

(1)　任意の $f\in \mathrm{C}_0(\Lambda^n)$ に対して

$$\overline{S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(f)}=S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(\bar{r}f) \tag{8.3.31}$$

ただし, $\bar{r}f$ は

$$(\bar{r}f)(x_1,\cdots,x_n)=\overline{f(rx_n,rx_{n-1},\cdots,rx_1)} \tag{8.3.32}$$

によって定義される.

(2)　$f_0\in\mathbf{C}$, $f_1\in \mathrm{C}_0{}^+(\Lambda)$, $\cdots$, $f_n\in \mathrm{C}_0{}^+(\Lambda^n)$ に対して,

$$\sum_{n,m=0}^{\text{有限}} S_{n+m,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(\bar{r}f_n\otimes f_m)\geqslant 0. \tag{8.3.33}$$

ただし, $S_0{}^{\mathrm{HD}}\equiv 1$ とする.

証明　$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}=\langle\cdot\rangle$ と記す.

(1)　これは,

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle=\langle\phi(-t_1,x_1)\cdots\phi(-t_n,x_n)\rangle$$

を示せば十分である. しかし, H_Λ, $d\Phi_{0,\Lambda}$ は鏡映に関して不変であるから, これは明らかである.

(2)

$$F=\sum_n\sum_{x_1,\cdots,x_n}a^{n\nu}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)f_n(x_1,\cdots,x_n)$$

とおけば, $F\in\mathrm{A}_+$ であり, (8.3.33) の左辺は,

$$\langle\theta(F)F\rangle$$

に等しい. これは, $\langle\cdot\rangle$ の鏡映正値性によって, 非負である. ∎

8.4　無限体積極限 = 熱力学的極限

格子間隔 a を固定して, 無限体積極限 $\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の存在を半 Dirichlet 境界条件の場合について示す. その基本となるのは, 母汎関数を Λ に依存しない形で評価することである. Schwinger 関数の上界は, Cauchy の評価式を用いて, 母汎関数のそれから得られる.

まず，分配関数を評価するために次の記号を導入する：

定義 8.4.1

$$\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)}(x) = C_{a,\Lambda}{}^{(B)}(x,x), \qquad (B) = F, D, P, \tag{8.4.1}$$

$$\delta C_{a,\Lambda}{}^{D}(x) = \gamma_{a,\Lambda}{}^{D}(x) - \gamma_{a,\Lambda}{}^{F}(x) \tag{8.4.2}$$

$$\delta C_{a,\Lambda}{}^{P}(x) = \gamma_{a,\Lambda}{}^{P}(x) - \gamma_{a,\Lambda}{}^{F}(x). \tag{8.4.3}$$

$(B) = F, P$ に対しては，$C_{a,\Lambda}{}^{(B)}(x,x)$ は x によらないので，

$$\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)}(x) \equiv \gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)}, \qquad \delta C_{a,\Lambda}{}^{P}(x) \equiv \delta C_{a,\Lambda}{}^{P}$$

とも書く．付録の命題 2.9 により，$\delta C_{a,\Lambda}{}^{D}(x) \leqslant 0$, $x \in \Lambda$ である．

補題 8.4.2

$$P(X) = \sum_{m=2}^{2N} a_m X^m - hX, \qquad a_{2N} > 0,$$

$$a_m \in \mathbf{R}, \ \ m = 2, \cdots, 2N-1, \qquad h \in \mathbf{R} \tag{8.4.4}$$

とし，

$$p = \frac{2N}{2N-1} \tag{8.4.5}$$

とおく．このとき，$(B) = F, P$ に対して，

$$-:P(\phi(x)):_{\Lambda}{}^{(B)} \leqslant O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)})^N) + c|h|^p. \tag{8.4.6}$$

また，

$$-:P(\phi(x)):_{\Lambda}{}^{D} \leqslant O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{F})^N) + c|h|^p. \tag{8.4.7}$$

ここで，$c > 0$ は a, Λ によらない定数である*)．

証明　まず，単項 Wick 積 $:\phi(x)^m:$ を考えよう．公式

$$:\phi(x)^m:_{\Lambda}{}^{(B)} = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{k!(m-2k)!} \phi(x)^{m-2k} \left(-\frac{1}{2}\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)}(x)\right)^k$$

により，

$$Q_m(X) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k m!}{k!(m-2k)!} X^{m-2k}$$

とおけば，

---

*) $O(\alpha)$ は，$\alpha > 0$ が十分大きいとき $O(\alpha) \leqslant c\alpha$ となる定数 $c > 0$ が存在するような量を表わす．以下同様．

$$:\phi(x)^m:_{\Lambda}{}^{(B)}=\left(\frac{1}{2}\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)}(x)\right)^{m/2}Q_m(Y)$$

と表わされる．ここで

$$Y=\phi(x)\Big/\sqrt{\frac{1}{2}\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)}}.$$

したがって，

$$:P(\phi(x)):_{\Lambda}{}^{(B)}=\sum_{m=2}^{2N}a_m\left(\frac{1}{2}\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)}(x)\right)^{m/2}Q_m(Y)-h\sqrt{\frac{1}{2}\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)}}\,Y.$$

任意の $A>0, B>0, \delta>0$ と $2N>m\geqslant k\geqslant 0$ に対して

$$\begin{aligned}&A\delta^{2N}Y^{2N}-B\delta^m Y^k\\&\quad\geqslant -C\delta^{2N(m-k)/(2N-k)}B^{2N/(2N-k)}\end{aligned}$$

が成立するから（C は δ, B によらない正定数），

$$\delta=[\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)}(x)/2]^{1/2}$$

にとり，$m=k=1$ のとき，$B=h$ にとれば，$\delta>1$ に対して，

$$:P(\phi(x)):_{\Lambda}{}^{(B)}\geqslant -\text{const.}\ (\delta^{2N}+|h|^p).$$

ただし，const. は a, Λ, δ, h によらない．したがって，(B) = F, P に対して，(8.4.6) を得る．(8.4.7) は

$$0\leqslant\gamma_{a,\Lambda}{}^{D}(x)\leqslant\gamma_{a,\Lambda}{}^{F}$$

による．∎

上の補題を使うと分配関数に対する限界を得ることができる．

命題 8.4.3　$P(X)$ は補題 8.4.2 のものとする．このとき，(B) = F, Pに対して

$$1\leqslant Z_\Lambda{}^{(B)}\leqslant\exp\{a^\nu|\Lambda|[O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{(B)})^N)+c|h|^p]\},\tag{8.4.8}$$

$$1\leqslant Z_\Lambda{}^{D}\leqslant\exp\{a^\nu|\Lambda|[O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{F})^N)+c|h|^p]\}.\tag{8.4.9}$$

$$\begin{aligned}&\exp\left[-a^\nu\sum_{m=1}^{N}a_{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!}\sum_{x\in\Lambda}(\delta C_{a,\Lambda}{}^{D}(x))^m\right]\\&\qquad\leqslant Z_\Lambda{}^{HD}\leqslant\exp\{a^\nu|\Lambda|[O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{F})^N)+c|h|^p]\}.\end{aligned}\tag{8.4.10}$$

$$\exp\left[-a^\nu\sum_{m=1}^{N}a_{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!}\sum_{x\in\Lambda}(\delta C_{a,\Lambda}{}^{P}(x))^m\right]$$

$$\leqslant Z_\Lambda^{\mathrm{HP}} \leqslant \exp\{a^\nu|\Lambda|[O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^N)+c|h|^p]\} \tag{8.4.11}$$

証明 $Z_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}$ の上界は上の補題から明らか．そこで下界を示そう．2 つの境界条件 (B), (B′)(＝F, D, P) に対して Jensen の不等式から

$$\exp\left[-\int d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B}')}U_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}\right]$$
$$\leqslant \int d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B}')}\exp[-U_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}].$$

そこで，任意の $m \geqslant 1$ に対して

$$:\phi(x)^m:_\Lambda{}^{(\mathrm{B})} = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{2^k k!(m-2k)!}:\phi(x)^{m-2k}:_\Lambda{}^{(\mathrm{B}')}$$
$$\times(\gamma_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B}')}-\gamma_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})})^k$$

が成立すること（第 4 章参照），および

$$\int :\phi(x)^m:_\Lambda{}^{(\mathrm{B}')}d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B}')} = 0, \qquad m \geqslant 1,$$

を使えば，

$$\int d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B}')}U_\Lambda{}^{(\mathrm{B})} = a^\nu \sum_{x\in\Lambda}\sum_{m=1}^{N} a_{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!}(\gamma_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B}')}-\gamma_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})})^m,$$

すなわち，(8.4.8)～(8.4.11) の左側の不等式が得られる．∎

上の命題の系として，格子場の理論を非有界スピン系の統計力学と見た場合の‘圧力の無限体積極限’の存在を示すことができる：

系 8.4.4 $P(X)$ は補題 8.4.2 と同じものとする．境界条件 (B)＝F, D, P, HD, HP に対して**圧力**

$$\alpha_\Lambda{}^{(\mathrm{B})} = \frac{1}{|\Lambda|}\ln Z_\Lambda{}^{(\mathrm{B})} \tag{8.4.12}$$

を定義しよう．このとき，各 $a>0$ に対して，$\Lambda_n \nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu$ となる，$\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の有界集合の列 $\{\Lambda_n\}$ があって，無限体積極限

$$\alpha^{(\mathrm{B})} \equiv \lim_{n\to\infty}\alpha_{\Lambda_n}{}^{(\mathrm{B})} \tag{8.4.13}$$

が存在し，(B)＝F, D, P に対しては，

$$\alpha^{(\mathrm{B})} \geqslant 0. \tag{8.4.14}$$

証明　$\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{F}}, \gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}$ は，a を固定するとき，Λ によらない定数で抑えられるから，命題8.4.3によって，Λ によらない定数 $c>0$ が存在して

$$0 \leqslant \alpha_\Lambda{}^{(\mathrm{B})} \leqslant c : (\mathrm{B}) = \mathrm{F, D, P} \text{ のとき},$$
$$-c \leqslant \alpha_\Lambda{}^{(\mathrm{B})} \leqslant c : (\mathrm{B}) = \mathrm{HD, HP} \text{ のとき}.$$

したがって，Bolzano-Weierstrass の定理によって，求める結果を得る．∎

定理 8.4.5　$P(X)$ は，補題 8.4.2 と同じものとしよう．Λ を $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の有界集合，f を $\mathrm{C}_0(\Lambda)$ の元，$S=\mathrm{supp}\, f$ とする．このとき，a, Λ によらない定数 $c>0$ が存在して

$$|K_\Lambda{}^{\mathrm{P}}(f)| \leqslant \exp[a^\nu|S|O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^N)+c\|\,|h\chi_S|+|f|\,\|_p{}^p] \tag{8.4.15}$$

$$|K_\Lambda{}^{\mathrm{HP}}(f)| \leqslant \exp\Bigg[a^\nu|S|O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{F}})^N)+c\|\,|h\chi_S|+|f|\,\|_p{}^p + \frac{|S|}{|\Lambda|}\sum_{m=1}^N a_{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!}\|(\delta C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^m\|_1\Bigg] \tag{8.4.16}$$

ここで，$\|f\|_q$ $(1 \leqslant q < \infty)$ は

$$\|f\|_q = (\sum_{x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu} a^\nu|f(x)|^q)^{1/q} \tag{8.4.17}$$

によって定義され，また，χ_S は S の定義関数である：

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases} \tag{8.4.18}$$

証明　$|K_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}(f)| \leqslant K_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}(\mathrm{Re}\, f)$ であるから，実数値の関数 f に対して，(8.4.15)，(8.4.16) を示せばよい．命題 6.2.12 と定理 6.3.3 によって，期待値 $\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{P}}, \langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HP}}$ に対して碁盤目型の評価式が成立するので，

$$\begin{aligned} K_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}(f) &= \langle \prod_{x\in\Lambda} \exp[a^\nu\phi(x)f(x)]\rangle_\Lambda{}^{(\mathrm{B})} \\ &\leqslant \prod_{x\in\Lambda} |\langle \prod_{y\in\Lambda} \exp[a^\nu\phi(y)f(x)]\rangle_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}|^{1/|\Lambda|} \\ &= \prod_{x\in S} |\langle \prod_{y\in\Lambda} \exp[a^\nu\phi(y)f(x)]\rangle_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}|^{1/|\Lambda|}. \end{aligned}$$

補題8.4.2より，a, Λ によらない定数 $c>0$ があって，

$$\phi(y)f(x) - :P(\phi(y)):_{\Lambda}{}^{\mathrm{P}} \leqslant O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^N) + c|h+f(x)|^p,$$
$$\phi(y)f(x) - :P(\phi(y)):_{\Lambda}{}^{\mathrm{F}} \leqslant O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{F}})^N) + c|h+f(x)|^p.$$

一方，命題8.4.3によって，

$$(Z_{\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^{-1} \leqslant 1,$$
$$(Z_{\Lambda}{}^{\mathrm{HP}})^{-1} \leqslant \exp\left[\sum_{m=1}^{N} a_{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!}\|(\delta C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^m\|_1\right]$$

したがって，

$$K_{\Lambda}{}^{\mathrm{P}}(f) \leqslant \prod_{x\in S}\exp[a^{\nu}\{O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^N) + c|h+f(x)|^p\}]$$
$$= \exp[a^{\nu}|S|O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^N) + c\|\chi_S h + f\|_p{}^p].$$
$$K_{\Lambda}{}^{\mathrm{HP}}(f) \leqslant \prod_{x\in S}\exp\left[a^{\nu}\{O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{F}})^N) + c|h+f(x)|^p\} + \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{m=1}^{N} a_{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!}\|(\delta C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^m\|_1\right]$$
$$= \exp\left[a^{\nu}|S|O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{F}})^N) + c\|\chi_S h + f\|_p{}^p + \frac{|S|}{|\Lambda|}\sum_{m=1}^{N} a_{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!}\|(\delta C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^m\|_1\right]. \blacksquare$$

上の定理から，Schwinger 関数に対する限界を得ることができる：

命題 8.4.6 $P(X)$ は，補題8.4.2と同じとし，f_j $(j=1,\cdots,n)$ は $C_0(\mathbf{Z}_a{}^{\nu})$ の元で，それらの台はすべて $S\subset\Lambda$ に含まれるとする．このとき，(B) = P, HP に対して

$$|S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1,\cdots,f_n)| \leqslant e^{a^{\nu}|S|C(a)+dn}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_p \tag{8.4.19}$$

ここで，$C(a), d$ は S, Λ によらない正定数であり，d は a にもよらない．

証明 S, Λ によらない正定数 $A(a), B(a)$ (a には依存しうる) があって，

$$O((\gamma_{a,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})})^N) \leqslant A(a), \qquad (\mathrm{B}) = \mathrm{P, F},$$

$$\frac{1}{|\Lambda|}\|(\delta C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^m\|_1 \leqslant B(a)$$

となることは容易にわかる．また，任意の正数 α, β と $q>1$ に対して，

$$(\alpha+\beta)^q \leqslant (q \text{ のみによる定数}) \times (\alpha^q+\beta^q)$$

であるから，

$$\|h\chi_S+f\|_p{}^p \leqslant (\|h\chi_S\|_p+\|f\|_p)^p$$
$$\leqslant \text{const.}(|S|a^\nu+\|f\|_p{}^p).$$

したがって，S の中に台をもつ f に対して

$$|K_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}(f)| \leqslant \exp[a^\nu|S|C(a)+d\|f\|_p{}^p]. \tag{8.4.20}$$

ここで，$C(a)>0$, $d>0$ は S, Λ によらない定数で，d は a にもよらない．$f_1, \cdots, f_n$ を上のようにとる．このとき，(8.4.2) と Cauchy の評価式により

$$|S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_n)| \leqslant \exp\left[a^\nu|S|C(a)+d\sum_{j=1}^n\|f_j\|_p{}^p\right].$$

そこで，いま，$\|f_j\|_p=1$ $(j=1, \cdots, n)$ とすれば，

$$|S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_n)| \leqslant \exp[a^\nu|S|C(a)+dn].$$

次に，任意の f_j $(\|f_j\|_p \neq 0)$ に対しては，$f_j/\|f_j\|_p$ をこの式に代入すれば，$S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_n)$ の f_j についての多重線形性によって (8.4.19) を得る．∎

次に半 Dirichlet 境界条件に対する Schwinger 関数およびその母汎関数を評価しよう．

補題 8.4.7　$P(X)=Q(X)-hX$, $h \geqslant 0$, $Q(X)$ は下に有界な4次以上の偶多項式，とする．このとき，Λ に台をもつ $f_j \geqslant 0$ $(j=1, \cdots, n)$ に対して

$$S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n) \leqslant S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HP}}(f_1, \cdots, f_n). \tag{8.4.21}$$

証明　$t \in [0,1]$ に対して，$\mathbf{R}^{|\Lambda|}$ 上の測度 $d\mu_0(t)$ を

$$d\mu_0(t) = \exp\frac{1}{2}\Bigg[t\sum_{\substack{|x-y|=a\\ x,y\in\Lambda}}^{\mathrm{P}} a^{\nu-2}\phi(x)\phi(y)+(1-t)\sum_{\substack{|x-y|=a\\ \{x,y\}\subset\Lambda}} a^{\nu-2}\phi(x)\phi(y)$$
$$-(2\nu a^{-2}+m^2a^\nu)\sum_{x\in\Lambda}\phi(x)^2\Bigg]\prod_{x\in\Lambda}d\phi(x)$$

によって定義し，

$$Z(t)=\int d\mu_0(t)e^{-U_\Lambda}$$

$$\langle\cdot\rangle(t)=\frac{\int\cdot\, d\mu_0(t)e^{-U_\Lambda}}{Z(t)}$$

とおく.

$$S(t)\equiv\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle(t),\qquad x_1,\cdots,x_n\in\Lambda$$

とすれば,

$$S(0)=S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n),$$
$$S(1)=S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HP}}(x_1,\cdots,x_n)$$

である. さらに, $S(t)$ は t について微分可能で,

$$\frac{d}{dt}S(t)=\frac{1}{2}\{\langle AB\rangle(t)-\langle A\rangle(t)\langle B\rangle(t)\}.$$

ここで

$$A=\prod_{j=1}^{n}\phi(x_j),$$
$$B=a^{\nu-2}\{\sum_{\substack{|x-y|=a\\ \{x,y\}\subset\Lambda}}^{\mathrm{P}}\phi(x)\phi(y)-\sum_{\substack{|x-y|=a\\ \{x,y\}\subset\Lambda}}\phi(x)\phi(y)\}.$$

期待値 $\langle\cdot\rangle(t)$ に対しても GKS 不等式は成立し, B は $\phi(x)\phi(y)$ の正係数の有限一次結合であるから,

$$\frac{d}{dt}S(t)\geqslant 0$$

を得る. したがって, $S(0)\leqslant S(1)$. ∎

系 8.4.8 $P(X)$ は, 補題8.4.7と同じとし, f, f_j $(j=1,\cdots,n)$ は $C_0(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ の元で, それらの台はすべて $S\subset\Lambda$ に含まれているとする. このとき,

$$|S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)|\leqslant e^{a^\nu|S|C(a)+dn}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_p \tag{8.4.22}$$

$$|K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f)|\leqslant e^{a^\nu|S|C(a)+d\|f\|_p{}^p} \tag{8.4.23}$$

証明 (8.4.22) は, (8.4.21) と $S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$ による. 同様に,

$$\begin{aligned}|K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f)| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(|f|,\cdots,|f|)\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(|f|,\cdots,|f|)\\ &= K_\Lambda{}^{\mathrm{HP}}(-i|f|).\end{aligned}$$

したがって，(8.4.20) から，(8.4.23) を得る．■

定理 8.4.9　$P(X)$ は，補題 8.4.7 と同じとし，f_j $(j=1,\cdots,n)$ は $C_0(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ の元であるとする．このとき，

$$S_n{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)\equiv\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu}S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n) \tag{8.4.24}$$

は存在し，

$$|S_n{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)|\leqslant e^{a^\nu|S|C(a)+dn}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_p \tag{8.4.25}$$

をみたす．ただし，S は

$$S\supset\bigcup_{j=1}^{n}\operatorname{supp}f_j$$

となる任意の有界集合である．

証明

$$S_n{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n)\equiv\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu}S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n),\qquad(x_j\in\Lambda) \tag{8.4.26}$$

の存在がいえれば十分である．(8.4.22) で $f_j(x)=e_{x_j}(x)$ とすれば $(x_1,\cdots,x_n\in S)$,

$$0\leqslant S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n)\leqslant e^{a^\nu|S|C(a)+dn}a^{\nu(1-p)n}$$

であるから，$S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(x_1,\cdots,x_n)$ は，Λ によらない上界をもつ．そして，これは，Λ について単調増加であったから，(8.4.26) は存在する．不等式 (8.4.25) は (8.4.22) で $\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu$ として得られる．■

次に，母汎関数 $K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f)$ の無限体積極限を考えよう．そのために次の補題を必要とする．

補題 8.4.10 (Vitali の定理) $\mathbf{C}^N$ を複素数のつくる N 次元ベクトル空間, D を $\mathbf{C}^N$ の連結開集合とする. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の正則関数の列で次の2つの性質をもつものとする:

(1) D に含まれる任意のコンパクト集合 C 上で一様有界, すなわち,

$$\sup_n(\sup_{z\in C}|f_n(z)|)<\infty.$$

(2) ある $z_0\in D$ とすべての整数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N\geqq 0$ に対して

$$\left.\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N}f_n(z)}{\partial z_1{}^{\alpha_1}\cdots\partial z_N{}^{\alpha_N}}\right|_{z=z_0}$$

は $n\to\infty$ で収束する,

このとき, D 上の正則関数 f が存在して, f_n は D の任意のコンパクト部分集合上, f に一様収束する.

証明 概略だけ述べる*). まず, $\{f_n(z)\}$ の D の各点での収束を示す. そのために, 仮に $\{f_n(z)\}$ が一点 $c\in D$ において収束しないとしよう. 仮定 (1) と Montel の定理によって, $\{f_n\}$ は正規族をなすから, $\{f_n(z)\}$ の任意の部分列は, D で広義一様収束する部分列を含む. したがって,

$$\lim_{k\to\infty}f_{m_k}(c)\neq\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(c) \tag{8.4.27}$$

となる $\{f_n\}$ の部分列 $\{f_{m_k}\},\{f_{n_k}\}$ が存在する. そこでまた $\{f_n\}$ が正規族であることを使えば, $\{f_{m_k}\},\{f_{n_k}\}$ は D で広義一様収束する部分列 $\{f_{m_k'}\},\{f_{n_k'}\}$ を含む. それらの極限関数を $f^{(1)}(z),f^{(2)}(z)$ とすれば, これらはともに D で正則である. 一方, 仮定 (2) は, $f_{m_k'}(z),f_{n_k'}(z)$ の $z=z_0$ における Taylor 展開の係数の極限が等しいことを意味し, したがって, また $f^{(1)}(z),f^{(2)}(z)$ の $z=z_0$ における Taylor 展開の係数は等しい. これは, $z=z_0$ の近傍で

$$f^{(1)}(z)=f^{(2)}(z)$$

であることを意味する (整級数展開の一意性). ゆえに一致の定理によって, D 全体で

$$f^{(1)}(z)=f^{(2)}(z)$$

*) 関数論の用語については, たとえば, 一松信『多変数解析函数論』(培風館, 1960) を参照せよ.

でなければならない．これは，しかし，(8.4.27) と矛盾する．こうして，$\{f_n(z)\}$ は D の各点である関数 $f(z)$ に収束することが示せた．次に，$f_n(z) \to f(z)$ の収束が D で広義一様であることを示そう．いま，仮にそうでないとすれば，あるコンパクト集合 $C \subset D$ で $f_n(z)$ は $f(z)$ に一様収束しない．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| \geqq \varepsilon \tag{8.4.28}$$

となる $\{f_n(z)\}$ の部分列 $\{f_{n_k}(z)\}$ と C 内の点列 $\{z_k\}$ が存在する．$\{f_n\}$ が正規族であることにより，$\{f_{n_k}(z)\}$ の部分列は D で広義一様収束するから，とくに C 上で一様収束する部分列 $\{f_{n_{k'}}(z)\}$ を含む．その極限関数は明らかに $f(z)$ であるから，先の $\varepsilon > 0$ に対して k' が十分大きいならば，

$$\sup_{z \in C} |f_{n_{k'}}(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

これは，(8.4.28) と矛盾する．∎

定理 8.4.11　系 8.4.8 と同じ仮定のもとで，無限体積極限

$$K^{\mathrm{HD}}(f) \equiv \lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu} K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f) \tag{8.4.29}$$

は存在し，

$$\mathbf{C}^n \ni (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \longrightarrow K^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)$$

は解析的である．さらに，

（1）　$|K^{\mathrm{HD}}(f)| \leqq e^{a^\nu |S| C(a) + d\|f\|_p{}^p}$, (8.4.30)

（2）　$S_n{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n) = (-i)^n \dfrac{\partial^n K^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)}{\partial\zeta_1 \cdots \partial\zeta_n}\Bigg|_{\zeta_1 = \cdots = \zeta_n = 0.}$ (8.4.31)

証明　C を $\mathbf{C}^n$ の任意のコンパクト集合とすれば，

$$\sup_{\zeta \in C} |\zeta| = L < \infty$$

となる $L > 0$ が存在するから，系 8.4.8 によって，

$$\left|K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^{n}\zeta_j f_j\right)\right| \leqq \exp\left[a^\nu|S|C(a)+dL^p\left(\sum_{j=1}^{n}\|f_j\|_p\right)^p\right]$$

という形に評価される.

したがって,

$$\left\{K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^{n}\zeta_j f_j\right)\right\}_\Lambda$$

は, $\mathbf{C}^n$ の任意のコンパクト集合上で, Λ に関して一様有界である. さらに, (8.3.19) と定理 8.4.9 を考慮して, 補題 8.4.10 を適用すれば,

$$K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^{n}\zeta_j f_j\right)$$

は $\mathbf{C}^n$ 上で広義一様にある正則関数

$$K^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^{n}\zeta_j f_j\right)$$

に収束する. 不等式 (8.4.30) は, 系 8.4.8 にあたえられた不等式で $\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu$ とすることによって得られる. 等式 (8.4.31) は, (8.3.19), Cauchy の積分公式,

$$K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^{n}\zeta_j f_j\right)$$

の広義一様収束性, および定理 8.4.9 から得られる. ∎

境界条件 (B) = HP, P に対する無限体積極限の存在については:

定理 8.4.12 $P(X)$ は, 補題 8.4.2 と同じとし, (B) = HP, P とする. このとき, 単調増加な有界集合列 $\{\Lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ で $\Lambda_m\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu$ となるものがあって, すべての $f, f_1, \cdots, f_n\in \mathrm{C}_0(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して

$$S_n{}^{(\mathrm{B})}(f_1,\cdots,f_n)=\lim_{m\to\infty}S_{n,\Lambda_m}{}^{(\mathrm{B})}(f_1,\cdots,f_n) \tag{8.4.32}$$

$$K^{(\mathrm{B})}(f)=\lim_{m\to\infty}K_{\Lambda_m}{}^{(\mathrm{B})}(f) \tag{8.4.33}$$

が存在する. さらに,

$$\mathbf{C}^n\ni(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\longrightarrow K^{(\mathrm{B})}\left(\sum_{j=1}^{n}\zeta_j f_j\right)$$

は解析的であり，

$$|K^{(\mathrm{B})}(f)| \leqslant e^{a^\nu |S| C(a) + d\|f\|_p{}^p} \tag{8.4.34}$$

$$S_n{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_n) = (-i)^n \frac{\partial^n K^{(\mathrm{B})}\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)}{\partial\zeta_1 \cdots \partial\zeta_n}\bigg|_{\zeta_1=\cdots=\zeta_n=0} \tag{8.4.35}$$

$$|S_n{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_n)| \leqslant e^{a^\nu |S| C(a) + dn} \prod_{j=1}^n \|f_j\|_p \tag{8.4.36}$$

がなりたつ.

証明　命題 8.4.6 によって，$S_{n,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f_1, \cdots, f_n)$ は，$\mathrm{supp}\, f_j \subset S \subset \Lambda, j = 1, \cdots, n$, ならば，$\Lambda$ について一様に上から評価される．ゆえに対角線論法を用いることにより，Schwinger 関数の収束 (8.4.32) が得られる．$K_\Lambda{}^{(\mathrm{B})}$ の収束は定理 8.4.11 と同様にして証明される．▮

8.5　格子場の正則性と局所観測量の無限体積極限

この節では，無限体積極限の Schwinger 関数とその母汎関数を $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}_a{}^\nu}$ 上の測度を用いて表現する．そのためには，不等式 (8.4.25), (8.4.30) を改良しなければならない．

以下，この節を通じて，

$$P(X) = Q(X) - hX, \qquad h \geqslant 0 \tag{8.5.1}$$

で，$Q(X)$ は下に有界な偶多項式とし，$K^{\mathrm{HD}}(f) \equiv K(f)$, $S_n{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n) \equiv S_n(f_1, \cdots, f_n)$ と書く．

定理 8.5.1　有界な台をもつ f に対して

$$|K(f)| \leqslant \exp\left[C(a)(\|f\|_1 + \|f\|_p{}^p)\right]. \tag{8.5.2}$$

ここで，$C(a)$ は a に依存する定数.

証明　Λ を f の台を含む有界集合として，$K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f)$ に対して (8.5.2) を示せば十分である．$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}} \equiv \langle\cdot\rangle$ とおく．Schwinger 関数の正値性 (8.3.12) によって

$$|\langle e^{\phi(f)}\rangle| \leqslant \langle e^{\phi(|f|)}\rangle$$

であるから，初めから $f \geqslant 0$ として一般性を失わない.

次のように，f を 2 つの部分に分ける：

$$f = g+h,$$

$$g = \sum_{x \in L} f_x, \qquad h = \sum_{x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu \setminus L} f_x.$$

ここで，f_x は

$$f_x(y) = \delta_{xy} f(y), \qquad y \in \mathbf{Z}_a{}^\nu$$

で定義され，L は

$$\|f_x\|_1 + \|f_x\|_p{}^p \leqslant 1, \qquad x \in L$$

$$\|f_x\|_1 + \|f_x\|_p{}^p > 1 \qquad x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu \setminus L$$

となる集合である．Schwarz の不等式を使えば，

$$\langle e^{\phi(f)} \rangle \leqslant (\langle e^{\phi(2g)} \rangle \langle e^{\phi(2h)} \rangle)^{1/2}.$$

定理 8.4.5 と h のとり方により，

$$\langle e^{\phi(2h)} \rangle \leqslant \exp[C(a)(\|h\|_1 + \|h\|_p{}^p)]$$
$$\leqslant \exp[C(a)(\|f\|_1 + \|f\|_p{}^p)]$$

となる．したがって，初めから，f はすべての点 x で

$$\|f_x\|_1 + \|f_x\|_p{}^p \leqslant 1$$

をみたすものとしてよい．恒等式

$$e^x = 1+x+x^2 \int_0^1 \int_0^1 \alpha e^{\alpha\beta x} d\alpha d\beta, \qquad x \in \mathbf{R}^1$$

を使えば，

$$e^{\phi(f)} = \prod_{x \in S} \left\{ 1+\phi(f_x)+\phi(f_x)^2 \int_0^1 \int_0^1 \alpha e^{\alpha\beta\phi(f_x)} d\alpha d\beta \right\}$$

と書ける．ただし，$S \subset \Lambda$ は f の台を表わす．$I, J \subset S$ に対して，

$$F_J = \prod_{x \in J} \phi(f_x),$$

$$G_{I \setminus J} = \prod_{x \in I \setminus J} \phi(f_x)^2 \int_0^1 \int_0^1 \alpha e^{\alpha\beta\phi(f_x)} d\alpha d\beta.$$

とおけば，

$$e^{\phi(f)} = 1 + \sum_{\substack{I \subset S \\ I \neq \phi}} \sum_{J \subset I} F_J G_{I \setminus J}$$

と書ける．ただし，$J = \phi$ のときは，$F_J \equiv G_J \equiv 1$ とする．

$$
\begin{aligned}
&|\langle F_J G_{I\setminus J}\rangle| \\
&\leqslant \left\langle [\prod_{x\in J}\phi(f_x)][\prod_{y\in I\setminus J}\phi(f_y)^2]\left[\prod_{y\in I\setminus J}\int_0^1\int_0^1 \alpha e^{\alpha\beta\phi(f_y)}d\alpha d\beta\right]\right\rangle \\
&\leqslant \langle [\prod_{x\in J}\phi(x)^2][\prod_{y\in I\setminus J}\phi(|f_y|)^4]\rangle^{1/2}\prod_{x\in J}\|f_x\|_1 \\
&\qquad\times\left\{\left(\prod_{y\in I\setminus J}\int_0^1\int_0^1 d\alpha_y d\beta_y\right)\left(\prod_{z\in I\setminus J}\int_0^1\int_0^1 d\alpha_z d\beta_z\right)\right. \\
&\qquad\qquad\left.\times\langle\exp[\phi(\sum_{y\in I\setminus J}\alpha_y\beta_y f_y+\sum_{z\in I\setminus J}\alpha_z\beta_z f_z)]\rangle\right\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

ここで，Schwarz の不等式を用いた．定理 8.4.6 によって

$$
\begin{aligned}
&\langle [\prod_{x\in J}\phi(x)^2][\prod_{y\in I\setminus J}\phi(|f_y|)^4]\rangle^{1/2} \\
&\quad\leqslant e^{a^\nu|I|C(a)/2+d|J|}a^{-|J|\nu(1-1/p)}\prod_{y\in I\setminus J}(e^{2d}\|f_y\|_p{}^2).
\end{aligned}
$$

さらに，定理8.4.5 と $0\leqslant\alpha_x,\beta_x\leqslant 1$ によって

$$
\begin{aligned}
&\langle\exp[\phi(\sum_{y\in I\setminus J}\alpha_y\beta_y f_y+\sum_{z\in I\setminus J}\alpha_z\beta_z f_z)]\rangle \\
&\quad\leqslant \exp[a^\nu|I|C(a)+\text{const.}\sum_{x\in I\setminus J}\|f_x\|_p{}^p]
\end{aligned}
$$

したがって，a に依存する定数 $d(a)>0$ と a に依存しない定数 $c>0$ が存在して

$$
|\langle F_J G_{I\setminus J}\rangle|\leqslant\exp[c\|f\|_p{}^p]\prod_{x\in J}(d(a)\|f_x\|_1)\prod_{y\in I\setminus J}(d(a)\|f_y\|_p{}^2).
$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\langle e^{\phi(f)}\rangle &\leqslant \exp[c\|f\|_p{}^p]\{1+\sum_{I\subset S}\prod_{x\in I}d(a)(\|f_x\|_1+\|f_x\|_p{}^2)\} \\
&\leqslant \exp[c\|f\|_p{}^p]\prod_{x\in \mathbf{Z}_a{}^\nu}\{1+d(a)(\|f_x\|_1+\|f_x\|_p{}^2)\}.
\end{aligned}
$$

仮定によって

$$
\|f_x\|_p{}^2\leqslant\text{const.}\ \|f_x\|_p{}^p
$$

(const. は a に依存する）だから，$d(a)$ をとりなおすことにより，

$$
\langle e^{\phi(f)}\rangle\leqslant\exp[c\|f\|_p{}^p]\prod_{x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu}\{1+d(a)(\|f_x\|_1+\|f_x\|_p{}^p)\}.
$$

不等式

$$1+x \leqslant e^x, \qquad x \in \mathbf{R},$$

と

$$\sum_{x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu} \|f_x\|_q{}^q = \|f\|_q{}^q$$

を用いれば，求める評価式 (8.5.2) を得る．∎

上の定理から，無限体積極限の Schwinger 関数に対して改良された評価を得る．

系 8.5.2 有界な台をもつ $f_1, \cdots, f_n$ に対して

$$|S_n(f_1, \cdots, f_n)| \leqslant C(a) \prod_{j=1}^{n} (\|f_j\|_1 + \|f_j\|_p). \tag{8.5.3}$$

ここで，$C(a) > 0$ は a に依存する定数．

証明 定理 8.5.1, (8.4.27) および Cauchy の積分公式を用いればよい．詳細は読者の演習とする．∎

Schwinger 関数とその母汎関数を $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}_a{}^\nu}$ 上の測度を用いて表現するためには，さらに，いくつか準備を要する．まず，$\mathbf{R}^{\mathbf{Z}_a{}^\nu}$ の部分空間 $\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$, $\mathcal{S}_r{}'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ を次のように定義する：各 $m \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\mathcal{S}_m \equiv \{f = \{f(x)\}_{x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu} \,|\, f(x) \in \mathbf{R},\ \sum_x (1+x^2)^m |f(x)|^2 a^\nu = |\!|\!|f|\!|\!|_m{}^2 < \infty\}$$

とし，

$$\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu) \equiv \bigcap_{m>0} \mathcal{S}_m$$

とする．空間 $\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ は急減少実数列の空間とよばれ，可算ノルム空間をなす．$\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ の双対空間を $\mathcal{S}_r{}'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ とすれば，

$$\mathcal{S}_r{}'(\mathbf{Z}_a{}^\nu) = \bigcup_m \mathcal{S}_m$$

となる；$f \in \mathcal{S}_r{}'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$，$g \in \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ は‘内積’

$$\langle f, g\rangle \equiv \sum_{x\in \mathbf{Z}_a{}^\nu} f(x)g(x)a^\nu$$

によって互いに双対的になる．また，

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbf{Z}_a{}^\nu) \equiv \{g+ih \mid g, h\in \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)\}$$

とおく．以下，単に $\mathcal{S}_r \equiv \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$，$\mathcal{S}_r' = \mathcal{S}_r'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ などと書く．

$\mathcal{S}_r'$ 上の筒集合 σ-加法族は，各 $g\in \mathcal{S}_r$ に対して，汎関数 $f \longrightarrow \langle f, g\rangle$ が可測となるような最小の σ-加法族として定義される．筒集合 σ-加法族に関する，$\mathcal{S}_r'$ 上の確率測度の存在について，次の定理がある．

定理 8.5.3（$\mathcal{S}_r'$ に対する Minlos の定理）*)　$C(\cdot)$ を $\mathcal{S}_r$ 上の汎関数としよう．このとき，

$$C(g) = \int_{\mathcal{S}'_r} e^{i\langle f,g\rangle} d\mu(f), \quad g\in \mathcal{S}_r$$

となる $\mathcal{S}_r'$ 上の，筒集合 σ-加法族に関する確率測度 $d\mu$ が存在するための必要十分条件は，$C(\cdot)$ が次の3つの条件をみたすことである：

（1）　$C(0) = 1$.

（2）　$C(\cdot)$ は正定値である．すなわち任意の $z_1, \cdots, z_n \in \mathbf{C}$ と $g_1, \cdots, g_n \in \mathcal{S}_r$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{z}_i z_j C(g_i - g_j) \geqq 0.$$

（3）　$\mathcal{S}_r$ の位相で $g \longrightarrow C(g)$ は連続である．

先に進む前に，次の事実を注意しておこう．

系 8.5.4　$K(f), S_n(f_1, \cdots, f_n)$ はそれぞれ，$\mathcal{S}$ 上の汎関数，$\mathcal{S}\times\cdots\times\mathcal{S}$（$\mathcal{S}$ の n 個の直積）上の多重線形汎関数に一意的に拡張される．その拡張も同じ記号で書くことにすると，$f\in\mathcal{S}$ として，不等式 (8.5.2)，(8.5.3) が成立する．

証明　f, g を有界な台をもつ $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ 上の関数とすれば，$f, g\in\mathcal{S}$ であって，

$$|K(f) - K(g)| \leqq \lim_{\Lambda\nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu} \langle |e^{\phi(f)} - e^{\phi(g)}|\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$$

---

*)　証明は，Simon (1979)，第1章，または Gel'fand and Vilenkin (1964)，第4章．x 軸上の確率分布という初等的な場合の対応する定理（Bochner の定理）について江沢（1987）を参照．

$$\leqslant \lim_{\Lambda\nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu} \langle (e^{\phi(\mathrm{Re} f)}+e^{\phi(\mathrm{Re} g)})|\phi(f)-\phi(g)|\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$$

$$\leqslant \lim_{\Lambda\nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu} (\langle (e^{\phi(\mathrm{Re} f)}+e^{\phi(\mathrm{Re} g)})^2\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}})^{1/2}(\langle \phi(f-g)\phi(\bar{f}-\bar{g})\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}})^{1/2}$$

$$=\{K(2\mathrm{Re}\, f)+K(2\mathrm{Re}\, g)+2K(\mathrm{Re}\, f+\mathrm{Re}\, g)\}^{1/2}S_2(f-g,\bar{f}-\bar{g})^{1/2}.$$

ここで，2番目の不等式は，

$$|e^{z_1}-e^{z_2}|\leqslant |z_1-z_2|(e^{\mathrm{Re}\, z_1}+e^{\mathrm{Re}\, z_2}), \qquad z_1, z_2\in \mathbf{C}$$

により，3番目の不等式は Schwarz の不等式による．定理 8.5.1 と系 8.5.2 によって，ある定数 $c_1(a), c_2(a)$ があって

$$|K(f)-K(g)|\leqslant e^{c_1(a)\{\|f\|_1+\|g\|_1+\|f\|_p{}^p+\|g\|_p{}^p\}}c_2(a)(\|f-g\|_1+\|f-g\|_p).$$

各 $q\geqslant 1$ に対して，ある $\mathcal{S}$ のノルム $|||\cdot|||$ が存在して，$\|f\|_q\leqslant |||f|||$ となるから，上式は，$K(f)$ が f について $\mathcal{S}$ の位相で連続であることを示している．有界な台をもつ関数は $\mathcal{S}$ で稠密だから，したがって，$K(f)$ は，$\mathcal{S}$ 上の汎関数に一意的に拡張される．S_n については，その多重線形性と系 8.5.2 を用いて，同様の議論をすればよい．$f\in\mathcal{S}$ として，不等式 (8.5.2), (8.5.3) が成立するのは，拡張の連続性による．∎

いよいよ，この節の目的とする結果を述べることができる．

定理 8.5.5 $\mathcal{S}_r{}'$ 上の確率測度 $d\mu$ が存在して

$$K(f)=\int e^{i\phi(f)}d\mu, \qquad f\in\mathcal{S} \tag{8.5.4}$$

$$S_n(f_1,\cdots,f_n)$$
$$=\int \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)d\mu, \qquad f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S},\ n=1,2,\cdots, \tag{8.5.5}$$

$$=(-i)^n\frac{\partial^n K\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)}{\partial\zeta_1\cdots\partial\zeta_n}\Bigg|_{\zeta_1=\cdots=\zeta_n=0.} \tag{8.5.6}$$

と書ける．

証明 $K(f)$ は $\mathcal{S}_r$ 上の汎関数で，Minlos の定理における3つの条件をすべてみたす．特に $f\longrightarrow K(f)$ の連続性は系 8.5.4 の証明と同様にして示される．したがって，$\mathcal{S}_r{}'$ 上の確率測度 $d\mu$ が存在して，

$$K(f)=\int e^{i\phi(f)}d\mu, \qquad f\in\mathcal{S}_r, \tag{8.5.7}$$

と書ける．有界な台をもつ $f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}_r$ と $t_1,\cdots,t_n\in\mathbf{R}$ に対して，

$$K\left(\sum_{j=1}^{n}t_jf_j\right)$$

は $t_1,\cdots,t_n$ について解析的であったから，(8.5.7) によって

$$(-i)^n\frac{\partial^n K\left(\sum_{j=1}^{n}t_jf_j\right)}{\partial t_1\cdots\partial t_n}\Bigg|_{t_1=\cdots=t_j=0}=\int\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)d\mu$$

が成立する．したがって，(8.4.31) を考慮すれば，(8.5.6) を得る．このとき，S_n の多重線形性と $\mathcal{S}$ の位相での連続性によって，(8.5.6) はすべての $f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}$ まで拡張される．Schwinger 関数に対する評価式を使えば $f\in\mathcal{S}$ に対して，

$$\int e^{|\phi(f)|}d\mu<\infty$$

となるから，Lebesgue の収束定理により，

$$\int e^{\phi(f)}d\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S_n(f,\cdots,f).$$

有界な台をもつ f に対しては，(8.4.31) によって，右辺は $K(f)$ に等しい．ゆえに，(8.5.4) を得る．そして，$f\in\mathcal{S}$ に対しては，連続性を用いて拡大される．(8.5.7) は，K と S_n に対する評価式を使えば，

$$(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}_n\longrightarrow K\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_jf_j\right)\qquad f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}$$

は解析的であり，微分と積分の順序が交換できることがわかるので，これからただちに得られる．∎

$\mathcal{S}_r'$ を $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}_a{}^\nu}$ の部分空間と見れば，上の定理の測度 $d\mu$ は $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}_a{}^\nu}$ 上の測度で，その台が $\mathcal{S}_r'$ 上にあるものとみなせる．このことと定理 8.4.9, 8.4.11 を考慮すれば，$d\mu$ はこの章の初めに述べた形式的な測度 (8.1.1) に対応する測度と考えることができる．

次に‘局所観測量’に対する無限体積極限の存在を示しておこう．格子上の $P(\phi)_\nu$ モデルに対しては

$$\mathrm{A}^{\mathrm{F}} = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{P}_f(\mathbf{Z}_a{}^\nu)} \mathrm{A}_\Lambda, \qquad \mathrm{A}_\Lambda = \mathrm{C}(\dot{\mathbf{R}}^{|\Lambda|}) \tag{8.5.8}$$

が局所観測量の代数をあたえる（第5章参照）．

定理 8.5.6 $f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{C}_0(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ を実数値関数，F を $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数で，定数 $\alpha_j > 0$ $(j=1, \cdots, n)$ と $c > 0$ があって

$$|F(t_1, \cdots, t_n)| \leqslant c \prod_{j=1}^{n} \exp[\alpha_j |t_j|] \tag{8.5.9}$$

をみたすものとする．このとき

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu} \langle F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}} = \int F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) d\mu \tag{8.5.10}$$

証明 まず，$F \in \mathrm{C}_0{}^\infty(\mathbf{R}^n)$ の場合を考える．このとき，Fourier 変換により，

$$F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = (2\pi)^{-n/2} \int dp_1 \cdots dp_n \hat{F}(p_1, \cdots, p_n) \exp\left[i\phi\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f_j\right)\right].$$

したがって，

$$\langle F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}} = (2\pi)^{-n/2} \int dp_1 \cdots dp_n \hat{F}(p_1, \cdots, p_n) K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f_j\right).$$

ここで，$\langle \cdot \rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$ を定義する測度積分と

$$\int dp_1 \cdots dp_n$$

の積分の順序交換を行なったが，これは，

$$\left|\exp\left[i\phi\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f_j\right)\right]\right| = 1$$

であることにより，問題はない．そこで，

$$\left|K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j f_j\right)\right| \leqslant 1$$

に注意し，$K_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$ の収束性，および Lebesgue の収束定理 (dominated convergence theorem) を用いれば (8.5.10) を得る．次に，F を (8.5.9) をみたすものとすれば，$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ の関数列 $\{F_m\}$ で

$$|(F_m-F)(t_1,\cdots,t_n)| \leqslant \frac{c}{m}\prod_{j=1}^{n}\exp[(\alpha_j+1)|t_j|] \tag{8.5.11}$$

をみたすものがとれる*)．(8.5.2) によって，

$$\left\langle \prod_{j=1}^{n}\exp[(\alpha_j+1)|\phi(f_j)|] \right\rangle_\Lambda^{\mathrm{HD}}$$

は Λ について一様有界であるから，$F\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ の場合の結果と '$\varepsilon/3$ 論法' を使えば，(8.5.10) を得ることができる．■

系 8.5.7　任意の $A\in \mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ に対して

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu}\langle A\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}} = \int A d\mu. \tag{8.5.12}$$

証明　$A\in\mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ ならば，$A\in\mathsf{A}_\Lambda$ となる有界な $\Lambda\subset\mathbf{Z}_a{}^\nu$ が存在し，

$$A = A(\phi(x_{i_1}),\cdots,\phi(x_{i_{|\Lambda|}}))\qquad \{i_1,\cdots,i_{|\Lambda|}\} = \Lambda$$

という形をもつ．$A(t_1,\cdots,t_{|\Lambda|})$ は $\dot{\mathbf{R}}^{|\Lambda|}$ 上の連続関数であるから，$\mathbf{R}^{|\Lambda|}$ 上で有界である．したがって，$n=|\Lambda|, F=A$ として (8.5.9) で $\alpha_j=0\ (j=1,\cdots,|\Lambda|)$ の場合を適用すれば，定理 8.5.6 から (8.5.12) を得る．■

8.6　無限系のいくつかの性質

この節では，前節までに得られた，$P(\phi)_\nu$ 格子場の無限体積極限のいくつかの基本的な性質を調べる．

最初に述べたように，$P(\phi)_\nu$ 格子場は，非有界な格子スピン系のひとつのモデルと考えられるので，統計力学の言葉を使って，その性質を述べるのが便利である．

---

*)　まず，有界な台をもつ連続関数 $F_m{}^{(1)}$ で，$\mathrm{supp}\,F_m{}^{(1)}\subset[-m-1,m+1]$，$[-m,m]^n$ 上で $F_m{}^{(1)}=F$，それ以外の点で $|F_m{}^{(1)}|\leqslant|F|$，という性質をみたすものによって，(8.5.11) がなりたつよう F を近似する．次に，$F_m{}^{(1)}$ を Friedrichs の軟化演算子を用いて，C_0^∞ の関数で近似すればよい．

この節を通して，$P(X)$ は (8.5.1) の型であるとし，$\beta>0$ をパラメータとして*)

$$\langle\cdot\rangle_{\Lambda,\beta}{}^{\mathrm{HD}}=\frac{\int\cdot\, e^{-\beta H_\Lambda}d\Phi_{0,\Lambda}}{\int e^{-\beta H_\Lambda}d\Phi_{0,\Lambda}} \tag{8.6.1}$$

とおく．ここで，$d\Phi_{0,\Lambda}$，H_Λ は，それぞれ，(8.3.29)，(8.3.28) であたえられる．$\beta=1$ のときが前節までに考えた半 Dirichlet 条件の状態であるが，$\beta\neq 1$ の場合も $\beta=1$ のときとまったく同様であり，前節までの結果がすべて成立する．状態 $\langle\cdot\rangle_{\Lambda,\beta}{}^{\mathrm{HD}}$ の無限体積極限を $\langle\cdot\rangle_\beta$ と書き，対応する $\mathcal{S}_r{}'$ 上の確率測度を μ_β としよう：

$$\langle\cdot\rangle_\beta=\int\cdot\, d\mu_\beta. \tag{8.6.2}$$

定理 8.6.1 測度 μ_β は並進不変である．すなわち，任意の $A\in\mathsf{A}$ と $b\in\mathbf{Z}_a{}^\nu$ に対して

$$\langle\tau_b A\rangle_\beta=\langle A\rangle_\beta. \tag{8.6.3}$$

ただし，A は‘準局所観測量の代数’で

$$\mathsf{A}=\mathsf{C}(\Omega),\qquad \Omega=\prod_{x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu}\dot{\mathbf{R}}_x\quad(\dot{\mathbf{R}}_x=\dot{\mathbf{R}},\forall x) \tag{8.6.4}$$

によって定義される（第5章参照）．さらに，$h=0$ ならば，変換

$$\phi\in\mathcal{S}_r{}'\longrightarrow-\phi\in\mathcal{S}_r{}'$$

に対して μ_β は不変である．

証明 A^{F} は A で稠密であるから，任意の $A\in\mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ に対して (8.6.3) を示せば十分である．$A\in\mathsf{A}^{\mathrm{F}}$ ならば，ある有界な Λ があって，$A\in\mathsf{A}_\Lambda$ となる．$\Lambda\subset\Lambda'$ となる任意の Λ' に対して，H_Λ の並進不変性により，

$$\langle\tau_b A\rangle_{\Lambda'+b,\beta}{}^{\mathrm{HD}}=\langle A\rangle_{\Lambda',\beta}{}^{\mathrm{HD}}$$

がなりたつ．そこで，$\Lambda'\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu$ とすれば，(8.6.3) を得る．$h=0$ のときは，仮定によって，$d\Phi_{0,\Lambda}{}^h$ は偶測度であり，$H_\Lambda(\phi)=H_\Lambda(-\phi)$ であるから，

---

*) $\beta\equiv\dfrac{1}{kT}$ (k: Boltzmann 定数) によって，絶対温度 T と結びつく．

$$\langle A(-\phi)\rangle_{\Lambda',\beta}{}^{\mathrm{HD}} = \langle A(\phi)\rangle_{\Lambda',\beta}{}^{\mathrm{HD}}$$

となる．$\Lambda' \nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu$ として

$$\langle A(-\phi)\rangle_\beta = \langle A(\phi)\rangle_\beta$$

を得る．∎

系 8.5.4 と Schwartz の核定理によって，無限体積極限の n 点 Schwinger 関数 S_n は $\mathcal{S}'(\mathbf{Z}_a{}^{n\nu})$ の元に一意的に拡張され，その拡張を $\tilde{S}_n$ と書けば，

$$\tilde{S}_n(f_1\otimes\cdots\otimes f_n) = S_n(f_1, \cdots, f_n)$$

が成立する*)．ここで，$f_1\otimes\cdots\otimes f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{Z}_a{}^{n\nu})$ は

$$(f_1\otimes\cdots\otimes f_n)(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$$

で定義される．以後，$\tilde{S}_n = S_n$ と書く．

定理 8.6.2

（1） 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbf{Z}_a{}^{n\nu})$ に対して

$$\overline{S_n(f)} = S_n(\bar{r}f) \tag{8.6.5}$$

ただし，$\bar{r}f$ は (8.3.32) によってあたえられる．

（2） すべての $\beta > 0$ に対して $\langle\cdot\rangle_\beta$ は鏡映正値的である．特に，$f_0 \in \mathbf{C}$, $f_1 \in \mathcal{S}^+(\mathbf{Z}_a{}^\nu), \cdots\cdots, f_n \in \mathcal{S}^+(\mathbf{Z}_a{}^{n\nu})$ に対して，

$$\sum_{n,m=0}^{\text{有限}} S_{n+m}(\bar{r}f_n\otimes f_m) \geqslant 0 \tag{8.6.6}$$

が成立する．ただし，$\mathcal{S}^+(\mathbf{Z}_a{}^{n\nu})$ は，$\mathcal{S}(\mathbf{Z}_a{}^{n\nu})$ の関数のうちでその台が

$$\{(t_1, x_1, \cdots\cdots, t_n, x_n) \mid (t_j, x_j) \in \mathbf{Z}_a{}^\nu,\ 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n\}$$

に含まれるものの全体を表わす．

証明　(8.6.5) は定理 8.3.6-(1) で $\Lambda \nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu$ とし $f \in C_0(\mathbf{Z}_a{}^{n\nu})$ を $f \in \mathcal{S}(\mathbf{Z}_a{}^{n\nu})$ に連続性によって拡張して得られる．

(2) は，$\langle\cdot\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$ の鏡映正値性と定理 8.3.6 (2) による．∎

状態 $\langle\cdot\rangle_\beta$ に関する相関不等式に対しては：

定理 8.6.3　$\langle\cdot\rangle_\beta$ に対して，GKS, FKG, GHS, Lebowitz の不等式がなりたつ．

*) いまの場合，S_n は β に依存するが，β を添字としてつけるのは省略する．

証明 第7章の結果の応用によって，$\langle\cdot\rangle_{\Lambda,\beta}{}^{\mathrm{HD}}$ に対して定理の主張が成立し，$\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu$ としても，不等式はそのままの形を保つ．∎

相転移に関連した性質として：

定理 8.6.4 $\nu\geqslant 3$, $h=0$ のとき，ある $\beta_0>0$ が存在して $\beta\geqslant\beta_0$ ならば，状態 $\langle\cdot\rangle_\beta$ はエルゴード的ではない．

証明 定理6.4.9による．∎

次に，測度 μ_β に対する‘方程式’を導こう．まず，有界集合 Λ とその外領域 Λ^c にあるスピン（＝格子場）の相互作用エネルギーを

$$W_{\Lambda,\Lambda^c}\equiv\lim_{\Lambda'\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu}\{H_{\Lambda'}-(H_\Lambda+H_{\Lambda'\setminus\Lambda})\} \tag{8.6.7}$$

によって定義する．実際，右辺が Ω の各点ごとに存在し，Λ の境界付近の格子場のみに依存することは明らかであろう．

定理 8.6.5 任意の有界な Λ に対して Ω_{Λ^c} 上の有限測度 $d\rho_{\Lambda^c}$ が存在して

$$\langle A\rangle_\beta=\int d\Phi_{0,\Lambda}e^{-\beta H_\Lambda}\int d\rho_{\Lambda^c}Ae^{-\beta W_{\Lambda,\Lambda^c}},\qquad A\in\mathsf{A} \tag{8.6.8}$$

となる．

証明 $\Lambda\subset\Lambda_1$ となる任意の Λ_1 をとり，$A\in\mathsf{A}_{\Lambda_1}$ に対して示せば十分である．Λ' $(\Lambda_1\subset\Lambda')$ を

$$W_{\Lambda,\Lambda^c}=H_{\Lambda'}-(H_\Lambda+H_{\Lambda'\setminus\Lambda})$$

となるよう十分大きくとる．このとき，

$$\langle A\rangle_{\Lambda',\beta}=\frac{\displaystyle\int d\Phi_{0,\Lambda}e^{-\beta H_\Lambda}\langle Ae^{-\beta W_{\Lambda,\Lambda^c}}\rangle_{\Lambda'\setminus\Lambda,\beta}}{\displaystyle\int d\Phi_{0,\Lambda}e^{-\beta H_\Lambda}\langle e^{-\beta W_{\Lambda,\Lambda^c}}\rangle_{\Lambda'\setminus\Lambda,\beta}}$$

と書ける．前節と同様にして，Ω_{Λ^c} 上の確率測度 $\tilde\rho_{\Lambda^c}$ が存在して，

$$\lim_{\Lambda'\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu}\langle Ae^{-\beta W_{\Lambda,\Lambda^c}}\rangle_{\Lambda'\setminus\Lambda,\beta}=\int d\tilde\rho_{\Lambda^c}Ae^{-\beta W_{\Lambda,\Lambda^c}}$$

となる．そこで，

$$d\rho_{\Lambda^c}=\frac{d\tilde{\rho}_{\Lambda^c}}{\int d\Phi_{0,\Lambda}e^{-\beta H_\Lambda}\int d\tilde{\rho}_{\Lambda^c}e^{-\beta W_{\Lambda,\Lambda^c}}}$$

とおけば，これは，Ω_{Λ^c} 上の有限な測度であって，Lebesgue の収束定理によって（前節と同じ方法で，

$$|\langle Ae^{-\beta W_{\Lambda,\Lambda^c}}\rangle_{\Lambda'\setminus\Lambda,\beta}|$$

は，Λ' によらない関数で

$$\exp[-\beta H_\Lambda]d\Phi_{0,\Lambda}$$

について可積分なものによって抑えられる)，(8.6.8) を得る．∎

等式 (8.6.8) は，$A\in\mathsf{A}_\Lambda$ のときを考えれば，わかるように，状態 $\langle\cdot\rangle_\beta$ を A_Λ に制限したものは，$d\Phi_{0,\Lambda}$ について絶対連続である．さらに，'外部境界条件のハミルトニアン' $H_{\Lambda,\tau}{}^{\mathrm{ex}}$ $(\tau\in\Omega_{\Lambda^c})$ を

$$\begin{aligned}H_{\Lambda,\tau}{}^{\mathrm{ex}}(\omega)&\equiv H_\Lambda(\omega)+W_{\Lambda,\Lambda^c}(\omega,\tau)\\&=\lim_{\Lambda'\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu}[H_{\Lambda'}(\omega\times\tau)-H_{\Lambda'\setminus\Lambda}(\tau)],\qquad\omega\in\Omega_\Lambda,\end{aligned}$$

によって定義し，

$$\begin{aligned}\hat{W}(\omega,\omega'\times\tau)&=H_{\Lambda,\tau}{}^{\mathrm{ex}}(\omega)-H_{\Lambda,\tau}{}^{\mathrm{ex}}(\omega'),\qquad\omega,\omega'\in\Omega_\Lambda,\ \ \tau\in\Omega_{\Lambda^c}\\\hat{\rho}(\omega,d\tau)&=e^{-\beta H_{\Lambda,\tau}{}^{\mathrm{ex}}(\omega)}d\rho_{\Lambda^c}(\tau)\end{aligned}$$

とすれば，

$$\hat{\rho}(\omega,d\tau)=e^{-\beta\hat{W}(\omega,\omega'\times\tau)}\hat{\rho}(\omega',d\tau)$$

$$\langle A\rangle_\beta=\int_{\Omega_\Lambda}d\Phi_{0,\Lambda}(\omega)\int_{\Omega_{\Lambda^c}}A(\omega\times\tau)\hat{\rho}(\omega,d\tau)\tag{8.6.9}$$

と書ける．これは，DLR 方程式（定義 5.5.4）にほかならない．すなわち，測度 μ_β は DLR 方程式をみたす．

ところで，非有界スピン系の場合には，有界スピン系の議論（第5章参照）が，一般には成立しない．そこで，非有界スピン系の平衡状態は DLR 方程式を用いて定義するのが普通である．下に有界な多項式 P があたえられると $d\Phi_{0,\Lambda}$ が一意的に定まり，したがって DLR 方程式 (8.6.9) を定義することができる．そこで，方程式 (8.6.9) を **P から定まる DLR 方程式**，あるいは，

$P(\phi)_\nu$ 格子場の状態方程式とよび，その解を **$P(\phi)_\nu$ モデルの平衡状態**という．ここで強調しておきたいことは，DLR 方程式自体は，その解の有無にかかわらず，アプリオリにあたえられるということであり，したがって，$P(\phi)_\nu$ モデルを特徴づけるひとつの方程式として使うことができるということである．そして，8.2節から8.5節までに行なってきたことは，P から定まる DLR 方程式のひとつの解の構成であると見ることができる．

非有界スピン系の統計力学のさらに詳しい理論については，Lebowitz and Presutti (1976), Cassandro 他 (1978) を参照せよ．

8.7 汎関数微分方程式による $P(\phi)_\nu$ 格子場理論の特徴づけ

この節では，$P(\phi)_\nu$ 格子場理論を無限次元空間上の汎関数微分方程式を用いて特徴づけることを考える．

$$F : \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu) \longrightarrow \mathbf{C}$$

を $\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ 上の汎関数としよう．このとき，ある

$$DF : \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$$

が存在して，すべての $f, g \in \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(f+\varepsilon g)-F(f)}{\varepsilon} = \langle DF(f), g\rangle \tag{8.7.1}$$

がなりたつならば，F は $\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ 上で汎関数微分可能であるという．ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は

$$\langle \phi, g\rangle = \sum_{x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu} a^\nu \phi(x) g(x), \qquad \phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{Z}_a{}^\nu),\ \ g \in \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu) \tag{8.7.2}$$

であたえられる．$DF(f) \in \mathcal{S}'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ は存在すれば，一意的であることは明らかである．$DF(f)$ を F の導汎関数とよび，その核 (kernel) を

$$DF(f)(x) \equiv \frac{\delta F(f)}{\delta f(x)} \tag{8.7.3}$$

と書く．同様に，ある

$$D^2F : \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{Z}_a{}^{2\nu})$$

が存在して，すべての $f, g, h \in \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\langle DF(f+\varepsilon h), g\rangle - \langle DF(f), g\rangle}{\varepsilon} = \langle D^2F(f), h\otimes g\rangle \qquad (8.7.4)$$

となるとき，F は $\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ 上で2回汎関数微分可能であるといい，$D^2F(f)$ を F の2階の導汎関数とよぶ．以下同様にして，n 階の導汎関数

$$D^nF : \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{Z}_a{}^{n\nu})$$

が定義され，その核を

$$D^nF(f)(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\delta^n F(f)}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}, \quad x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{Z}_a{}^{n\nu}, \qquad (8.7.5)$$

と書く．もし，$\langle D^nF(f), g_1\otimes\cdots\otimes g_n\rangle$ が任意の $g_1, \cdots, g_n \in \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ に対して，f の汎関数として連続ならば，$\delta^nF(f)/\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)$ は，$x_1, \cdots, x_n$ の任意の置換について対称であることは容易にわかる．$\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ 上の汎関数を一般的に扱う場合は，この性質を仮定しておく．

n 階の汎関数微分演算子 $\delta^n/\delta f(x)^n$ に対して，$:\delta^n/\delta f(x)^n:$ を

$$:\frac{\delta^n}{\delta f(x)^n}: = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!\,(n-2k)!}\left(-\frac{1}{2}C_a(x, x)\right)^k \frac{\delta^{n-2k}}{\delta f(x)^{n-2k}}, \qquad (8.7.6)$$

によって定義する．ここで $C_a(x, y)$ は，$(-\varDelta_a+m^2)^{-1}$ の核である．任意の多項式 P に対して，次の汎関数微分方程式を考える：

$$\left.\begin{aligned} (-\varDelta_a+m^2)(-i)\frac{\delta F(f)}{\delta f(x)} &= if(x)F(f) - :P'\left(-i\frac{\delta}{\delta f(x)}\right): F(f), \\ F(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (8.7.7)$$

ここで，未知汎関数 F は $\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ 上の汎関数であり，P' は P の多項式としての微分を表わす．

以下，半 Dirichlet 条件の無限体積極限の母汎関数が方程式 (8.7.7) をみたすことを示そう．

補題 8.7.1　$\langle\cdot\rangle$ を半 Dirichlet 条件の無限体積極限の状態とし，$f_1, \cdots, f_n$, $f \in \mathcal{S}(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} &\langle e^{i\phi(f)}\phi((-\varDelta_a+m^2)f_1)\phi(f_2)\cdots\phi(f_n)\rangle \\ &= \langle[i\langle f_1, f\rangle - \langle f_1, :P'(\phi):\rangle]e^{i\phi(f)}\phi(f_2)\cdots\phi(f_n)\rangle \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n}\langle f_1, f_j\rangle\langle e^{i\phi(f)}\phi(f_2)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_n)\rangle. \end{aligned} \qquad (8.7.8)$$

ここで，記号 $\widehat{\phi(f_j)}$ は $\phi(f_j)$ を除くことを意味する．

証明 評価式 (8.5.2) と (8.5.3) が成立しているので，(8.7.8) は，$f_1, \cdots, f_n, f \in C_0(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ の場合に示されれば十分である（$C_0(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ は $\mathcal{S}(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ で稠密であることに注意）．Λ を十分大きくとれば，

$$\operatorname{supp} f_j,\ \operatorname{supp} f \subset \Lambda, \qquad j = 1, \cdots, n,$$
$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp} f_1, \Lambda^c) \gg 1.$$

にできる（dist (A, B) は集合 A と B の距離を表わす）．このとき，$\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}} f_1 = \Delta_a f_1$ であり，

$$\begin{aligned}
&\langle e^{i\phi(f)}\phi((-\beta\Delta_a+m^2)f_1)\phi(f_2)\cdots\phi(f_n)\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}} \\
&= (Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}})^{-1}\int\prod_{x\in\Lambda}d\phi(x)\phi(f_2)\cdots\phi(f_n)\exp[i\phi(f)-\sum_{x\in\Lambda}:P(\phi(x)):a^\nu] \\
&\quad\times\left\{-\sum_{x\in\Lambda}f_1(x)\frac{\partial}{\partial\phi(x)}\exp\left[-\frac{1}{2}\langle\phi,\ (-\mathbf{Z}_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}+m^2)\phi\rangle\right]\right\} \\
&= \langle[i\langle f_1, f\rangle-\langle f_1,\ :P'(\phi):\rangle]e^{i\phi(f)}\phi(f_2)\cdots\phi(f_n)\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}} \\
&\quad+\sum_{j=2}^{n}\langle f_1, f_j\rangle\langle e^{i\phi(f)}\phi(f_2)\cdots\widehat{\phi(f_j)}\cdots\phi(f_n)\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}.
\end{aligned}$$

ここで，各 $d\phi(x)$ について部分積分を遂行した．そこで，$\Lambda \nearrow \mathbf{Z}_a{}^\nu$ として，(8.7.8) を得る．∎

等式 (8.7.8) は，$\langle\cdot\rangle$ に対応する確率測度 μ についての部分積分公式である．

定理 8.7.2 母汎関数

$$K(f) = \langle e^{i\phi(f)}\rangle \qquad f \in \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu) \tag{8.7.9}$$

は，無限回汎関数微分可能であり，P を (8.5.1) の型として方程式 (8.7.7) をみたす．さらに，Schwinger 関数は

$$S_n(x_1, \cdots, x_n) = (-i)^n\frac{\delta^n K(f)}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}\bigg|_{f=0} \tag{8.7.10}$$

としてあたえられる．

証明 任意の $f, g \in \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K(f+\varepsilon g)-K(f)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle e^{i\phi(f)}\frac{(e^{i\varepsilon\phi(g)}-1)}{\varepsilon}\right\rangle$$
$$=i\langle e^{i\phi(f)}\phi(g)\rangle.$$

ここで，Lebesgue の収束定理を用いた．(8.5.3) により，上式右辺は，f を固定するとき，g について $\mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a^\nu)$ の位相で連続であり，しかも線形である．ゆえに，$K(f)$ は，汎関数微分可能であり，

$$\frac{\delta K(f)}{\delta f(x)}=i\langle e^{i\phi(f)}\phi(x)\rangle. \tag{8.7.11}$$

がなりたつ．同様にして，$K(f)$ は無限回汎関数微分可能であることが示され，その n 階の導汎関数は

$$\frac{\delta^n K(f)}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}=i^n\langle e^{i\phi(f)}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle,$$
$$x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{Z}_a^\nu, \tag{8.7.12}$$

であたえられる．一方，(8.7.8) で $n=1$ の場合を考えると，

$$\langle e^{i\phi(f)}(-\Delta_a+m^2)\phi(x)\rangle=if(x)K(f)-\langle e^{i\phi(f)}:P'(\phi(x)):\rangle$$
$$=if(x)K(f)-:P'\left(-i\frac{\delta}{\delta f(x)}\right):K(f)$$

ここで，(8.7.12) を用いた．ゆえに，(8.7.11) と合わせて，$K(f)$ は方程式 (8.7.7) をみたす．(8.7.10) は (8.7.12) による．■

方程式 (8.7.7) は，場の量子論で **Schwinger-Dyson 方程式**と呼ばれているものの，いわば，'離散版' である (9.13 節を参照)．こうして，母汎関数 $K(f)$ は，Schwinger-Dyson 方程式のひとつの解としてとらえることができ，したがって，8.2 節から 8.4 節までに行なったことは，Schwinger-Dyson 方程式のひとつの解の構成法であるとみることができたことになる．

Schwinger-Dyson 方程式を用いると，Schwinger 関数に対する方程式系 (無限連鎖系) を容易に得ることができる．たとえば，$P(X)=\lambda X^4/4$, $\lambda\geqslant 0$, ならば，$n\geqslant 1$ に対して，

$$(-\Delta_{a,x}+m^2)S_{n+1}(x,x_1,\cdots,x_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \delta_{xx_k} S_{n-1}(x_1, \cdots, \widehat{x_k}, \cdots, x_n) \\
&\qquad -\lambda S_{n+3}(x, x, x, x_1, \cdots, x_n) \\
&\qquad +3\lambda C_a(x, x) S_{n+1}(x, x_1, \cdots, x_n) \qquad (8.7.13)
\end{aligned}
$$

が成立する（問題 8.2).

Schwinger-Dyson 方程式と DLR 方程式は互いに関係している．詳細は省略するが，ごく大ざっぱにいうと，$\beta=1$ として，DLR 方程式にしたがう測度を ρ とするとその特性汎関数

$$
F(f) = \int e^{i\phi(f)} d\rho, \qquad f \in \mathcal{S}_r(\mathbf{Z}_a^\nu),
$$

が Schwinger-Dyson 方程式にしたがうということである．もちろん，これを厳密に証明するには，測度 ρ についてある条件が必要となる．この意味で

DLR 方程式 $\Longrightarrow$ Schwinger-Dyson 方程式

という図式がなりたつ．しかし，逆の関係も成立するかどうかは，まだよくわかっていない．

●演習問題

8.1 (8.2.5)-(8.2.7) であたえられる，有界領域 $\Lambda \subset \mathbf{Z}_a^\nu$ における測度 $d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}$ ((B) = F, P, D) の特性汎関数

$$
K_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f) = \int d\mu_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})} e^{i\phi(f)}
$$

に対して

$$
\lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{Z}_a^\nu} K_{0,\Lambda}{}^{(\mathrm{B})}(f) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle f, (-\Delta_a+m^2)^{-1} f\rangle\right]
$$

がなりたつことを証明せよ．ここで，f は $\mathbf{Z}_a^\nu$ 上の有界な台をもつ任意の実数値関数とする．この結果は，(8.1.1) であたえられる形式的測度が，$\lambda=0$ のとき，分散 $(-\Delta_a+m^2)^{-1}$，平均 0 の，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{Z}_a^\nu)$ 上の Gauss 型確率測度として意味をもつことを示している．

8.2 Schwinger 関数に対する方程式 (8.7.13) を導け．

8.3 $P(X) = \lambda X^2/2 + \rho X$ ($\lambda > 0$, $\rho \in \mathbf{R}$) に対する Schwinger-Dyson 方程式 (8.7.7) の解は

$$F(f)=\exp\left[-\frac{1}{2}\langle f, (-\varDelta_a+m^2+\lambda)^{-1}f\rangle-i\rho\langle 1, (-\varDelta_a+m^2+\lambda)^{-1}f\rangle\right]$$

$$f\in s_r(\mathbf{Z}_a{}^\nu),$$

であたえられ，しかも一意的であることを証明せよ．［$F(f)$ は，分散が $(-\varDelta_a+m^2+\lambda)^{-1}$，平均 $(-\rho/m^2+\lambda)$ の，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ 上の Gauss 型確率測度の特性汎関数である．9.13 節を参照せよ．］

●文献

Baker, G. (1975), Self-interacting boson quantum field theory and the thermodynamic limit in *d* dimensions, J. Math. Phys. **16**, 1324–1346.

Cassandro, M., E. Olivieri, A. Pellegrinotti and E. Presutti (1978), Existence and uniqueness of DLR measures for unbounded spin systems, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. Gebiete **41**, 313–334.

江沢 洋 (1978)，量子力学の構造，湯川・豊田 (1978)，第 IV 部．

江沢 洋 (1987)，『フーリエ解析』，講談社．

Gel'fand, I. M. and N. Ya. Vilenkin (1964), *Generalized Functions IV, Application of Harmonic Analysis*, Academic Press, New York.

Lebowitz, J. L. and E. Presutti (1976), Statistical mechanics of systems of unbounded spins, Commun. Math. Phys. **50**, 195–218.

Simon, B. (1979), *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York.

湯川秀樹・豊田利幸編 (1978)，『量子力学 II』，岩波講座・現代物理学の基礎 4，岩波書店．

第9章

連続体上の $(\phi^{2N})_2$ 理論

この章では，2 次元時空における相対論的場の量子論の $P(\phi)_2$ モデルのひとつである $(\phi^{2N})_2$ $(N \geqslant 2)$ モデルを，Euclid 的方法で構成しよう．構成の概略は次のようになる：まず，相互作用が連続体 $\mathbf{R}^2$ の有界領域 Λ の中でのみ存在する理論——空間切断の入った理論——を考え，その性質を調べる．2 次元時空における理論の場合，ここまでは格子近似を経る必要がない．次に，Schwinger 関数を用いて，無限体積極限 $\Lambda \nearrow \mathbf{R}^2$ の理論の存在を示す．無限体積極限の存在の基礎となるのは連続体の上における相関不等式であるが，これは，前章で述べた格子近似によって別に導出しておく．最後に，無限体積極限，すなわち，空間切断なしの $(\phi^{2N})_2$ モデルが Osterwalder-Schrader の公理系をみたすことを示す．さらに，$(\phi^{2N})_2$ モデルのいくつかの性質に言及する．なお，より一般の $P(\phi)_2$ モデルに対しても，本章の方法は拡張される．

9.1 はじめに

$(\phi^{2N})_2$ 量子場のモデル構成の出発点は，空間切断の入った相互作用演算子を定義することにあるが，それには，しかし，対応する古典場の相互作用の形をそのまま使うわけにはいかない．ここに，量子論と古典論のひとつの本質的な違いがある．量子論に移行する際にどのような変更をすればよいかを見るために，以下，形式的な発見法的議論を，Minkowski 空間上の場の理論について行なう．

古典的な $(\phi^{2N})_2$ 理論は，非線形 Klein-Gordon 方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+m^2\right)\phi(t,x)+2N\phi(t,x)^{2N-1}=0,\qquad (t,x)\in\mathbf{R}^2 \tag{9.1.1}$$

をみたす実数値スカラー場 $\phi(t,x)$ の理論である．ここで，$m>0$ はパラメーターである（物理的には，量子化された場に付随する量子——中性ボソン——の（裸の）質量である）．方程式 (9.1.1) に対応する古典的なハミルトニアン H^{cl}——時間に依存しない保存量——は，

$$H^{\mathrm{cl}}=H_0{}^{\mathrm{cl}}+H_I{}^{\mathrm{cl}} \tag{9.1.2}$$

であたえられる．ただし，

$$H_0{}^{\mathrm{cl}}=\frac{1}{2}\int dx\left[\pi(0,x)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi(0,x)\right)^2+m^2\phi(0,x)^2\right], \tag{9.1.3}$$

$$H_I{}^{\mathrm{cl}}=\int dx\,\phi(0,x)^{2N}, \tag{9.1.4}$$

ここに

$$\pi(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x). \tag{9.1.5}$$

(9.1.2) において，$H_I{}^{\mathrm{cl}}$ が場の相互作用エネルギーを表わしている．

通常の正準量子化では，$(\phi^{2N})_2$ 量子場は，力学変数 $\phi(t,x),\pi(t,x)$ が，ある Hilbert 空間における自己共役な演算子値超関数で，正準交換関係

$$[\phi(t,x),\phi(t,y)]=0=[\pi(t,x),\pi(t,y)] \tag{9.1.6}$$

$$[\phi(t,x),\pi(t,y)]=i\delta(x-y), \tag{9.1.7}$$

$$t,x,y\in\mathbf{R}$$

にしたがい，$\phi(t,x)$ は，形式的に，方程式 (9.1.1) をみたすものとして，‘定義’ される．いま，「形式的に」と書いた意味は，まず，$\phi(t,x)$ は演算子値超関数なので，その積 $\phi(t,x)^{2N}$ などは一般には意味をもたないこと，第2に，それが仮に定義できたとしても方程式 (9.1.1) が成立するような演算子の定義域の問題が残っているからである．したがって，$(\phi^{2N})_2$ 量子場を場の方程式で，数学的にきちんと定義することはむずかしい．むしろ，量子場の方程式はあとから帰結として出てくるもので，その形もおのずと古典場のそれとは違ってしまうのである（これについては，Glimm and Jaffe (1971), Schrader (1974) を参照）．

さて，$t=0$ とした交換関係 (9.1.6), (9.1.7) にしたがう演算子の組 $\{\phi_0(x), \pi_0(x)\}$ をひとつとり ($x \in \mathbf{R}$)，ハミルトニアン H を形式的に

$$H = H_0 + H_I \tag{9.1.8}$$

によって定義しよう．ここで，H_0, H_I は，$H_0^{\mathrm{cl}}, H_I^{\mathrm{cl}}$ に対応する演算子で，形式的に

$$H_0 = \frac{1}{2}\int dx\left[\pi_0(x)^2 + \left(\frac{\partial\phi_0(x)}{\partial x}\right)^2 + m^2\phi_0(x)^2\right] \tag{9.1.9}$$

$$H_I = \int dx\,\phi_0(x)^{2N} \tag{9.1.10}$$

としてあたえられる．このとき，

$$\phi(t,x) = e^{itH}\phi_0(x)e^{-itH} \tag{9.1.11}$$

$$\pi(t,x) = e^{itH}\pi_0(x)e^{-itH} \tag{9.1.12}$$

とおけば，$\phi(t,x)$ は，形式的に，方程式 (9.1.1) をみたし，(9.1.5～7) の成立することがわかる．実際，正準交換関係は，$\{\phi_0(x), \pi_0(x)\}$ のそれから導かれるし，また

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) &= ie^{itH}[H, \phi_0(x)]e^{-itH} \\
&= ie^{itH}(-i\pi_0(x))e^{-itH} \\
&= \pi(t,x), \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(t,x) &= ie^{itH}[H, \pi_0(x)]e^{-itH} \\
&= ie^{itH}\left(-i\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_0(x) + im^2\phi_0(x) + i2N\phi_0(x)^{2N-1}\right)e^{-itH} \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2\right)\phi(t,x) - 2N\phi(t,x)^{2N-1}.
\end{aligned}$$

こうして，正準交換関係をみたす自己共役な演算子値超関数の組 $\{\phi_0(x), \pi_0(x)\}$ をひとつあたえ，(9.1.8) でハミルトニアン H を定義すれば，(9.1.11) であたえられる量子場 $\phi(t,x)$ は，演算子方程式 (9.1.1) の形式解になっていることがわかった．そこで，この形式的な解の構成法を指針として，数学的に厳密な仕方でモデルを構成することを考えよう．

ところで，構成の基本となる演算子 $\{\phi_0(x), \pi_0(x)\}$ のえらび方は唯一つとは限らない*)．ここでは，$\{\phi_0(x), \pi_0(x)\}$ として，第4章で考えた自由場の時刻0の場をとることにしよう．この選択にはひとつの物理的な裏づけがある．すなわち，もし，H_I を λH_I として，$\lambda\to 0$ とすれば，$\lambda\neq 0$ のときの解 $\phi(t,x)$ は，形式的に，自由場の解

$$e^{itH_0}\phi_0(x)e^{-itH_0}$$

に近づくので，$\phi_0(x)$ は，形式的には，自由場の時刻0の場でなければならない．$\pi(t,x)$ についても同様である．しかし，これは，あくまで形式的な話である．また，$\lambda\to 0$ のとき，自由場に近づかない理論があっても数学的には一向さしつかえないであろう．

さて，実 Hilbert 空間**)

$$\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}) = \left\{ f\in\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}) \;\middle|\; \|f\|_{-1/2}{}^2 \equiv \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{f}(p)|^2}{\sqrt{p^2+m^2}}dp < \infty \right\} \tag{9.1.13}$$

を考え，これを指標とする Gauss 超過程を $\phi_{\mathrm{F}}(\cdot)$，その測度空間を $(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ とし，

$$\mathcal{F} = \mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}}) \tag{9.1.14}$$

とおく．ϕ_{F} は時空2次元での自由な中性スカラー量子場の時刻0の場であり，$\mathcal{F}$ がその Fock 空間である．$\phi_0=\phi_{\mathrm{F}}$ とし，(9.1.10) によって，相互作用を形式的に定義すると困ったことがおこる．それを，まず見ておこう．$\phi_{\mathrm{F}}(x)$ を $\phi_{\mathrm{F}}(\cdot)$ の核 (kernel) としよう：

$$\phi_{\mathrm{F}}(f) \equiv \int \phi_{\mathrm{F}}(x)f(x)dx.$$

$\phi_{\mathrm{F}}(x)^n, (n=2,3,\cdots)$ を数学的に正確に定義するために，ひとつの関数クラスを定義する．

定義 9.1.1　次の条件をみたす関数 $\rho\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ の全体を $\mathsf{K}(\mathbf{R}^\nu)$ とする：

---

*)　詳しくは触れないが，場の量子論のように，無限自由度の量子力学系では，有限自由度の場合と違って，正準交換関係の表現には，ユニタリ非同値なものが無数にある．たとえば，江沢 (1978) 参照．

**)　これは，第4章で考えた $\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ の1次元版である．

$$\int \rho(x)dx = 1.$$

いま，$\kappa > 0$ と $\rho \in \mathsf{K}(\mathbf{R}^\nu)$ に対して，関数 ρ_κ を

$$\rho_\kappa(x) = \kappa^\nu \rho(\kappa x) \tag{9.1.15}$$

によって定義する．容易にわかるように，$\kappa \to \infty$ とすれば，超関数の意味で $\rho_\kappa(x) \to \delta(x)$ (ν 次元 δ 関数) となる．

$\rho \in \mathsf{K}(\mathbf{R})$ をとり，確率変数

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{F},\kappa}(x) &= \phi_\mathrm{F}(\rho_\kappa(x-\cdot)) \\ &\equiv \int \phi_\mathrm{F}(y)\rho_\kappa(x-y)dy \end{aligned} \tag{9.1.16}$$

を考えよう．$\rho_\kappa(x) \to \delta(x)$ ($\kappa \to \infty$) であるから，$\phi_\mathrm{F}(x)^n$ を $\phi_{\mathrm{F},\kappa}(x)^n$ の (何らかの意味での) $\kappa \to \infty$ の極限として定義しようとするのは自然であろう．そして，その極限が超確率変数になるとすれば，$\mathscr{S}(\mathbf{R})$ の関数 g で均したもの

$$\phi_{\mathrm{F},\kappa}{}^n(g) \equiv \int \phi_{\mathrm{F},\kappa}(x)^n g(x)dx$$

が，確率変数として，$\kappa \to \infty$ で適当な意味で収束すべきである．しかし，残念ながら，この考え方はうまくゆかない．たとえば，最も簡単に見える $n=2$ の場合を考えてみよう．容易にわかるように，

$$\int d\mu_{0,\mathrm{F}}\phi_{\mathrm{F},\kappa}{}^2(g) = \frac{1}{2}\int \frac{\left|\hat{\rho}\left(\dfrac{p}{\kappa}\right)\right|^2}{\sqrt{p^2+m^2}}dp\int dxg(x) \tag{9.1.17}$$

となるが，右辺は，$\kappa \to \infty$ で発散する．これは，$\phi_{\mathrm{F},\kappa}{}^2(g)$ が，$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_\mathrm{F}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ で弱収束さえしないことを示していて，たいへん具合が悪い．実際に，$\phi_{\mathrm{F},\kappa}{}^2(g)$ は $\kappa \to \infty$ のとき，$d\mu_{0,\mathrm{F}}$ に関してほとんどいたるところ発散している (問題9.1)．ここに現われた発散は，場の量子論に現われる発散のうちで最も単純なもののひとつである．

物理的には，第1章で述べたとおり，このような発散を処理する方法ができており，‘くりこみ理論’ (renormalization theory) とよばれているが，数学

的には，まだ不完全である．では，いまの場合の‘くりこみ’の処方とはどんなものか．この場合の考え方は単純であって，$\phi_{F,\kappa}(x)^2$ から $\phi_{F,\kappa}(x)^k$ $(k=0, 1)$ の適当な一次結合を引くことによって，$\phi_{F,\kappa}(x)^2$ の‘再規格化 (renormalization)’を考える．すなわち，κ に依存する定数 c_κ, d_κ を適当に選んで

$$\tilde{\phi}_{F,\kappa}{}^2(g) \equiv \int [\phi_{F,\kappa}(x)^2 - c_\kappa \phi_{F,\kappa}(x) - d_\kappa] g(x) dx$$

が，$\kappa \to \infty$ のとき，たとえば，$L^2(Q_F, d\mu_{0,F})$ で収束するようにし，これによって，

$$\lim_{\kappa\to\infty} \phi_{F,\kappa}{}^2(g)$$

を再定義することを考えるのである．これに適する c_κ と d_κ は，いまの場合，(9.1.17) から暗示されるとおり

$$c_\kappa = 0, \qquad d_\kappa = \int d\mu_{0,F} \phi_{F,\kappa}(x)^2 = \frac{1}{2} \int \frac{\left|\hat{\rho}\left(\dfrac{p}{\kappa}\right)\right|^2}{\sqrt{p^2+m^2}} dp$$

にとればよい．すなわち，

$$\tilde{\phi}_{F,\kappa}{}^2(g) \equiv \int :\phi_{F,\kappa}(x)^2: g(x) dx \equiv :\phi_{F,\kappa}{}^2(g):.$$

とするわけで，$\phi_{F,\kappa}{}^2(g)$ の再規格化とは Wick 積 : : を採用することにほかならないのである*)．このことは，もっと高次の $\phi_{F,\kappa}(g)^n$ の再規格化についても同様である：

$$:\phi_{F,\kappa}{}^n(g): \equiv \int :\phi_{F,\kappa}(x)^n: g(x) dx. \tag{9.1.18}$$

命題9.2.2で示すように，実際，$:\phi_{F,\kappa}{}^n(g):$ は，$\kappa \to \infty$ のとき，$L^2(Q_F, d\mu_{0,F})$ において収束し，超確率変数

$$:\phi_F{}^n(g): = \lim_{\kappa\to\infty} :\phi_{F,\kappa}{}^n(g): \tag{9.1.19}$$

をあたえる．これを利用して，$(\phi^{2N})_2$ 量子場の**空間切断** (space cut-off) の

---

*) これは時空2次元のモデルの場合である．系 9.2.4 の後の注意を参照．

入った相互作用 $H_I(g)$ が $g \geqslant 0$ に対して

$$H_I(g) \equiv :\phi_{\rm F}{}^{2N}(g): \tag{9.1.20}$$

によって定義される．ここでいう‘空間切断’とは，関数 g を挿入することであって，g としては，$\mathscr{S}(\mathbf{R})$ に入ってはいないが，$\mathbf{R}$ の有界集合 $[-L, L]$ に対する定義関数 $\chi_{[-L,L]}$ をとることも多い．$H_I(g)$ は，記号的な表現として

$$H_I(g) = \int :\phi_{\rm F}(x)^{2N}: g(x)dx \tag{9.1.21}$$

と書けることに注意し，$g = \chi_{[-L,L]}$ の場合を考えれば，g が相互作用の空間切断を表わしていることがよくわかるであろう．相対論的に不変な理論を得るためには，$g \to 1$ の極限をとる必要があるが，$H_I(g)$ で $g \to 1$ としたのではやはり発散してしまい，うまくゆかない*)．極限 $g \to 1$ は，無限体積極限ともよばれるが，これは通常，切断の入った理論の場の真空期待値，すなわち Wightman 超関数，あるいは場から生成される‘局所観測量’の真空期待値の言葉で遂行される．しかし，本書では，そのような方法はとらず，対応する Euclid 場の‘真空期待値’，すなわち Schwinger 関数を用いて，無限体積極限を考えることにしよう．

9.2 相互作用の定義

空間切断の入った相互作用 $:\phi_{\rm F}{}^{2N}(g):$ の存在を証明し，その基本的性質を調べよう．本章の目的は，Euclid 的な方法で $(\phi^{2N})_2$ モデルを構成することにあるので，Euclid 場の相互作用も同時に扱えるような定式化を考える．そこで

定義 9.2.1 H を実 Hilbert 空間で，$\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ がその中に連続的に埋めこまれ，稠密であるようなものとする．H を指標とする Gauss 超過程を $\phi(f)$，その実現している確率測度空間を $(\mathbf{Q}, d\mu_0)$ としよう．このとき，ある定数 c と

$$|a(p)| \leqslant c(1+|p|^2)^{-\nu/2}, \qquad p \in \mathbf{R}^\nu$$

となる関数 $a(p) \geqslant 0$ があって

---

*) これは，いわゆる **Haag の定理**と関連している．Haag の定理について，詳しくは，たとえば，ボゴリューボフ他 (1972) の第5章を参照．

$$\int \phi(f)^2 d\mu_0 = \int a(p)|\hat{f}(p)|^2 d^\nu p, \qquad f \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$$

となるならば，この Gauss 超過程は **C 型**であるという．

第4章からわかるように，時空2次元での時刻0の自由な Minkowski 場，および自由な Euclid 場はいずれも C 型の Gauss 超過程である（前者は $\nu=1$，後者は $\nu=2$ の場合である．$\nu \geqslant 3$ のときはそれらは C 型ではない）．

H を定義9.2.1のようにとり，$\phi(f)$ を H を指標とする C 型の Gauss 超過程としよう．

$\rho \in \mathrm{K}(\mathbf{R}^\nu)$ をとり，

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi(\rho_\varepsilon(x-\cdot)) \equiv \int \phi(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy \tag{9.2.1}$$

を考え，$g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ に対して

$$:\phi_\varepsilon{}^n(g): = \int :\phi_\varepsilon(x)^n: g(x)d^\nu x \tag{9.2.2}$$

を定義する．ここで，(9.2.2) の右辺は，$\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}, d\mu_0)$ の値をとる Bochner 積分として定義する．$:\phi_\varepsilon{}^n(g):$ は，アプリオリには，$g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ に対して考えられているが，g がどのくらいの関数のクラスまで拡張されるか見るのは興味がある．

命題 9.2.2　任意の $p \in (1,2]$ に対して

$$\|:\phi_\varepsilon{}^n(g):\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{Q})} \leqslant c\|g\|_p. \tag{9.2.3}$$

となる．ここで，c は，n, p に依存する定数である．したがって，$:\phi_\varepsilon{}^n(g):$ は $g \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^\nu)$ に対しても定義される．

証明　$d\mu_0$ による期待値を $\langle\cdot\rangle$ と記す．Wick 積の性質によって

$$\begin{aligned}
&\|:\phi_\varepsilon{}^n(g):\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{Q})}{}^2 \\
&= n!\int \langle \phi(\rho_\varepsilon(x-\cdot))\phi(\rho_\varepsilon(y-\cdot))\rangle^n \overline{g(x)}g(y)d^\nu x d^\nu y \\
&= n!\int \left(\int a(p)|\hat{\rho}_\varepsilon(p)|^2 e^{ip(x-y)}d^\nu p\right)^n \overline{g(x)}g(y)d^\nu x d^\nu y \\
&= n!(2\pi)^\nu \int \left|\hat{g}\left(\sum_{j=1}^n p_j\right)\right|^2 \prod_{j=1}^n [a(p_j)|\hat{\rho}_\varepsilon(p_j)|^2] \prod_{j=1}^n dp_j
\end{aligned}$$

$$\leqslant n!(2\pi)^{\nu}c_1{}^n I(g).$$

ここで，$c_1>0$ はある定数で，

$$I(g)=\int\left|\hat{g}\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\right)\right|^2\prod_{j=1}^{n}(p_j{}^2+1)^{-\nu/2}d^{\nu}p_j.$$

$h(p)=(p^2+1)^{-\nu/2}$ とおき，

$$\begin{aligned}p_1+\cdots+p_n &\longrightarrow p_1,\\ p_2+\cdots+p_n &\longrightarrow p_2,\\ &\cdots\cdots,\\ p_{n-1}+p_n &\longrightarrow p_{n-1},\\ p_n &\longrightarrow p_n\end{aligned}$$

という変数変換をすれば，

$$I(g)=\int(\underbrace{h*\cdots*h}_{n-1\text{ 個}}*|\hat{g}|^2)(p)h(p)d^{\nu}p$$

と書ける．Hölder の不等式を使うと

$$I(g)\leqslant\|h\|_{r_1}\|h*\cdots*h*|\hat{g}|^2\|_{s_1}.$$

ただし，$r_1{}^{-1}+s_1{}^{-1}=1$，$1\leqslant r_1, s_1\leqslant\infty$．Young の不等式によって

$$\begin{aligned}\|h*\cdots*h*|\hat{g}|^2\|_{s_1} &\leqslant \|h*\cdots*h\|_{t_1}\|\,|\hat{g}|^2\|_q\\ &=\|h*\cdots*h\|_{t_1}\|\hat{g}\|_{2q}{}^2\end{aligned}$$

ただし，$t_1{}^{-1}+q^{-1}=1+s_1{}^{-1}$，$1\leqslant t_1, q\leqslant\infty$．さらに，Hausdorff-Young の不等式により

$$\|\hat{g}\|_{2q}\leqslant\|g\|_p(2\pi)^{1-2/p}.$$

ここで，$(2q)^{-1}+p^{-1}=1$，$1<p\leqslant 2$．したがって

$$I(g)\leqslant\|h\|_{r_1}\|\underbrace{h*\cdots*h}_{n-1\text{ 個}}\|_{t_1}\|g\|_p{}^2(2\pi)^{2-4/p} \tag{9.2.4}$$

r_1，t_1，p の関係は，

$$r_1{}^{-1}+t_1{}^{-1}=2p^{-1},\qquad 1<p\leqslant 2,\ 1\leqslant r_1, t_1\leqslant\infty \tag{9.2.5}$$

であたえられる．そこで，r_1 として，$1<r_1<p/(2-p)$ となるものをとれば，(9.2.5) により，$t_1>1$ がひとつ定まる．再び Young の不等式によって

$$\|\underbrace{h*\cdots*h}_{n-1\text{ 個}}\|_{t_1}\leqslant\|h\|_{r_2}\|\underbrace{h*\cdots*h}_{n-2\text{ 個}}\|_{t_2},\qquad r_2{}^{-1}+t_2{}^{-1}=1+t_1{}^{-1}.$$

$t_1>1$ だから $1<r_2<t_1$ となる r_2 をとることができ，これに対して $t_2>1$ が定まる．以下，この操作と Young の不等式を用いて

$$\|h*\cdots*h\|_{t_1}\leqslant\prod_{j=2}^{n}\|h\|_{r_j}$$

となる $r_j>1$ $(j=2,\cdots,n)$ がとれる．これと (9.2.4) を合わせると

$$I(g)\leqslant\left(\prod_{j=1}^{n}\|h\|_{r_j}\right)\|g\|_p{}^2(2\pi)^{2-4/p}.$$

$r>1$ ならば，$h\in\mathrm{L}^r(\mathbf{R}^\nu)$ だから，(9.2.3) を得る．∎

次に $\kappa\to\infty$ の極限を考える．

定理 9.2.3　$g\in\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^\nu)$, $p\in(1,2]$ とする．このとき，各 $n=1,2,\cdots,$ に対して

$$:\phi^n(g):\equiv\lim_{\kappa\to\infty}:\phi_\kappa{}^n(g):\not\equiv 0 \tag{9.2.6}$$

は，$\mathrm{L}^2(\mathbf{Q})$ の収束の意味で存在し，$:\phi_\kappa{}^n(g):$ を定義する際に用いた $\rho\in\mathrm{K}(\mathbf{R}^\nu)$ の選び方によらない．さらに，ある定数 $\delta>0$ が存在して

$$\|:\phi^n(g):-:\phi_\kappa{}^n(g):\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{Q})}\leqslant O(\kappa^{-\delta})\|g\|_p\quad(\kappa\to\infty). \tag{9.2.7}$$

証明　まず，$:\phi_\kappa{}^n(g):$ が，κ について，$\mathrm{L}^2(\mathbf{Q})$ で Cauchy 列をなすことを示す．Wick 積の性質を使えば，$\lambda,\kappa>0$ として，

$$\begin{aligned}&\|:\phi_\lambda{}^n(g):-:\phi_\kappa{}^n(g):\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{Q})}{}^2\\&=n!(2\pi)^\nu\int\left|\hat{g}\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\right)\right|^2\left\{\prod_{j=1}^{n}a(p_j)|\hat{\rho}_\lambda(p_j)|^2-\prod_{j=1}^{n}a(p_j)\overline{\hat{\rho}_\lambda(p_j)}\hat{\rho}_\kappa(p_j)\right.\\&\qquad\left.-\prod_{j=1}^{n}a(p_j)\hat{\rho}_\lambda(p_j)\overline{\hat{\rho}_\kappa(p_j)}+\prod_{j=1}^{n}a(p_j)|\hat{\rho}_\kappa(p_j)|^2\right\}\prod_{j=1}^{n}d^\nu p_j.\end{aligned} \tag{9.2.8}$$

命題9.2.2の証明から，上式の右辺の被積分関数は λ,κ に依存しない可積分関数で抑えられることがわかる．したがって，Lebesgue の収束定理と $\hat{\rho}_\kappa(p)\to(2\pi)^{-\nu/2}$ $(\kappa\to\infty)$ によって，

$$\lim_{\lambda,\kappa\to\infty}\|:\phi_\lambda{}^n(g):-:\phi_\kappa{}^n(g):\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{Q})}=0.$$

すなわち，$:\phi_\varepsilon{}^n(g):$ は $L^2(Q)$ で Cauchy 列をなす．ゆえに，(9.2.6) で定義される $:\phi^n(g):\in L^2(Q)$ が存在する．また，$:\phi^n(g):$ が ρ の選び方に依存しないことは，上の計算から明らかであろう．(9.2.8) で $\lambda\to\infty$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
I &\equiv \| :\phi^n(g): - :\phi_\varepsilon{}^n(g): \|_{L^2(Q)}{}^2 \\
&= n!(2\pi)^{\nu(1-n)}\int\left|\hat{g}\left(\sum_{j=1}^n p_j\right)\right|^2\left[\prod_{j=1}^n a(p_j)\right] \\
&\qquad\qquad \times\left|\prod_{j=1}^n (2\pi)^{\nu/2}\hat{\rho}_\varepsilon(p_j)-1\right|^2\prod_{j=1}^n d^\nu p_j
\end{aligned}
$$

となる．一般に数 $a_1,\cdots,a_n$ に対して

$$
\prod_{j=1}^n a_j-1=(a_1-1)\prod_{j=2}^n a_j+(a_2-1)\prod_{j=3}^n a_j+\cdots+(a_n-1)
$$

となるから，

$$
\gamma_\varepsilon(p_j)=(2\pi)^{\nu/2}\hat{\rho}_\varepsilon(p_j)
$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
&\left|\prod_{j=1}^n (2\pi)^{\nu/2}\hat{\rho}_\varepsilon(p_j)-1\right|^2 \\
&\quad\leqslant n\left\{\left|(\gamma_\varepsilon(p_1)-1)\prod_{j=2}^n\gamma_\varepsilon(p_j)\right|^2+\left|(\gamma_\varepsilon(p_2)-1)\prod_{j=3}^n\gamma_\varepsilon(p_j)\right|^2\right. \\
&\qquad\qquad\left.+\cdots+|\gamma_\varepsilon(p_n)-1|^2\right\}.
\end{aligned}
$$

そこで，$j=1,\cdots,n$ に対して

$$
\begin{aligned}
a_j{}^{(i)}(p)&=a(p), & j&=1,\cdots,i-1\\
a_i{}^{(i)}(p)&=a(p)|\gamma_\varepsilon(p)-1|^2, & &\\
a_j{}^{(i)}(p)&=a(p)|\gamma_\varepsilon(p)|^2, & j&=i+1,\cdots,n,
\end{aligned}
$$

として，関数 $a_j{}^{(i)}(p)$ を定義すれば

$$
I\leqslant n\cdot n!(2\pi)^{\nu(1-n)}\sum_{i=1}^n\int\left|\hat{g}\left(\sum_{j=1}^n p_j\right)\right|^2\left[\prod_{j=1}^n a_j{}^{(i)}(p_j)\right]\prod_{j=1}^n d^\nu p_j
$$

となる．命題9.2 2の証明と同様にして

$$
\int\left|\hat{g}\left(\sum_{j=1}^n p_j\right)\right|^2\left[\prod_{j=1}^n a_j{}^{(i)}(p_j)\right]\prod_{j=1}^n d^\nu p_j
$$

$$= \int (a_{n-1}{}^{(i)} * \cdots * a_1{}^{(i)} * |\hat{g}|^2)(p) a_n{}^{(i)}(p) d^\nu p$$

$$\leqslant \left(\prod_{j=1}^{n} \|a_j{}^{(i)}\|_{r_j} \right) \|g\|_p{}^2 (2\pi)^{2-4/p}$$

と評価できる．ここで，$r_j > 1$, $j = 1, \cdots, n$. ところで，$\|a_j{}^{(i)}\|_{r_j}$ は，$j \neq i$ なら κ に無関係な定数で抑えられる．$j = i$ のものは $r_j \equiv r$ として

$$\|a_j{}^{(j)}\|_r{}^r \leqslant c^r \int \frac{|\gamma_\kappa(p) - 1|^{2r}}{(p^2+1)^{r\nu/2}} d^\nu p$$
$$\equiv [J_1(\kappa) + J_2(\kappa)] c^r.$$

ただし

$$J_1(\kappa) = \int_{|p| \leqslant \kappa} \frac{|\gamma_\kappa(p) - 1|^{2r}}{(p^2+1)^{r\nu/2}} d^\nu p, \qquad J_2(\kappa) = \int_{|p| > \kappa} \frac{|\gamma_\kappa(p) - 1|^{2r}}{(p^2+1)^{r\nu/2}} d^\nu p.$$

$J_1(\kappa)$ を評価するために，ある定数 $c_1 > 0$ があって

$$|\gamma_\kappa(p) - 1| \leqslant c_1 \left| \frac{p}{\kappa} \right|$$

となることに注意する．これは，$\int |x| \rho(x) dx < \infty$, および $|\exp(i\alpha) - 1| \leqslant |\alpha|$ からでる．したがって，$c_2 > 0$ をある定数として

$$J_1(\kappa) \leqslant c_2 \kappa^{-2r} \int_0^\kappa \frac{p^{2r+\nu-1} dp}{(p^2+1)^{r\nu/2}}$$

$$\leqslant c_2 \kappa^{-(r-1)} \sup_{p \geqslant 0} \left[\frac{p^{r+\nu-1}}{(p^2+1)^{r\nu/2}} \right] \qquad (p^{2r} \leqslant \kappa^r p^r \text{ による})$$

$$\equiv c_3 \kappa^{-(r-1)}. \qquad (r\nu - r - \nu + 1 > 0)$$

$r > 1$ であるから，$c_3 < \infty$ である．次に $J_2(\kappa)$ であるが，$p/\kappa \longrightarrow p$ という変数変換をすれば

$$J_2(\kappa) \leqslant \text{const.}\ \kappa^\nu \int_1^\infty \frac{p^{\nu-1} dp}{(\kappa^2 p^2 + 1)^{r\nu/2}}$$

$$\leqslant \text{const.}\ \kappa^{-\nu(r-1)} \int_1^\infty \frac{dp}{p^{\nu(r-1)+1}}$$

$$= \text{const.}\ \kappa^{-\nu(r-1)}.$$

したがって，

$$\|a_j{}^{(j)}\|_r{}^r \leqslant O(\kappa^{-(r-1)}) \qquad (\kappa \to \infty).$$

を得る．こうして，(9.2.7) を得る．∎

系 9.2.4 定理 9.2.3 の仮定のもとで，任意の $q\in[2,\infty)$ に対して，

$$\|:\phi^n(g):\|_{L^q(Q)}\leqslant c(q-1)^{n/2}\|g\|_p, \tag{9.2.9}$$

$$\|:\phi^n(g):-:\phi_\kappa{}^n(g):\|_{L^q(Q)}\leqslant c(q-1)^{n/2}\kappa^{-\delta}\|g\|_p \tag{9.2.10}$$

がなりたつ．ただし，$c>0$ は q に依存しない定数である．

証明 超縮小性の定理（定理 3.4.9）を使えばよい．∎

注意 $\nu\geqslant 3$ のとき，$\phi(f)$ が C 型ではなく，たとえば

$$\int\phi(f)^2d\mu_0=c\int\frac{|\hat{f}(p)|^2}{(1+p^2)^{1/2}}d^\nu p$$

となるような場合，

$$\lim_{\kappa\to\infty}\|:\phi_\kappa{}^n(g):\|_{L^2(Q)}=\infty \qquad (n\geqslant 2)$$

となる（問題 9.2）．これから，3 次元以上の時空における自由場から相互作用を定義しようとすれば，Wick 積だけでは再規格化できないことがわかる．ここに，より高次元の時空でのモデルの数学的構成のむずかしさがうかがわれる．

次に，後の便宜のために，$\exp[-:\phi^{2N}(g):]$ の $L^p(\mathbf{Q},d\mu_0)$ における性質を調べる．

補題 9.2.5 ϕ を C 型の Gauss 超過程とする．$g\geqslant 0$，$g\in L^1(\mathbf{R}^\nu)\cap L^r(\mathbf{R}^\nu)$，$r\in(1,2]$ としよう．$N\geqslant 1$ を固定して，

$$V=:\phi^{2N}(g): \tag{9.2.11}$$

とおく．このとき，g に依存しない定数 $a>0$ と g に依存する定数 $b>0$ が存在して，十分大きなすべての $\kappa>0$ に対して

$$\mu_0\{q\mid V(q)\leqslant -b(\ln\kappa)^N\}\leqslant\exp(-\kappa^a) \tag{9.2.12}$$

がなりたつ．

証明 $\kappa>0$ として

$$V_\kappa=:\phi_\kappa{}^{2N}(g):$$

とおこう．このとき，系 9.2.4 によって，ある $\delta>0$ と g に依存する定数 $c_1>0$ が存在して，すべての $p\in[2,\infty)$ に対して

$$\|V-V_\kappa\|_p \leqslant c_1(p-1)^N\kappa^{-\delta} \tag{9.2.13}$$

がなりたつ．Wick 積の定義によって

$$:\phi_\kappa(x)^{2N}:=\sum_{n=0}^{2N} a_n\phi_\kappa(x)^n c_\kappa{}^{2N-n}$$

と書ける．ただし，$c_\kappa=\langle\phi_\kappa(x)^2\rangle^{1/2}$ であり，a_n は定数で，$a_{2N}=1$ である．そこで，多項式

$$Q(X)=\sum_{n=0}^{2N} a_n X^n$$

を考えると

$$\inf_{X\in\mathbf{R}} Q(X)\geqslant -\alpha>-\infty$$

をみたす $\alpha>0$ が存在する．したがって，$\mathbf{Q}$ の各点で

$$\begin{aligned}:\phi_\kappa(x)^{2N}:&=Q(\phi_\kappa(x)/c_\kappa)c_\kappa{}^{2N}\\ &\geqslant -\alpha c_\kappa{}^{2N}\end{aligned}$$

がなりたつ．c_κ は x に依存せず，$g\geqslant 0$ だから，

$$V_\kappa\geqslant -\alpha\|g\|_1\langle\phi_\kappa(x)^2\rangle^N$$

を得る．V は V_κ を定義する $\rho\in\mathsf{K}(\mathbf{R}^\nu)$ の選び方によらなかったから，ここで，ρ として

$$\begin{aligned}|\hat\rho(p)|&\leqslant(2\pi)^{-\nu/2}, &\quad |p|\leqslant 1\\ \hat\rho(p)&=0, &\quad |p|\geqslant 1\end{aligned}$$

となるものをとろう．したがって，

$$\begin{aligned}\langle\phi_\kappa(x)^2\rangle&=\int a(p)|\hat\rho(p/\kappa)|^2 d^\nu p\\ &\leqslant c(2\pi)^{-\nu}\int_{|p|\leqslant\kappa}\frac{d^\nu p}{(p^2+1)^{\nu/2}}\\ &\leqslant\beta\ln\kappa\end{aligned}$$

となる．ここで，$\beta>0$ は定数で，不等式は十分大きな κ について成立する．ゆえに，

$$V_\kappa\geqslant-\alpha\beta^N\|g\|_1(\ln\kappa)^N\geqslant 1-b(\ln\kappa)^N.$$

ただし，$b>0$ は g に依存する適当な定数．したがって，$V(q)\leqslant -b\ (\ln\kappa)^N$

ならば, $|V_\kappa(q)-V(q)|\geqslant 1$ であるから,

$$\begin{aligned}\mu_0\{q\mid V(q)\leqslant -b(\ln\kappa)^N\}&\\ \leqslant \mu_0\{q\mid |V_\kappa(q)-V(q)|\geqslant 1\}&\\ \leqslant \int |V_\kappa - V|^p d\mu_0&\\ \leqslant c_1{}^p(p-1)^{Np}\kappa^{-\delta p}.&\end{aligned}$$

ここで, 最後の不等式は (9.2.13) による. $p\in[2,\infty)$ は任意であったから, これを κ に依存させながら選ぶ. すなわち,

$$p=\kappa^{\delta/3N}$$

とおこう. このとき, $(p-1)^{Np}\leqslant p^{Np}\leqslant \kappa^{\delta p/3}$. また, 十分大きな κ に対して, $c_1{}^p\leqslant \kappa^{\delta p/3}$ がなりたつ. したがって,

$$c_1{}^p(p-1)^{Np}\kappa^{-\delta p}\leqslant \kappa^{-\delta p/3}\leqslant e^{-p}=\exp[-\kappa^{\delta/3N}].$$

そこで, $a=\delta/3N$ とおけば (9.2.12) を得る. ▮

補題 9.2.6 $(\mathbf{M},\mu)$ を確率測度空間とし, f をその上の可測関数とする. f に対して, $[0,\infty)$ 上の関数 $m_f(t)$ を

$$m_f(t)=\mu\{m\in\mathbf{M}\mid |f(m)|>t\}$$

によって定義する. このとき, $p\geqslant 1$ に対して, $f\in \mathsf{L}^p(\mathbf{M},d\mu)$ であるための必要十分条件は

$$\int_0^\infty t^{p-1}m_f(t)dt<\infty \tag{9.2.14}$$

となることであり, その場合,

$$\|f\|_p{}^p=p\int_0^\infty t^{p-1}m_f(t)dt \tag{9.2.15}$$

である.

証明 明らかに, m_f は単調減少関数であり, 有界変動である. したがって, Stieltjes 積分

$$\int_0^\infty t^p dm_f(t)$$

が定義され,

$$\int |f|^p d\mu = -\int_0^\infty t^p dm_f(t) \tag{9.2.16}$$

がなりたつ．この等式は両辺とも ∞ の場合を含む．部分積分して

$$-\int_0^\infty t^p dm_f(t) = \lim_{T\to\infty}\left\{-T^p m_f(T) + \int_0^T pt^{p-1} m_f(t)dt\right\}. \tag{9.2.17}$$

さて，$f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{M}, d\mu)$ としよう．このとき，

$$m_f(t) \leqslant t^{-p}\int |f|^p d\mu = t^{-p}\|f\|_p{}^p$$

であるから，

$$\sup_{t\in[0,\infty)} t^p m_f(t) \leqslant \|f\|_p{}^p.$$

したがって，(9.2.17) によって

$$-\int_0^\infty t^p dm_f(t) \geqslant -\|f\|_p{}^p + \int_0^\infty pt^{p-1} m_f(t)dt.$$

これと (9.2.16) によって，(9.2.14) を得る．

これは，また $m_f(t) = o(t^{-p})$ $(t\to\infty)$ を意味し，したがって，$T^p m_f(T) \to 0$ $(T\to\infty)$ となる．ゆえに (9.2.15) を得る．逆に，(9.2.14) がなりたっているとすれば，(9.2.16) と (9.2.17) とによって

$$\|f\|_p{}^p \leqslant \int_0^\infty pt^{p-1} m_f(t)dt < \infty$$

となるから，$f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{M}, d\mu)$ である．∎

定理 9.2.7　ϕ, g, V を補題 9.2.5 のものとしよう．このとき，

$$e^{-V} \in \bigcap_{1\leqslant p<\infty} \mathrm{L}^p(\mathbf{Q}, d\mu_0).$$

証明　$f = e^{-V}$ として，補題 9.2.6 を適用する．このとき，

$$m_f(t) = \mu_0\{q \in \mathbf{Q} \mid V < -\ln t\}$$

であるから，補題 9.2.5 によって，十分大きな定数 t_0 が存在して，$t \geqslant t_0$ ならば，

$$m_f(t) \leqslant \exp[-e^{c(\ln t)^{1/N}}]$$

となる．ただし，$c>0$ は定数．したがって

$$\int_0^\infty t^{p-1}m_f(t)dt$$
$$\leqslant \int_0^{t_0} t^{p-1}m_f(t)dt+\int_{t_0}^\infty t^{p-1}\exp[-e^{c(\ln t)^{1/N}}]dt<\infty.$$

ゆえに，任意の $p\geqslant 1$ に対して $f=e^{-V}\in \mathrm{L}^p(\mathbf{Q},d\mu_0)$ である．▮

定理 9.2.8 ϕ を C 型の Gauss 超過程とし，また

$$g\geqslant 0,\ g_n\geqslant 0,\ g, g_n\in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^\nu)\cap \mathrm{L}^{1+\varepsilon}(\mathbf{R}^\nu),\ \varepsilon\in(0,1]$$

とし，

$$\sup_{n\geqslant 1}\|g_n\|_1<\infty, \tag{9.2.18}$$
$$\|g_n-g\|_{1+\varepsilon}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

と仮定しよう．このとき，各 $p\in[1,\infty)$ に対して

$$\|e^{-V(g_n)}-e^{-V(g)}\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{Q})}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

となる．ここで，

$$V(g)=:\phi^{2N}(g):$$

である．

証明 任意の実数 $x, y\in\mathbf{R}$ に対して

$$|e^x-e^y|\leqslant|x-y|\,|e^x+e^y|$$

が成立するから，

$$\|e^{-V(g_n)}-e^{-V(g)}\|_p$$
$$\leqslant \|\,|V(g_n)-V(g)|(e^{-V(g_n)}+e^{-V(g)})\|_p$$
$$\leqslant (\|e^{-V(g_n)}\|_r+\|e^{-V(g)}\|_r)\|V(g_n-g)\|_q.$$

ここで，$\|\cdot\|_p$ は $\mathrm{L}^p(\mathbf{Q},d\mu_0)$ のノルムを表わし，

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}.$$

第2番目の不等号は Hölder の不等式による．仮定によって，$\|g_n\|_{1+\varepsilon}\to\|g\|_{1+\varepsilon}$ でもあるから，

$$\sup_n\|g_n\|_{1+\varepsilon}<\infty$$

となる．これと (9.2.18) および補題 9.2.5，定理 9.2.7 の証明によって，

$$\sup_n \|e^{-V(g_n)}\|_r < \infty$$

であることがわかる（補題9.2.5の a, b および κ の大きさが n に依存しないように選べることに注意）．このことと系 9.2.4 とを使えば，c をある定数として

$$\|e^{-V(g_n)}-e^{-V(g)}\|_p \leqslant c\|g_n-g\|_{1+\varepsilon} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

となり，証明が終わる．∎

さて，実 Hilbert 空間

$$\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^2) = \left\{ f \in \mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^2) \mid \|f\|_{-1}{}^2 \equiv 2\int_{\mathbf{R}^2} \frac{|\hat{f}(p)|^2}{p^2+m^2} dp < \infty \right\} \tag{9.2.19}$$

を考え，これを指標とする Gauss 超過程を $\phi(\cdot)$，その実現する測度空間を $(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ とし，

$$\mathcal{E} = \mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}}) \tag{9.2.20}$$

とおく．$\phi(\cdot)$ は時空2次元での自由な Euclid 場にほかならない．$\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ は $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2)$ を稠密な部分空間として含み，$\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2)$ は $\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ に連続的に埋め込まれているので，$\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ として

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{E}} = \mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^2) \tag{9.2.21}$$

をとることができる（命題 3.2.13）．以下，$\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ をこのように選んで話をすすめる．$\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ をこのようにとる利点のひとつは，第4章でも述べたように，Euclid 群の作用が自然に考えられることである．

$(\phi^{2N})_2$ モデルの Euclid 的相互作用は，$g \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^2) \cap \mathsf{L}^p(\mathbf{R}^2)$，$p \in (1, 2]$，$g \geqslant 0$ として

$$U(g) = :\phi^{2N}(g): \tag{9.2.22}$$

によって定義される．

時刻0の Minkowski 自由場 ϕ_{F}, Euclid 的自由場 ϕ はともにC型の Gauss 超過程であるから，これらに対して，命題 9.2.2，定理 9.2.3，系 9.2.4，補題 9.2.5，定理 9.2.7-8 がなりたつ．特に，定理 9.2.7 の結果として：

定理 9.2.9

(1) $g \geqslant 0$, $g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathrm{L}^{1+\varepsilon}(\mathbf{R})$, $\varepsilon \in (0,1]$ に対して

$$e^{-H_I(g)} \in \bigcap_{p<\infty} \mathrm{L}^p(\mathrm{Q_F}, d\mu_{0,\mathrm{F}}). \tag{9.2.23}$$

(2) $g \geqslant 0$, $g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^2) \cap \mathrm{L}^{1+\varepsilon}(\mathbf{R}^2)$, $\varepsilon \in (0,1]$ に対して

$$e^{-U(g)} \in \bigcap_{p<\infty} \mathrm{L}^p(\mathrm{Q_E}, d\mu_{0,\mathrm{E}}). \tag{9.2.24}$$

最後に，一般的な命題をひとつあげておこう．

命題 9.2.10 $V \in \mathrm{L}^2(\mathrm{Q_F}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$, $\exp(-V) \in \bigcap_{p<\infty} \mathrm{L}^p(\mathrm{Q_F}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ と仮定する．このとき，$t>0$ に対して

$$e^{-\int_0^t J_s V ds} \in \bigcap_{p<\infty} \mathrm{L}^p(\mathrm{Q_E}, d\mu_{0,\mathrm{E}}) \tag{9.2.25}$$

であり，

$$\left\| \exp\left[-\int_0^t J_s V ds \right] \right\|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{Q_E})} \leqslant \| \exp[-tV] \|_{\mathrm{L}^1(\mathrm{Q_F})}. \tag{9.2.26}$$

証明 まず，$V \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{Q_F})$ の場合を考える．Hölder の不等式をくり返し用いることにより，

$$\left\| \exp\left[-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n J_{jt/n} V \right] \right\|_1 \leqslant \prod_{j=1}^n \| \exp[-tJ_{jt/n} V] \|_1{}^{1/n}.$$

そこで，$J_s e^{-V} = e^{-J_s V}$ と，J_s が $\mathrm{L}^p(\mathrm{Q_F})$ から $\mathrm{L}^p(\mathrm{Q_E})$，$p \in [1,\infty)$，への縮小演算子であること（系 3.4.8）を用いると，

$$\left\| \exp\left[-\frac{t}{n} \sum_{j=1}^n J_{jt/n} V \right] \right\|_1 \leqslant \| \exp[-tV] \|_1$$

を得る．$V \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{Q_F})$ だから，$J_s V \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{Q_E})$ であり，$\|J_s V\|_\infty \leqslant \|V\|_\infty$. したがって，Lebesgue の収束定理により，上式の左辺は $n \to \infty$ のとき，

$$\left\| \exp\left[-\int_0^t J_s V ds \right] \right\|_1$$

に収束する．

次に，仮定をみたす一般の V に対しては，

$$V_n = \begin{cases} V & |V| \leqslant n \text{ のとき} \\ 0 & |V| > n \text{ のとき} \end{cases}$$

として，V を $V_n \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ で近似して極限を考えればよい．詳細は読者の演習とする．∎

9.3　切断ハミルトニアンの構成，物理的真空の存在と一意性

切断 g の入った $(\phi^{2N})_2$ モデルの全ハミルトニアン $H(g)$ は

$$H(g) = H_0 + H_I(g) \tag{9.3.1}$$

によって定義される．ここで，H_0 は，時空2次元の自由場のハミルトニアンである（定義は，時空4次元のそれにまったく同様である）．以下，$H_I(g)$ における g は，つねに $g \geqslant 0$, $g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathrm{L}^p(\mathbf{R})$, $p \in (1, 2]$ をみたしているものとする．$H(g)$ は，アプリオリには，$\mathrm{D}(H_0) \cap \mathrm{D}(H_I(g))$（これは $\mathscr{F}$ で稠密）*) で定義される対称演算子である．この節の第一目標は，$H(g)$ の本質的自己共役性を示すことである．

g を $H_I(g)$ の g とし，$a < b$ に対して，$\mathbf{Q}_\mathrm{E}$ 上の確率測度 $d\mu_{[a,b]\otimes g}$ を

$$d\mu_{[a,b]\otimes g} = \frac{e^{-U([a,b]\otimes g)} d\mu_{0,\mathrm{E}}}{\displaystyle\int e^{-U([a,b]\otimes g)} d\mu_{0,\mathrm{E}}} \tag{9.3.2}$$

によって定義する．ただし，$\mathbf{R}^2$ 上の関数 $[a, b] \otimes g$ は，$\chi_{[a,b]}$ を $[a, b]$ 上の定義関数として，

$$([a, b] \otimes g)(t, x) = \chi_{[a,b]}(t) g(x), \qquad (t, x) \in \mathbf{R}^2 \tag{9.3.3}$$

によってあたえられる．定理 9.2.7 によって，$d\mu_{[a,b]\otimes g}$ は，確かに意味をもつ．

さて，

$$F_{(a,b)} = e^{-U([a,b]\otimes g)} \tag{9.3.4}$$

とおき，$\mathscr{F}$ における演算子

$$P_{(a,b)} = J_b^* F_{(a,b)} J_a \tag{9.3.5}$$

*)　D(A) は演算子 A の定義域（domain）を意味する．

を考える．ここで，J_t は，$\mathscr{F}$ から $\mathscr{E}$ の中への等距離演算子で，第4章の J_t とまったく同様に定義され，同じ性質をもつ．$\psi \in \mathrm{L}^p(\mathbf{Q}_\mathrm{F}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$，$p > 2$，としよう．このとき，Hölder の不等式によって

$$\|F_{(a,b)}J_a\psi\|_{\mathrm{L}^r(\mathbf{Q}_\mathrm{E})} \leqslant \|F_{(a,b)}\|_q \|J_a\psi\|_p.$$

ただし，$1/q+1/p=1/r$ である．系3.4.8と同様に，J_a は $\mathrm{L}^s(\mathbf{Q}_\mathrm{F}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ から $\mathrm{L}^s(\mathbf{Q}_\mathrm{E}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ ($s \in [1, \infty]$) への縮小演算子だから，$\|J_a\psi\|_p \leqslant \|\psi\|_p$．ゆえに

$$\|P_{(a,b)}\psi\|_{\mathrm{L}^r(\mathbf{Q}_\mathrm{F})} \leqslant \|F_{(a,b)}\|_q \|\psi\|_p.$$

すなわち，$P_{(a,b)}$ は，アプリオリには，各 $\mathrm{L}^p(\mathbf{Q}_\mathrm{F}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ から $\mathrm{L}^r(\mathbf{Q}_\mathrm{F}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ ($p > r \geqslant 2$) への有界演算子である．

次に，相互作用の Euclid 不変性を調べよう．$\mathbf{E}^2$ を2次元の Euclid 群とし，u_α，$\Gamma(u_\alpha)$，$\hat{u}_\alpha$ 等は，4.5節のものと同様とする．このとき，

補題 9.3.1 $g \geqslant 0$，$g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^2) \cap \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^2)$，$p \in (1, 2]$ とする．このとき，任意の $\alpha \in \mathbf{E}^2$ に対して

$$\Gamma(u_\alpha)U(g) = U(u_\alpha g). \tag{9.3.6}$$

証明 $\kappa > 0$，$\rho \in \mathrm{K}(\mathbf{R}^2)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\Gamma(u_\alpha) :\phi_\kappa{}^{2N}(g): &= \int :\phi((u_\alpha\rho_\kappa)(\alpha x - \cdot))^{2N}: g(x)d^2x \\ &= \int :\phi((u_\alpha\rho_\kappa)(x - \cdot))^{2N}: (u_\alpha g)(x)d^2x.\end{aligned}$$

$u_\alpha\rho_\kappa = (u_\alpha\rho)_\kappa$ であり，また $u_\alpha\rho \in \mathrm{K}(\mathbf{R}^2)$ であるから，$\kappa \to \infty$ のとき，右辺は $:\phi^{2N}(u_\alpha g) := U(u_\alpha g)$ に収束する．一方，左辺は，$\Gamma(u_\alpha)$ の有界性によって，$\kappa \to \infty$ のとき，

$$\Gamma(u_\alpha) :\phi^{2N}(g): = \Gamma(u_\alpha)U(g)$$

に収束する．したがって，(9.3.6) を得る．∎

さて，以上の準備のもとで，演算子 $P_{(a,b)}$ のもっと詳しい性質を調べよう．

定理 9.3.2

(1)
$$P_{(a,b)} = P_{(0,b-a)}. \tag{9.3.7}$$

そこで

$$P(t) \equiv P_{(0,t)}, \qquad t \geqslant 0, \tag{9.3.8}$$

を定義する．

（2） $s<1+e^{2mt}$ ならば，$P(t)$ は $\mathscr{F}$ から $\mathsf{L}^s(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ への有界演算子であり，その演算子ノルム $\|P(t)\|_{2,s}$ は

$$\|P(t)\|_{2,s} \leqslant \|F_{(0,t)}\|_r \tag{9.3.9}$$

をみたす．ただし，$r>1$ は s, t に依存する定数である．特に，すべての $t \geqslant 0$ に対して，$P(t)$ は，$\mathscr{F}$ から $\mathscr{F}$ への有界演算子であり，

$$\|P(t)\| \leqslant \|F_{(0,t)}\|_{q(t)} \tag{9.3.10}$$

がなりたつ．ここで，

$$q(t) = 2/(1-e^{-mt}). \tag{9.3.11}$$

（3） $\{P(t) \mid t \geqslant 0\}$ は $\mathscr{F}$ 上の強連続で自己共役な半群である．

証明

（1） 定理4.6.7により，

$$P_{(a,b)} = J_{b-a}{}^* U_a{}^* F_{(a,b)} U_a J_0$$

と書ける．$\psi \in \bigcup_{p>2} \mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ と各 $T \in \mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ に対して

$$\begin{aligned}(U_t{}^* F_{(a,b)} U_t \psi)(T) &= (F_{(a,b)} U_t \psi)(\hat{u}_t T)\\ &= F_{(a,b)}(\hat{u}_t T)\psi(T).\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}F_{(a,b)}(\hat{u}_t T) &= e^{-U([a,b]\otimes g)(\hat{u}_t T)}\\ &= e^{-\Gamma(u_t)U([a,b]\otimes g)(T)}\\ &= e^{-U([a-t,b-t]\otimes g)(T)}\end{aligned}$$

ここで，補題9.3.1を使った．したがって

$$U_t{}^* F_{(a,b)} U_t \psi = F_{(a-t,b-t)} \psi \tag{9.3.12}$$

を得る．特に，$t=a$ とすれば

$$\begin{aligned}P_{(a,b)}\psi &= J_{b-a}{}^* F_{(0,b-a)} J_0 \psi\\ &= P_{(0,b-a)}\psi\end{aligned}$$

となる．すなわち，(9.3.7) を得る．

（2） 一般に，$p>1$ に対して，$1/p+1/p'=1$ によって $p'>1$ を定義する．$s(t)=1+e^{2mt}$ $(t>0)$ ならば，$s(t)'=1+e^{-2mt}$ である．$s<s(t)$ ならば，$s'>s(t)'$ であるから，

$$(s'q^{-1}-1)(2q^{-1}-1) = e^{-2mt}$$

をみたす q が存在する．ただし，$1 < q < \min\{2, s'\}$．したがって，すべての $\eta \in \mathrm{L}^{s'}(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$，$\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ に対して，定理4.7.2によって

$$\|(J_t\eta)(J_0\psi)\|_q \leqslant \|J_t\eta\|_{s'}\|J_0\psi\|_2 \leqslant \|\eta\|_{s'}\|\psi\|_2.$$

これと Hölder の不等式を使うと

$$\begin{aligned} &\left|\int \overline{(J_t\eta)(T)}F_{(0,t)}(T)(J_0\psi)(T)d\mu_{0,\mathrm{E}}(T)\right| \\ &\leqslant \|F_{(0,t)}\|_{q'}\|(J_t\eta)(J_0\psi)\|_q \\ &\leqslant \|F_{(0,t)}\|_{q'}\|J_t\eta\|_{s'}\|J_0\psi\|_2 \\ &\leqslant \|F_{(0,t)}\|_{q'}\|\eta\|_{s'}\|\psi\|_2. \end{aligned} \tag{9.3.13}$$

すべての $t>0$ に対して $s(t)>2$, $s(t)'<2$ であるから，特に $s'=s=2$ のときを考える．Σ_t-可測な $\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ 関数の全体を $\mathrm{L}^2{}_{\Sigma_t}(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}})$ とすれば，上式の第2番目の不等式は，この Hilbert 空間における双対性の不等式と見ることができるので，$F_{(0,t)}(J_0\psi) \in \mathrm{L}^2{}_{\Sigma_t}(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}})$ となる．したがって，

$$P(t)\psi = J_t{}^*F_{(0,t)}J_0\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$$

となる．そこで，再び一般の s', s にもどると，(9.3.13) によって

$$\begin{aligned} &\left|\int \overline{\eta(T)}[P(t)\psi](T)d\mu_{0,\mathrm{F}}(T)\right| \\ &\leqslant \|F_{(0,t)}\|_{q'}\,\|\eta\|_{s'}\,\|\psi\|_2. \end{aligned}$$

$\mathrm{L}^{s'}(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}})$ と $\mathrm{L}^{s}(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}})$ の双対性によって，この不等式は，

$$P(t)\psi \in \mathrm{L}^s(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}), \quad \|P(t)\psi\|_s \leqslant \|F_{(0,t)}\|_{q'}\|\psi\|_2$$

を意味する．したがって，$P(t)$ は $\mathscr{F}$ から $\mathrm{L}^s(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ への有界演算子であり，$q'=r$ とおいて (9.3.9) を得る．特に，すべての $t>0$ に対して，$s(t)>2$ だから，$s=2$ の場合を考えると，すべての $t>0$ に対して，$P(t)$ は $\mathscr{F}$ から $\mathscr{F}$ への有界演算子であり，(9.3.10) を得る．$s=2$ のとき $s'=2$ であり，$q=2/(1+e^{-mt})$ となるから，$q'=2/(1-e^{-mt})$ となる．$t=0$ に対しては，$P(0)=1$ (単位演算子) だから自明である．

(3) $U_r=\Gamma(u_r)$ (r は $t=0$ についての鏡映) とおくと $U_rJ_a=J_{-a}$ がなりたつ．したがって，補題9.3.1によって，

$$U_r{}^*F_{(a,b)}U_r = F_{(-b,-a)}.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}P(t)^* &= J_0^* F_{(0,t)} J_t \\ &= J_0^* U_\tau^* F_{(0,t)} U_\tau J_{-t} \\ &= J_0^* F_{(-t,0)} J_{-t} \\ &= P_{(-t,0)} \\ &= P_{(0,t)} = P(t).\end{aligned}$$

したがって，$P(t)$ は自己共役である．

$t, s \geqslant 0$ とすると

$$\begin{aligned}P(t)P(s) &= J_t^* F_{(0,t)} J_0 J_s^* F_{(0,s)} J_0 \\ &= J_{t+s}^* U_{-s}^* F_{(0,t)} U_{-s} J_s J_s^* F_{(0,s)} J_0 \\ &= J_{t+s}^* F_{(s,t+s)} E_s F_{(0,s)} J_0.\end{aligned}$$

ここで，第2の等号では，$J_t = U_{-\tau} J_{\tau+t}$ を，第3の等号では，$U_a^* F_{(0,t)} U_a = F_{(-a,t-a)}$，$J_s J_s^* = E_s$ を用いた．任意の $\eta, \psi \in \mathscr{F}$ に対して，したがって

$$\langle \eta, P(t)P(s)\psi \rangle = \langle F_{(s,t+s)} J_{t+s}\eta, E_s F_{(0,s)} J_0 \psi \rangle_{L^2(Q_E)}$$

と書ける．ところで，$F_{(0,s)} J_0 \psi$ は $\Sigma_{[0,s]}$-可測であり，$F_{(s,t+s)} J_{t+s}\eta$ は $\Sigma_{[s,t+s]}$-可測であるので，上式において，$E_s = E_{[s,t+s]} E_s E_{[0,s]}$ となるが，定理 4.6.7 (5) によって，$E_s = E_{[s,t+s]} E_{[0,s]}$ となる．したがって上式において E_s はなくてもよい．ゆえに

$$\begin{aligned}P(t)P(s) &= J_{t+s}^* F_{(s,t+s)} F_{(0,s)} J_0 \\ &= J_{t+s}^* F_{(0,t+s)} J_0 \\ &= P(t+s).\end{aligned}$$

よって，$\{P(t) \mid t \geqslant 0\}$ は半群である．

次に，$P(t)$ の t についての強連続性を示そう．$U_t J_\tau = J_{\tau+t}$ によって，

$$P(t) = J_0^* U_t^* F_{(0,t)} J_0 = J_0^* U_{-t} F_{(0,t)} J_0$$

と書けることに注意すると，任意の $\psi \in L^\infty(Q_F)$ と $t, t_0 > 0$ に対して ($\eta = J_0 \psi$ とおく)，

$$\begin{aligned}&\|(P(t)-P(t_0))\psi\|_2 \\ &\leqslant \|(U_{-t}F_{(0,t)} - U_{-t_0}F_{(0,t_0)})\eta\|_2 \\ &\leqslant \|(U_{-t} - U_{-t_0})(F_{(0,t)} - F_{(0,t_0)})\eta\|_2 \\ &\quad + \|(U_{-t} - U_{-t_0})F_{(0,t_0)}\eta\|_2 + \|U_{-t_0}(F_{(0,t)} - F_{(0,t_0)})\eta\|_2 \\ &\leqslant 3\|(F_{(0,t)} - F_{(0,t_0)})\eta\|_2 + \|(U_{-t} - U_{-t_0})F_{(0,t_0)}\eta\|_2\end{aligned}$$

$$\leqslant 3\|\eta\|_\infty\|F_{(0,t)}-F_{(0,t_0)}\|_2+\|(U_{-t}-U_{-t_0})F_{(0,t_0)}\eta\|_2.$$

ここで，$\phi\in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ ならば，$\eta=J_0\phi\in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{E})$ となることを用いた（定理3.4.7参照）．定理9.2.8によって，

$$\|F_{(0,t)}-F_{(0,t_0)}\|_2\to 0 \qquad (t\to t_0).$$

また，U_t は t について強連続であるから，結局，

$$\lim_{t\to t_0}\|\{P(t)-P(t_0)\}\phi\|_2=0$$

を得る．

(2) によって，任意の有限区間 $[a,b]\subset(0,\infty)$ に対して

$$\sup_{t\in[a,b]}\|P(t)\|<\infty$$

であること，および $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ が $\mathscr{F}$ で稠密であることを用いると，$\varepsilon/3$ 論法*) によって，$(0,\infty)$ で $P(t)$ は t について強連続であることがわかる．

最後に $t=0$ での強連続性を示す．半群の性質と強連続性を用いると，任意の $\alpha>0$ に対して

$$P(\alpha t)=P(t)^\alpha, \qquad t>0.$$

$P(t)$ は自己共役であるから，$0\leqslant\alpha<1$ のとき，$\|P(t)^\alpha\|\leqslant\|P(t)\|^\alpha$．したがって，$\|P(\alpha t)\|\leqslant\|P(t)\|^\alpha$．そこで，$t_0>0$ を固定し，$\beta=\alpha t_0$ とおけば，$\|P(\beta)\|\leqslant\|P(t_0)\|^{\beta/t_0}$．したがって，$\|P(\beta)\|$ は $[0,t_0]$ 上で一様に有界である．ゆえに，上と同様に，$\varepsilon/3$ 論法によって，$P(t)$ の $t=0$ での強連続性が得られる．∎

上の定理の (3) によって，下に有界な自己共役演算子 H が存在して

$$P(t)=e^{-tH}, \qquad t>0, \tag{9.3.14}$$

と表わされる．次にこの H と全ハミルトニアン $H(g)$ が‘本質的に’同じであることを示そう．

定理 9.3.3 $g\geqslant 0$, $g\in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})\cap \mathrm{L}^{1+\varepsilon}(\mathbf{R})$, $\varepsilon\in(0,1]$ とする．このとき，

（1） $H(g)$ は $\mathrm{C}^\infty(H_0)$ 上で本質的に自己共役である．ここで，$\mathrm{C}^\infty(H_0)=\{\psi\in\mathscr{F}\mid\psi\in\bigcap_{n\geqslant 1}\mathrm{D}(H_0{}^n)\}$．したがって，$H(g)\upharpoonright\mathrm{C}^\infty(H_0)$ の閉包は自己共役

*) 任意の $\varphi\in\mathscr{F}$ に対して，$\phi\in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ を適当にとって

$$\|\{P(t)-P(t_0)\}\varphi\|\leqslant\|\{P(t)-P(t_0)\}\phi\|+\|P(t)(\varphi-\phi)\|+\|P(t_0)(\varphi-\phi)\|$$

とし，右辺の各項を $t\to t_0$ で $\varepsilon/3$ より小さくする論法．

であるが，それをまた同じ記号 $H(g)$ で記す．

(2) $H(g)$ のスペクトル $\sigma(H(g))$ の下限を $E(g)$ としよう：

$$E(g)=\inf\sigma(H(g)). \tag{9.3.15}$$

このとき，

$$-E(g)\leqslant (tq(t))^{-1}\ln\langle 1, e^{-tH(q(t)g)}1\rangle, \tag{9.3.16}$$

$$-E(g)\leqslant \frac{m}{2}\ln\|e^{-2H_I(g)/m}\|_{L^1(Q_F)} \tag{9.3.17}$$

がなりたつ．ここで $q(t)$ は (9.3.11) であたえられる．

(3)

$$H=H(g). \tag{9.3.18}$$

証明　(1) と (3) の証明は長いので，いくつかのステップに分けて示す．

(a)　各 $t>0$ に対して，$\mathrm{R}(e^{-tH})$ は H に対するコア (core) である*)．

以下，$\mathrm{D}_0\equiv \mathrm{R}(e^{-H})$ とおく．

証明　任意の $\psi\in[\mathrm{R}(e^{-tH})]^{\perp}$ に対して，$\langle\psi, e^{-tH}\eta\rangle=0$ がすべての $\eta\in\mathscr{F}$ についてなりたつ．$\langle\psi, e^{-tH}\eta\rangle=\langle e^{-tH}\psi,\eta\rangle$ であるから，したがって，$e^{-tH}\psi=0$. e^{-tH} は1対1であるから，$\psi=0$ となる．したがって，$\mathrm{R}(e^{-tH})$ は $\mathscr{F}$ で稠密である．H に対するスペクトル分解を

$$H=\int\lambda dE(\lambda)$$

としよう．明らかに，$\mathrm{R}(e^{-tH})\subset \mathrm{C}^{\infty}(H)$ であり，任意の $\psi\in\mathrm{R}(e^{-tH})$ に対して ($\psi\equiv e^{-tH}\eta$ として)，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|H^n\psi\|}{n!}s^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\left(\int_E^{\infty}\lambda^{2n}e^{-2t\lambda}d\|E(\lambda)\eta\|^2\right)^{1/2}\\&\leqslant\{\sup_{\lambda\in[E,\infty)}[\lambda^{2n}e^{-2t\lambda}]\}^{1/2}e^{s}\|\eta\|<\infty.\end{aligned}$$

ここで，E は H のスペクトルの下限であり，$s>0$ は任意である．したがっ

---

*)　一般に，Hilbert 空間の部分空間 D が，自己共役演算子 A のコアであるとは，$\mathrm{D}\subset\mathrm{D}(A)$ であり，A の D への制限 $A\restriction\mathrm{D}$ が本質的に自己共役になるときをいう．

て，$\mathrm{R}(e^{-tH})$ は H に対する解析ベクトルの集合である．ゆえに，Nelson の解析ベクトル定理（Reed and Simon (1975), § X. 6）によって，H は $\mathrm{R}(e^{-tH})$ で本質的に自己共役，すなわち，$\mathrm{R}(e^{-tH})$ は H に対するコアである．∎

(b) 任意の $s\in\mathbf{R}$ に対して

$$\int_0^t J_s H_I(g)ds = U([0,t]\otimes g).$$

証明 J_s の有界性によって

$$J_s:\phi_{\mathrm{F}}{}^{2N}(g):=\lim_{\varepsilon\to\infty} J_s:\phi_{\mathrm{F},\varepsilon}{}^{2N}(g):\qquad (\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}})\text{ での収束}).$$

他方，

$$J_s:\phi_{\mathrm{F},\varepsilon}{}^{2N}(g):=\int J_s:\phi_{\mathrm{F}}(\rho_\varepsilon(x-\cdot))^{2N}:g(x)dx$$
$$=\int:\phi(\delta_s\otimes\rho_\varepsilon(x-\cdot))^{2N}:g(x)dx.$$

そこで，δ_s を $\rho_\varepsilon(s-\cdot)$ で近似することにより

$$J_s:\phi_{\mathrm{F}}{}^{2N}(g):=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int:\phi(\rho_\varepsilon(s-\cdot)\otimes\rho_\varepsilon(x-\cdot))^{2N}:g(x)dx$$

を得る．したがって

$$\int_0^t J_s H_I(g)ds=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\int:\phi(\rho_\varepsilon(s-\cdot)\otimes\rho_\varepsilon(x-\cdot))^{2N}:\chi_{[0,t]}(s)g(x)dsdx$$
$$=U([0,t]\otimes g).\ ∎$$

(c)

$$F_{(0,t)}=1-\int_0^t F_{(0,s)}V_s ds \tag{9.3.19}$$

ただし，$V_s=J_sH_I(g)$.

証明 (b) によって

$$F_{(0,t)}=\exp\left[-\int_0^t V_s ds\right]. \tag{9.3.20}$$

形式的には，これを t で微分して積分すれば，(9.3.19) が得られる．これを完全にするには次のようにする．まず，$\phi\in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ を考え

$$\phi_s=J_s\phi$$

とおく．このとき，$\phi_s\in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{E})$ であり，$\|\phi_s\|_\infty\leqslant\|\phi\|_\infty$ がなりたつ（系 3.4.8）．

$$\Psi_N(t)=\sum_{n=0}^N\frac{1}{n!}\left(-\int_0^t\phi_s ds\right)^n$$

とおけば，$\mathbf{Q}_\mathrm{E}$ の各点で

$$|\Psi_N(t)|\leqslant\sum_{n=0}^N\frac{(|t|\|\phi\|_\infty)^n}{n!}<e^{|t|\|\phi\|_\infty}$$

がなりたつ．したがって，$\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_\mathrm{E})$ の収束の意味で

$$\Psi(t)\equiv\exp\left[-\int_0^t\phi_s ds\right]=\lim_{N\to\infty}\Psi_N(t).$$

さらに，ϕ_s は s について $\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_\mathrm{E})$ 上強連続であるから，$\Psi_N(t)$ は t について強微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}\Psi_N(t)=-\phi_t\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}\left(-\int_0^t\phi_s ds\right)^n.$$

上に見たように，右辺は有界な t について，$\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_\mathrm{E})$ で一様収束するから，したがって，$\Psi(t)$ は，t について強微分可能で

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)=-\phi_t\Psi(t)$$

がなりたつ．この両辺を積分することにより，

$$\Psi(t)=1-\int_0^t\phi_s\Psi(s)ds \tag{9.3.21}$$

を得る．次に，$n\geqslant 1$ として

$$V^{(n)}=\begin{cases}H_I(g) & |H_I(g)|\leqslant n \text{ のとき}\\ 0 & |H_I(g)|>n \text{ のとき}\end{cases}$$

によって，$\mathbf{Q}_\mathrm{F}$ 上の関数 $V^{(n)}$ を定義する．明らかに，$V^{(n)}\in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ だから，(9.3.21) を適用すれば

$$\exp\left[-\int_0^t V_s^{(n)}ds\right]=1-\int_0^t V_s^{(n)}\exp\left[-\int_0^s V_r^{(n)}dr\right]ds \tag{9.3.22}$$

がなりたつ．ただし，$V_s^{(n)}=J_sV^{(n)}$ とした．明らかに，$p\geqslant 2$ に対して，$\|V_s^{(n)}-V_s\|_p\leqq\|V^{(n)}-H_I(g)\|_p\to 0$ $(n\to\infty)$ だから，

$$\left\|\int_0^t V_s^{(n)}ds-\int_0^t V_sds\right\|_p\leqslant|t|\cdot\|V^{(n)}-H_I(g)\|_p\to 0 \quad (n\to\infty) \tag{9.3.23}$$

これを用いて，(9.3.22) の両辺の収束を示すために，まず，任意の有限な $t_0>0$ と $p>1$ に対して

$$\sup_{t\in[0,t_0]}\sup_n\left\|\exp\left[-\int_0^t V_s^{(n)}ds\right]\right\|_p<\infty \tag{9.3.24}$$

を示す．$H_I(g)<0$ のときは，$V^{(n)}\geqslant H_I(g)$ であるから，J_s の正値保存性によって，$V_s^{(n)}\geqslant V_s$．$H_I(g)\geqslant 0$ のときは，$V^{(n)}\geqslant 0$ だから $V_s^{(n)}\geqslant 0$．したがって

$$\left\|\exp\left[-\int_0^t V_s^{(n)}ds\right]\right\|_p^p\leqslant\left\|\exp\left[-\int_0^t V_sds\right]\right\|_p^p+1.$$

また

$$V^{(+)}=\begin{cases}H_I(g) & H_I(g)\geqslant 0 \text{ のとき}\\ 0 & H_I(g)<0 \text{ のとき}\end{cases}$$

とし，$V^{(-)}=H_I(g)-V^{(+)}$ とおけば，$V_s=J_sV^{(+)}+J_sV^{(-)}$ で，$J_sV^{(+)}\geqslant 0$，$J_sV^{(-1)}\leqslant 0$ であるから

$$\exp\left[-\int_0^t V_sds\right]\leqslant\exp\left[-\int_0^t J_sV^{(-)}ds\right].$$

したがって，

$$\left\|\exp\left[-\int_0^t V_sds\right]\right\|_p\leqslant\left\|\exp\left[-\int_0^t J_sV^{(-)}ds\right]\right\|_p.$$

明らかに，この式の右辺は t について単調増加である．よって (9.3.24) を得る．

さて，$|e^x-e^y|\leqslant|x-y|\,|e^x+e^y|$ $(x,y\in\mathbf{R})$ と Hölder の不等式および

(9.3.23-24) を用いると

$$\left\|\exp\left[-\int_0^t V_s^{(n)}ds\right]-\exp\left[-\int_0^t V_s ds\right]\right\|_2$$
$$\leqslant \left\|\int_0^t V_s^{(n)}ds-\int_0^t V_s ds\right\|_p \times (n \text{ によらない定数})$$
$$\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

を得る．同様にして，$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ の収束で

$$\int_0^t V_s^{(n)}\exp\left[-\int_0^s V_r^{(n)}dr\right]ds \to \int_0^t V_s\exp\left[-\int_0^s V_r dr\right]ds \qquad (n\to\infty)$$

を示すことができる．以上によって，(9.3.19) を得る．∎

(d)　すべての $\phi\in\bigcup_{p>2}\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ に対して

$$e^{-tH}\phi = e^{-tH_0}\phi-\int_0^t e^{-(t-s)H_0}H_I(g)e^{-sH}\phi ds. \tag{9.3.25}$$

証明　$\phi\in\bigcup_{p>2}\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ ならば，(c) によって

$$P(t)\phi = J_t^*J_0\phi-\int_0^t J_t^*V_sF_{(0,s)}J_0\phi ds.$$

$V_sF_{(0,s)}J_0\phi$ は $\Sigma_{[0,s]}$-可測であり，$t\geqslant s$ であるから，Markov 性によって (定理 4.6.7(5))

$$\begin{aligned} J_t^*V_sF_{(0,s)}J_0\phi &= J_t^*E_sV_sF_{(0,s)}J_0\phi \\ &= J_t^*J_s\ J_s^*V_sF_{(0,s)}J_0\phi. \end{aligned}$$

$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ から $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ への演算子として，$J_s^*V_s = H_I(g)J_s^*$ であることは容易にわかるから

$$\begin{aligned} J_t^*V_sF_{(0,s)}J_0\phi &= J_t^*J_sH_I(g)J_s^*F_{(0,s)}J_0\phi \\ &= J_t^*J_sH_I(g)P(s)\phi. \end{aligned}$$

$J_t^*J_s = \exp[-|t-s|H_0]$ だったから，(9.3.25) を得る．∎

(e)

$$H\restriction \mathsf{D}_0 = H(g)\restriction \mathsf{D}_0.$$

したがって，$H(g)$ は D_0 で本質的に自己共役であり，$H=H(g)$．さらに，$\mathrm{C}^\infty(H_0)$ は $H(g)$ に対するコアである．

証明 定理9.3.2の (2) によって

$$\mathrm{D}_0 \subset \bigcap_{1\leq s<1+\exp(2m)} \mathrm{L}^s(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}}).$$

したがって，任意の $\phi\in\mathrm{D}_0$ に対して ($1/s+1/p=1/2$ として)

$$\|H_I(g)\phi\|_2 \leq \|\phi\|_s \|H_I(g)\|_p < \infty.$$

これは，$\mathrm{D}_0\subset\mathrm{D}(H_I(g))$ を意味する．$t\geq s$ として

$$W(t,s)=e^{-(t-s)H_0}H_I(g)e^{-sH}$$

とおこう．このとき，$\phi\in\mathrm{D}_0$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\|\{W(t,s)-H_I(g)\}\phi\|_2\\
&\leq \|(e^{-(t-s)H_0}-1)H_I(g)(e^{-sH}-1)\phi\|_2\\
&\quad+\|(e^{-(t-s)H_0}-1)H_I(g)\phi\|_2\\
&\quad+\|H_I(g)(e^{-sH}-1)\phi\|_2\\
&\leq 3\|H_I(g)\|_p\|(e^{-sH}-1)\phi\|_q\\
&\quad+\|(e^{-(t-s)H_0}-1)H_I(g)\phi\|_2.
\end{aligned}$$

ただし，$1/p+1/q=1/2$．ここで，$\exp[-tH_0]$ ($t\geq 0$) が $\mathrm{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ 上の縮小演算子であることを用いた．$\exp[-sH]$ は $\mathrm{L}^q(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$ 上，s について強連続だから任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta_1(\varepsilon)>0$ が存在して，$0\leq s\leq\delta_1(\varepsilon)$ ならば，

$$\|(e^{-sH}-1)\phi\|_q<\varepsilon.$$

同様に，$0\leq t-s\leq\delta_2(\varepsilon)$ ならば

$$\|(e^{-(t-s)H_0}-1)H_I(g)\phi\|_2<\varepsilon$$

したがって，$0<t\leq\min\{\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$ ならば

$$\|(W(t,s)-H_I(g))\phi\|_2<(3\|H_I(g)\|_p+1)\varepsilon.$$

よって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta(\varepsilon)>0$ が存在して $0<t<\delta(\varepsilon)$ のとき

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t W(t,s)\phi ds-H_I(g)\phi\right\|_2<\varepsilon$$

となる．これは，

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-(t-s)H_0}H_I(g)e^{-sH}\phi ds = H_I(g)\phi$$

を意味する．したがって，(9.3.25) によって

$$\frac{e^{-tH_0}-1}{t}\phi = \frac{e^{-tH}-1}{t}\phi + \frac{1}{t}\int_0^t e^{-(t-s)H_0}H_I(g)e^{-sH}\phi ds$$
$$\underset{t\to 0}{\longrightarrow}[-H+H_I(g)]\phi$$

であるから，$\phi\in \mathsf{D}(H_0)$ であり，かつ $-H_0\phi=[-H+H_I(g)]\phi$ となる．よって，$\mathsf{D}_0\subset \mathsf{D}(H_0)\cap\mathsf{D}(H_I(g))$ であり

$$H\restriction \mathsf{D}_0 = H(g)\restriction \mathsf{D}_0$$

を得る．(a) によって，$H(g)$ は D_0 で本質的に自己共役である．

次に，$\mathsf{C}^\infty(H_0)$ が $H(g)$ のコアであることをいうには，$(H(g)\pm i)\mathsf{C}^\infty(H_0)$ が稠密であることを示せばよい．$\phi\in\mathsf{D}_0$ とすれば，すべての $t>0$ に対して $\exp(-tH_0)\phi\in\mathsf{C}^\infty(H_0)$ であり，$t\to+0$ のとき，

$$e^{-tH_0}\phi\to\phi,$$
$$H_0e^{-tH_0}\phi\to H_0\phi,$$
$$H_I(g)e^{-tH_0}\phi\to H_I(g)\phi$$

となる．したがって，$t\to+0$ のとき

$$[H(g)\pm i]e^{-tH_0}\phi\to(H(g)\pm i)\phi.$$

これは，$[H(g)\pm i]\mathsf{C}^\infty(H_0)$ が $[H(g)\pm i]\mathsf{D}_0$ で稠密なことを示している．一方，D_0 は $H(g)$ に対するコアであったから，$[H(g)\pm i]\mathsf{D}_0$ は $\mathscr{F}$ で稠密である．ゆえに，$[H(g)\pm i]\mathsf{C}^\infty(H_0)$ は稠密である．

最後に (2) を証明しよう．(9.3.10) によって

$$\begin{aligned}\|e^{-tH(g)}\| &\leqslant \|e^{-U([0,t]\otimes g)}\|_{q(t)}\\ &= \langle 1, J_t{}^*e^{-U(q(t)[0,t]\otimes g)}J_0 1\rangle^{1/q(t)}\\ &= \langle 1, e^{-tH(q(t)g)}1\rangle^{1/q(t)}.\end{aligned}$$

ところで，

$$-E(g)=\inf_{t>0}\frac{1}{t}\ln\|e^{-tH(g)}\|$$

であるから，(9.3.16) を得る．命題9.2.10と上の証明の (b) によって

$$\|e^{-U([0,t]\otimes g)}\|_{q(t)}\leqslant\|e^{-tH_I(g)}\|_{q(t)}.$$

したがって，

$$-E(g) \leqslant \frac{1}{tq(t)} \ln \|e^{-tq(t)H_I(g)}\|_1$$

$t \to +0$ のとき，$tq(t) \to 2/m$ となるから，(9.3.17) を得る．∎

以後，$\mathscr{F}$ における関数 1 (Fock 真空) を Ω_0 と記す．

系 9.3.4

$$\langle \Omega_0, e^{-tH(g)}\Omega_0 \rangle = \int e^{-U([0,t]\otimes g)} d\mu_{0,\mathrm{E}} \qquad (9.3.26)$$

証明 定理 9.3.3 の (3) によって $P(t) = \exp[-tH(g)]$ であるから

$$\begin{aligned}(9.3.26)\ の左辺 &= \langle \Omega_0, J_t{}^* F_{(0,t)} J_0 \Omega_0 \rangle \\ &= \langle 1, F_{(0,t)} 1 \rangle \\ &= (9.3.26)\ の右辺.\end{aligned}$$ ∎

次に，$E(g)$ が $H(g)$ の固有値になっていることを示そう．そのための準備として，

補題 9.3.5 各 $t > 0$ に対して，$e^{-tH(g)}$ は正値性改良演算子 (positivity-improving operator, P.I.O.) である．

証明 $\psi, \eta \in \mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$, $\psi \geqslant 0$, $\eta \geqslant 0$ とする．定理 3.4.5 によって，$e^{-tH_0} = \Gamma(e^{-t\omega})$ は，P.I.O. である．したがって，$\langle \psi, e^{-tH_0}\eta \rangle > 0$. $e^{-tH_0} = J_t{}^* J_0$ であるから，これは

$$\int (J_t\psi)(J_0\eta) d\mu_{0,\mathrm{E}} > 0$$

を意味する．J_t は P.P.O. であるから，$(J_t\psi)(J_0\eta) \geqslant 0$, $(J_t\psi)(J_0\eta) \neq 0$ となる．よって

$$\begin{aligned}\langle \psi, e^{-tH(g)}\eta \rangle &= \langle J_t\psi, F_{(0,t)} J_0\eta \rangle \\ &= \int (J_t\psi)(J_0\eta) e^{-U([0,t]\otimes g)} d\mu_{0,\mathrm{E}} > 0.\end{aligned}$$ ∎

定理 9.3.6 $E(g)$ は，$H(g)$ の固有値でその多重度は 1 である．$E(g)$ に対

する固有ベクトル $\Omega_g \in \mathcal{F}$ として $\|\Omega_g\|_{L^2(Q_F)}=1$, $\Omega_g>0$ a.e. をみたすものがとれる.

証明　$t>0$ ならば, 定理9.3.2の(2)によって, $p>2$ と t に依存する定数 $c_t>0$ が存在して

$$\|e^{-tH(g)}\psi\|_p \leqslant c_t\|\psi\|_2, \quad \psi\in\mathcal{F}$$

となる. 一方, 補題9.3.5によって, $e^{-tH(g)}$ は, P.I.O. である. したがって, 定理3.5.1と3.5.2から(特に $t=1$ として) $\|e^{-H(g)}\|=e^{-E(g)}$ は $e^{-H(g)}$ の多重度1の固有値であり, それに対応する固有ベクトル Ω_g としては, $\|\Omega_g\|_2=1$, $\Omega_g>0$ a.e. であるものがとれる. このとき, スペクトル定理によって $H(g)\Omega_g=E(g)\Omega_g$ となる. したがって, $E(g)$ は $H(g)$ の固有値である. Ω_g と一次独立なベクトル Ω で $H(g)\Omega=E(g)\Omega$ をみたすものがあれば, 再びスペクトル定理によって $e^{-H(g)}\Omega=e^{-E(g)}\Omega$ となる. したがって, $\Omega=c\Omega_g$ (c: 定数) でなければならないが, これは矛盾である. ゆえに, $E(g)$ は $H(g)$ の多重度1の固有値である. ∎

ベクトル Ω_g は**物理的真空** (physical vacuum) とか**物理的基底状態**などとよばれるもので, 理論構成の上で重要な役割をもつ. 固有値 $E(g)$ は, 物理的真空のエネルギーを表わす. これに対して,

系 9.3.7

$$E(g)=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|e^{-U([0,t]\otimes g)}\|_1, \tag{9.3.27}$$

あるいは

$$E(g)=-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\langle\Omega_0, e^{-tH(g)}\Omega_0\rangle \tag{9.3.28}$$

証明　Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned} e^{-tE(g)}|\langle\Omega_0,\Omega_g\rangle|^2 &= |\langle\Omega_0, e^{-\frac{t}{2}H(g)}\Omega_g\rangle|^2 \\ &\leqslant \|e^{-\frac{t}{2}H(g)}\Omega_0\|_2{}^2 = \langle\Omega_0, e^{-tH(g)}\Omega_0\rangle \\ &\leqslant \|e^{-tH(g)}\| = e^{-tE(g)}. \end{aligned}$$

$\langle\Omega_0,\Omega_g\rangle>0$ であるから, 上の不等式の対数をとれば,

$$\begin{aligned}-E(g)+\frac{2}{t}\ln\langle\Omega_0, \Omega_g\rangle\\ \leqslant \frac{1}{t}\ln\langle\Omega_0, e^{-tH(g)}\Omega_0\rangle\\ \leqslant -E(g).\end{aligned}$$

そこで，$t\to\infty$ とすれば，(9.3.28) を得る．(9.3.27) は，(9.3.28) と系 9.3.4 とによって得られる．∎

9.4 FKN 公式と Euclid 的 Gell-Mann-Low 公式

定理 9.4.1 (相互作用のある場合の FKN 公式) $G_0, \cdots, G_n$ を $\mathbf{R}^k$ 上の可測関数，$f_j \in \mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R})$，$j=1,2,\cdots$，$t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n$ とし，

$$G_j^{\mathrm{F}} = G_j(\phi_{\mathrm{F}}(f_1), \cdots, \phi_{\mathrm{F}}(f_k)) \tag{9.4.1}$$

$$G_j^{t_j} = J_{t_j}G_j^{\mathrm{F}} = G_j(\phi(\delta_{t_j}\otimes f_1), \cdots, \phi(\delta_{t_j}\otimes f_k)) \tag{9.4.2}$$

とおく．すべての $j=0,\cdots,n$ に対して

$$G_j^{\mathrm{F}} \in \bigcap_{p<\infty}\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}, d\mu_{0,\mathrm{F}})$$

と仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}&\langle\Omega_0,\ G_0^{\mathrm{F}}e^{-(t_1-t_0)H(g)}G_1^{\mathrm{F}}e^{-(t_2-t_1)H(g)}\cdots G_{n-1}^{\mathrm{F}}e^{-(t_n-t_{n-1})H(g)}G_n^{\mathrm{F}}\Omega_0\rangle\\ &= \int G_0^{t_0}\cdots G_n^{t_n}e^{-U([t_0,t_n]\otimes g)}d\mu_{0,\mathrm{E}}.\end{aligned} \tag{9.4.3}$$

証明 G_j^{F} に対する仮定と，$e^{-tH(g)}$ $(t>0)$ が各 $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}})$ から $\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}})$ への有界演算子であることによって，

$$G_j^{\mathrm{F}}e^{-(t_{j+1}-t_j)H(g)}\cdots G_{n-1}^{\mathrm{F}}e^{-(t_n-t_{n-1})H(g)}G_n^{\mathrm{F}}\Omega_0 \in \mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}}) \qquad j=0,1,\cdots,n$$

がなりたつ (Hölder の不等式による)．したがって，(9.4.3) の左辺では，$G_k^{\mathrm{F}}e^{-(t_{k+1}-t_k)H(g)}$ $(k=0,1,\cdots)$ をいくつ左側の Ω_0 の方へ移しても $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}})$ の内積として意味をもつ．また，$G_j^{\mathrm{F}}\in\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}})$ ならば，$G_j^t = J_tG_j^{\mathrm{F}}\in\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}})$ であるから，$G_j^{t_j}\in\bigcap_{1\leq p<\infty}\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}})$．したがって，(9.4.3) の右辺も意味をもつ．さて，$t>s$ のとき，

$$e^{-(t-s)\mathrm{H}(g)} = J_t{}^* F_{(s,t)} J_s = J_s{}^* F_{(s,t)} J_t$$

であるから

$$\begin{aligned}&[(9.4.3) \text{ の左辺}]\\ &= \langle 1,\ J_{t_0} G_0{}^{\mathrm{F}} J_{t_0}{}^* F_{(t_0,t_1)} J_{t_1} G_1{}^{\mathrm{F}} J_{t_1}{}^* \cdots J_{t_n} G_n{}^{\mathrm{F}} J_{t_n}{}^* 1\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathrm{Q_E})}\\ &= \langle 1,\ G_0{}^{t_0} E_{t_0} F_{(t_0,t_1)} E_{t_1} G_1{}^{t_1} E_{t_1} \cdots F_{(t_{n-1},t_n)} E_{t_n} G_n{}^{t_n} 1\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathrm{Q_E})}\end{aligned}$$

ここで，$J_s G^{\mathrm{F}} J_s{}^* = E_s G^s E_s$，$E_s 1 = 1$ を用いた．定理 4.6.8 の場合と同様に，演算子 $\{E_{[a,b]}\}$ のもつ Markov 性により，上式右辺の表示において，E_{t_j} はすべてなしでよい．よって

$$\begin{aligned}&[(9.4.3) \text{ の左辺}] = \langle 1,\ G_0{}^{t_0} F_{(t_0,t_1)} G_1{}^{t_1} \cdots F_{(t_{n-1},t_n)} G_n{}^{t_n} 1\rangle\\ &= \int G_0{}^{t_0} \cdots G_n{}^{t_n} F_{(t_0,t_1)} \cdots F_{(t_{n-1},t_n)} d\mu_{0,\mathrm{E}} = [(9.4.3) \text{ の右辺}]\end{aligned}$$

となる．▮

定理 9.4.2（切断のある，Euclid 的 Gell-Mann-Low 公式）

$$\hat{H} \equiv \hat{H}(g) \equiv H(g) - E(g) \tag{9.4.4}$$

とおく．$G_0, \cdots, G_n, G_j{}^{\mathrm{F}}, G_j{}^{t_j}, t_0, \cdots, t_n$，を定理 9.4.1 のようにとる．このとき，

$$\begin{aligned}&\langle \Omega_g,\ G_0{}^{\mathrm{F}} e^{-(t_1-t_0)\hat{H}} G_1{}^{\mathrm{F}} e^{-(t_2-t_1)\hat{H}} \cdots G_{n-1}{}^{\mathrm{F}} e^{-(t_n-t_{n-1})\hat{H}} G_n{}^{\mathrm{F}} \Omega_g\rangle\\ &= \lim_{t\to\infty} \int G_0{}^{t_0} \cdots G_n{}^{t_n} d\mu_{[-t,t]\otimes g},\end{aligned} \tag{9.4.5}$$

特に，

$$\begin{aligned}&\langle \Omega_g,\ \phi_{\mathrm{F}}(f_1) e^{-(t_2-t_1)\hat{H}} \phi_{\mathrm{F}}(f_2) e^{-(t_3-t_2)\hat{H}} \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\hat{H}} \phi_{\mathrm{F}}(f_n) \Omega_g\rangle\\ &= \lim_{t\to\infty} \int \phi(\delta_{t_1} \otimes f_1) \cdots \phi(\delta_{t_n} \otimes f_n) d\mu_{[-t,t]\otimes g}.\end{aligned} \tag{9.4.6}$$

証明　FKN 公式によって，$-t < t_0 \leqslant t_1 \cdots \leqslant t_n < t$ のとき，

$$\int G_0{}^{t_0} \cdots G_n{}^{t_n} d\mu_{[-t,t]\otimes g} = \frac{N(t)}{D(t)}$$

と書ける．ただし，

$$N(t) = \langle \Omega_0,\ e^{-(t_0+t)\hat{H}} G_0{}^{\mathrm{F}} e^{-(t_1-t_0)\hat{H}} G_1{}^{\mathrm{F}} \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\hat{H}} G_n{}^{\mathrm{F}} e^{-(t-t_n)\hat{H}} \Omega_0\rangle$$

$$D(t) = \langle \Omega_0,\ e^{-2t\hat{H}} \Omega_0\rangle.$$

基底状態 Ω_g の一意性とスペクトル定理によって

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t\hat{H}}\phi = \langle\Omega_g, \phi\rangle\Omega_g, \qquad \phi \in \mathscr{F}, \tag{9.4.7}$$

となる．ただし，左辺の極限は $\mathscr{F}$ のノルムでとる．したがって，

$$\lim_{t\to\infty} D(t) = \langle\Omega_0, \Omega_g\rangle^2 \equiv D > 0.$$

(9.4.5) の左辺を L とおこう．このとき，

$$\begin{aligned}
&|N(t)-LD| \\
&\leqslant D^{1/2}|\langle e^{-(t+t_0)\hat{H}}\Omega_0 - D^{1/2}\Omega_g,\ G_0{}^{\mathrm{F}}e^{-(t_1-t_0)\hat{H}}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})\hat{H}}G_n{}^{\mathrm{F}}\Omega_g\rangle| \\
&\quad + |\langle e^{-(t+t_0)\hat{H}}\Omega_0,\ G_0{}^{\mathrm{F}}e^{-(t_1-t_0)\hat{H}}\cdots G_n{}^{\mathrm{F}}(e^{-(t-t_n)\hat{H}}\Omega_0 - D^{1/2}\Omega_g)\rangle|.
\end{aligned}$$

第1項は，(9.4.7) によって $t\to\infty$ で 0 に収束する．第2項は，Schwarz と Hölder の不等式を用いて

$$c(t_1, \cdots, t_n)\|G_0{}^{\mathrm{F}}\|_{p_0}\cdots\|G_n{}^{\mathrm{F}}\|_{p_n}\|e^{-(t-t_n)\hat{H}}\Omega_0 - D^{1/2}\Omega_g\|_q$$

で抑えられる．ここで，$p_1, \cdots, p_n, q > 2$ であり，とくに $1/p_n + 1/q = 1/2$ の関係がある．$c(t_1, \cdots, t_n)$ は $t_1, \cdots, t_n$ に依存する定数である ($\exp[-sH(g)]$ $(s>0)$ は $\bigcup_{p\geqslant 2} \mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}})$ から $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{F}})$ への有界演算子であることに注意)．そこで，$q < 1+e^{2m\alpha}$ となる $\alpha > 0$ をとり，$t-t_n-\alpha > 0$ となるように，t を十分大きくとっておくと，$\exp[-\alpha\hat{H}]\Omega_g = \Omega_g$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\|e^{-(t-t_n)\hat{H}}\Omega_0 - D^{1/2}\Omega_g\|_q \\
&\quad = \|e^{-\alpha\hat{H}}(e^{-(t-t_n-\alpha)\hat{H}}\Omega_0 - D^{1/2}\Omega_g)\|_q \\
&\quad \leqslant \text{const.}\|e^{-(t-t_n-\alpha)\hat{H}}\Omega_0 - D^{1/2}\Omega_g\|_2 \\
&\quad \to 0 \quad (t\to\infty).
\end{aligned}$$

ここで，最後の不等号を得るのに，定理 9.3.2 の (2) を用いた．こうして，

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = LD$$

を得る．したがって，$\lim_{t\to\infty} N(t)/D(t) = L$ となり，(9.4.5) が示される．(9.4.6) を得るには，$G_j(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$ という関数を考えて，(9.4.5) に当てはめればよい．∎

9.5 真空エネルギーの体積依存性と van Hove-Miyatake 現象

$l>0$ に対して，区間 $[-l/2, l/2]$ に対する定義関数を χ_l としよう：

$$\chi_l(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-l/2, l/2] \\ 0 & x \in [-l/2, l/2]^c \end{cases} \tag{9.5.1}$$

これに対応して，$\lambda>0$ として

$$E_l(\lambda) = E(\lambda\chi_l) \tag{9.5.2}$$

とおく．λ は，相互作用の結合定数を表わすパラメーターである．この節の主な目的は，$E_l(\lambda)$ の l 依存性を調べることである．

$$H_l(\lambda) = H(\lambda\chi_l) \tag{9.5.3}$$

とおこう．

定理 9.5.1　すべての $l, t>0$ に対して，

$$\langle \Omega_0, e^{-tH_l(\lambda)}\Omega_0\rangle = \langle \Omega_0, e^{-lH_t(\lambda)}\Omega_0\rangle. \tag{9.5.4}$$

証明　FKN 公式によって（系 9.3.4）

$$\langle \Omega_0, e^{-tH_l(\lambda)}\Omega_0\rangle = \int d\mu_{0,\mathrm{E}} e^{-\lambda U([0,t]\otimes\chi_l)}.$$

そこで，座標変換

$$\tau' = x + \frac{l}{2}, \qquad x' = -\tau + \frac{t}{2}$$

を $\alpha \in \mathbf{E}^2$（2次元 Euclid 群）とすれば，相互作用の Euclid 共変性（補題 9.3.1）によって，

$$\int d\mu_{0,\mathrm{E}} e^{-\lambda U([0,t]\otimes\chi_l)}$$
$$= \int d\mu_{0,\mathrm{E}} \Gamma(u_\alpha) e^{-\lambda U(u_\alpha[0,t]\otimes\chi_l)}.$$

$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_\mathrm{E})$ での $\Gamma(u_\alpha)$ のユニタリ性と $\Gamma(u_\alpha)^*1=1$，$u_\alpha[0,t]\otimes\chi_l = [0,l]\otimes\chi_t$ を用いると，上式は

$$\int d\mu_{0,\mathrm{E}} e^{-\lambda U([0,l]\otimes\chi_t)} = \langle \Omega_0, e^{-lH_t(\lambda)}\Omega_0\rangle$$

となる．よって，(9.5.4) を得る．∎

等式 (9.5.4) は **Nelson の対称性** (Nelson (1973), Guerra (1972)) とよばれている．その証明の核心は，相互作用の Euclid 共変性にあった．等式 (9.5.4) は Minkowski 的世界での表現であり，この世界で Euclid 共変性は Lorentz 共変性となるから，Nelson の対称性は Lorentz 共変性のひとつのあらわれといえる．

さて，

$$\alpha_l(\lambda) = -\frac{E_l(\lambda)}{l} \tag{9.5.5}$$

とおこう．$-\alpha_l(\lambda)$ は，領域 $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ にある相互作用系の，単位体積あたりの真空エネルギーを表わす．

定理 9.5.2

(1) すべての $l>0$ に対して $\alpha_l(\lambda)>0$. さらに，すべての $l,t>0$ に対して

$$\alpha_l(\lambda) \leqslant -(tq(t))^{-1}E_t(q(t)\lambda). \tag{9.5.6}$$

ただし，$q(t)$ は (9.3.11) であたえられる．

(2) $\alpha_l(\lambda)$ は l の単調増加関数である．とくに，

$$\alpha_\infty(\lambda) \equiv \lim_{l\to\infty} \alpha_l(\lambda) > 0 \tag{9.5.7}$$

は存在する．

証明 (1) (9.3.16) によって

$$\begin{aligned}
-E_l(\lambda) &\leqslant [tq(t)]^{-1} \ln \langle \Omega_0, e^{-tH_l(q(t)\lambda)}\Omega_0\rangle \\
&= [tq(t)]^{-1} \ln \langle \Omega_0,\ e^{-lH_t(q(t)\lambda)}\Omega_0\rangle \qquad \text{(Nelson の対称性)} \\
&\leqslant [tq(t)]^{-1} \ln \|e^{-lH_t(q(t)\lambda)}\| \\
&= [tq(t)]^{-1} \ln e^{-lE_t(q(t)\lambda)} \\
&= -l[tq(t)]^{-1}E_t(q(t)\lambda)
\end{aligned}$$

したがって，(9.5.6) を得る．$\alpha_l(\lambda)>0$ を示すためには，変分不等式

$$E_l(\lambda) \leqslant \langle \Omega_0, H_l(\lambda)\Omega_0\rangle$$

を用いればよい．

$$H_0\Omega_0=0, \qquad \langle\Omega_0, H_I(\lambda\chi_l)\Omega_0\rangle = 0$$

であるから，上式の右辺は0である．したがって，$E_l(\lambda) \leqslant 0$.

もし $E_l(\lambda)=0$ だとすると，$H_l(\lambda) \geqslant 0$ だから，$\langle\Omega_0, H_l(\lambda)\Omega_0\rangle=0$ は，$\|H_l(\lambda)^{1/2}\Omega_0\|^2=0$ を意味する．したがって $H_l(\lambda)\Omega_0=0$ となり，$H_I(\chi_l)\Omega_0=0$ となるが，実際には，$H_I(\chi_l)\Omega_0=H_I(\chi_l)\neq 0$ だから，矛盾である．よって，$E_l(\lambda)<0$，すなわち，$\alpha_l(\lambda)>0$ となる．

（2）一般に，$[0,\infty)$ 上の確率測度を μ とするとき，$0<a<1$ ならば，Hölder の不等式によって

$$\int_0^\infty x^a d\mu \leqslant \left(\int_0^\infty x d\mu\right)^a.$$

したがって，一般に Hilbert 空間 H における正の自己共役演算子 A があたえられたとき，

$$\langle\psi, A^a\psi\rangle_{\mathsf{H}} \leqslant \langle\psi, A\psi\rangle_{\mathsf{H}}{}^a, \quad 0<a<1, \quad \|\psi\|=1, \ \psi\in \mathsf{D}(A)$$

がなりたつ（スペクトル分解定理による）．よって，$A=\exp[-lH_l(\lambda)]$ に対し，$0<a<1$ として

$$\langle\Omega_0, e^{-laH_l(\lambda)}\Omega_0\rangle \leqslant \langle\Omega_0, e^{-lH_l(\lambda)}\Omega_0\rangle^a.$$

Nelson の対称性によって，左辺，右辺は，それぞれ

$$\langle\Omega_0, e^{-tH_{la}(\lambda)}\Omega_0\rangle, \qquad \langle\Omega_0, e^{-tH_l(\lambda)}\Omega_0\rangle^a$$

に等しいから，

$$\frac{1}{t}\ln\langle\Omega_0, e^{-tH_{la}(\lambda)}\Omega_0\rangle \leqslant \frac{a}{t}\ln\langle\Omega_0, e^{-tH_l(\lambda)}\Omega_0\rangle$$

となる．$t\to\infty$ とすれば，系 9.3.7 により

$$-E_{la}(\lambda) \leqslant -aE_l(\lambda).$$

すなわち，$\alpha_{la}(\lambda) \leqslant \alpha_l(\lambda)$ となる．$a\in(0,1)$ は任意であったから，これは，$\alpha_l(\lambda)$ の l についての単調増加性を示している．(1) によって，$\alpha_l(\lambda)$ は，l に関して上に有界であるから，$\alpha_\infty(\lambda)$ は存在する．■

$\alpha_\infty(\lambda)>0$ の存在により，$l\to\infty$ のとき，$E_l=-l\alpha_l(\lambda)\to-\infty$ となることがわかる．これも，場の量子論に現われる発散のひとつであって，**真空エネルギーの発散**とよばれている．したがって，$l\to\infty$ の極限を考える際には，全

ハミルトニアンを次のように再規格化しておく必要がある：

$$\hat{H}_l(\lambda) \equiv H_l(\lambda) - E_l(\lambda). \tag{9.5.8}$$

これを**真空エネルギーのくりこみ**といい，$\hat{H}_l(\lambda)$ を**くりこまれたハミルトニアン** (renormalized Hamiltonian) とよぶ．$\hat{H}_l(\lambda)$ は非負の自己共役演算子となる．

次に，l に依存する，$E_l(\lambda)$ の上界を求めたい（トリヴィアルな上界は0である）．そのために，以下の量を導入する：

$$\beta_l(\lambda) \equiv -E_l - \alpha_\infty l, \tag{9.5.9}$$

$$\eta_l(\lambda) \equiv -[\ln\langle \Omega_0, \Omega_l(\lambda)\rangle^2]/l. \tag{9.5.10}$$

ただし，$\Omega_l(\lambda)$ は，$H_l(\lambda)$ の基底状態（真空）である．また，

$$\bar{\eta}(\lambda) = \overline{\lim_{l\to\infty}}\, \eta_l(\lambda), \quad \underline{\eta}(\lambda) = \underline{\lim}_{l\to\infty}\, \eta_l(\lambda) \tag{9.5.11}$$

とおく．

定理 9.5.3 λ に依存する定数 $c(\lambda) > 0$ が存在して，すべての l に対して

$$0 \leqslant \eta_l(\lambda) \leqslant c(\lambda). \tag{9.5.12}$$

特に

$$0 \leqslant \underline{\eta}(\lambda), \quad \bar{\eta}(\lambda) < \infty \tag{9.5.13}$$

証明 定理9.3.2(2)によって，ある $T > 0$ に対して $\exp[-TH_l(\lambda)]$ は，すべての λ, l に対して，$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ から $\mathsf{L}^4(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ への有界演算子であり，

$$\|e^{-TH_l(\lambda)}\|_{2,4} \leqslant \|e^{-\lambda U([0,T]\otimes\chi_l)}\|_r$$

となる $r > 1$ が存在する．系9.3.4によって

$$\begin{aligned}\|e^{-\lambda U([0,T]\otimes\chi_l)}\|_r &= \langle \Omega_0, e^{-TH_l(r\lambda)}\Omega_0\rangle^{1/r} \\ &\leqslant e^{-E_l(r\lambda)T/r} \\ &= e^{\alpha_l(\lambda r)lT/r} \leqslant e^{\alpha_\infty(\lambda r)lT/r}.\end{aligned}$$

したがって，$c(\lambda) = \alpha_\infty(\lambda r)T/r$ とおけば，

$$\|e^{-TH_l(\lambda)}\|_{2,4} \leqslant e^{c(\lambda)l}.$$

$E_l(\lambda) < 0$ だから

$$\begin{aligned}\|\Omega_l(\lambda)\|_4 &\leqslant e^{-TE_l}\|\Omega_l(\lambda)\|_4 \\ &= \|e^{-TH_l(\lambda)}\Omega_l(\lambda)\|_4 \leqslant e^{c(\lambda)l}.\end{aligned}$$

Hölder の不等式 ($p = 3/2, q = 3$) によって

$$\begin{aligned}1 &= \|\Omega_l(\lambda)\|_2 \\ &\leqslant \|\Omega_l(\lambda)\|_1{}^{1/3}\|\Omega_l(\lambda)\|_4{}^{2/3} \leqslant \|\Omega_l(\lambda)\|_1{}^{1/3}e^{2c(\lambda)l/3}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\langle\Omega_0, \Omega_l(\lambda)\rangle = \|\Omega_l(\lambda)\|_1 \geqslant e^{-2c(\lambda)l}.$$

ゆえに，

$$\eta_l(\lambda) \leqslant 4c(\lambda).$$

他方，Schwarz の不等式によって

$$\langle\Omega_0, \Omega_l(\lambda)\rangle \leqslant \|\Omega_l(\lambda)\|_2 = 1.$$

したがって，

$$\eta_l(\lambda) \geqslant 0.$$

よって，(9.5.12) を得る．■

定理 9.5.4　任意の $t>0$, l, λ に対して

$$\beta_t(\lambda) \geqslant t[\alpha_l(\lambda)-\alpha_\infty(\lambda)]-\eta_l(\lambda). \tag{9.5.14}$$

証明　ここでは λ を書くことは省略する．

$$\begin{aligned}e^{-lE_t} &\geqslant \langle\Omega_0, e^{-lH_t}\Omega_0\rangle \\ &= \langle\Omega_0, e^{-tH_l}\Omega_0\rangle \qquad \text{(Nelson の対称性)} \\ &= \|e^{-tH_l/2}\Omega_0\|_2{}^2 \\ &\geqslant \langle\Omega_l, e^{-tH_l/2}\Omega_0\rangle^2 \qquad (\Omega_l \text{ への射影}) \\ &= e^{-tE_l}\langle\Omega_l, \Omega_0\rangle^2.\end{aligned}$$

したがって

$$-E_t \geqslant t\alpha_l-\eta_l.$$

ゆえに，(9.5.14)を得る．■

定理 9.5.5

（1） $\beta_l(\lambda)$ は，l について単調減少である．特に

$$\beta_\infty(\lambda) \equiv \lim_{l\to\infty}\beta_l(\lambda) \tag{9.5.15}$$

が存在する．

（2） すべての $l>0$, $\lambda>0$ に対して

$$-\underline{\eta}(\lambda) \leqslant \beta_l(\lambda) < 0 \tag{9.5.16}$$

証明

(1) (9.5.11) で定義した $\underline{\eta}$ に対して，l の適当な部分列をとれば，$\eta_l(\lambda) \to \underline{\eta}(\lambda)$ にできるから，定理 9.5.4 により

$$\beta_l(\lambda) \geqslant -\underline{\eta}(\lambda). \tag{9.5.16$'$}$$

すなわち，(9.5.16) の左側の不等式を得る．系 9.3.7 によって

$$\begin{aligned} E_l - E_{l+a} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\langle \Omega_0, e^{-tH_{l+a}}\Omega_0\rangle}{\langle \Omega_0, e^{-tH_l}\Omega_0\rangle} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\langle \Omega_0, e^{-(l+a)H_t}\Omega_0\rangle}{\langle \Omega_0, e^{-lH_t}\Omega_0\rangle} \quad \text{(Nelson の対称性)}. \end{aligned}$$

ただし，λ を記すのは省略した．ここで，$e^{-lH_t/2}\Omega_0 \equiv \phi$ とおけば，上式の右辺は，

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\langle \phi, e^{-aH_t}\phi\rangle}{\|\phi\|^2} \\ &\leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln e^{at\alpha_t} \leqslant a\alpha_\infty. \end{aligned}$$

のように抑えられるから，

$$-E_{l+a} - (l+a)\alpha_\infty \leqslant -E_l - l\alpha_\infty.$$

すなわち，すべての $l, a > 0$ に対して

$$\beta_{l+a} \leqslant \beta_l.$$

したがって，β_l は l に関して単調減少である．(9.5.16)$'$ によって，β_l は下に有界だから，β_∞ は存在する．

(2) 定義によって，$\beta_l(\lambda) \leqslant 0$ は容易にわかる．そこで実際に，$\beta_l(\lambda) < 0$ を示したい．それには，(9.5.9) において $E_l = -l\alpha_l(\lambda)$ に注意して $\alpha_l(\lambda)$ が $l \to 0$ とともに 0 にゆくことをいえばよい．定理 9.5.2 (1) の証明から，

$$\alpha_l(\lambda) \leqslant [ltq(t)]^{-1} \ln \langle \Omega_0, e^{-lH_t(q(t)\lambda)}\Omega_0\rangle.$$

Taylor の定理によって

$$\langle \Omega_0, e^{-lH_t(q(t)\lambda)}\Omega_0\rangle = 1 + \frac{l^2}{2} \langle H_t(q(t)\lambda)\Omega_0,\ e^{-\theta l H_t(q(t)\lambda)} H_t(q(t)\lambda)\Omega_0\rangle$$

となる θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する．ここで，$\langle \Omega_0, H_t(q(t)\lambda)\Omega_0\rangle = 0$ を用いた．

したがって，$0<l<1$ とすれば，c_1 をある定数として

$$\langle \Omega_0, e^{-lH_l(q(t)\lambda)}\Omega_0\rangle \leqslant 1+c_1 l^2.$$

ゆえに，十分小さな l に対して

$$\alpha_l(\lambda) \leqslant c_2 l \qquad (c_2 \text{ は定数} > 0)$$

となる．$\alpha_l(\lambda)>0$ だから，これは，$l\to 0$ のとき $\alpha_l(\lambda)\to 0$ となることを示している．したがって，(9.5.9) により，十分に小さな l に対しては，$\beta_l(\lambda)<0$ となる．ゆえに，(1) により，すべての $l>0$ に対して $\beta_l(\lambda)<0$ である．∎

定理9.5.5 (2) から，特に $\underline{\eta}(\lambda)>0$ を得るが，これは，次の興味ぶかい結果をもたらす：

系 9.5.6　すべての $\psi\in\mathscr{F}$ に対して

$$\lim_{l\to\infty}\langle\psi, \Omega_l(\lambda)\rangle = 0. \tag{9.5.17}$$

証明　十分大きな l に対して，

$$0<\langle\Omega_0, \Omega_l(\lambda)\rangle = e^{-l\eta_l(\lambda)/2} \leqslant e^{-l\underline{\eta}(\lambda)/2}.$$

$\underline{\eta}(\lambda)>0$ だから，

$$\lim_{l\to\infty}\langle\Omega_0, \Omega_l(\lambda)\rangle = 0$$

となる．$\langle\Omega_0, \Omega_l(\lambda)\rangle = \|\Omega_l(\lambda)\|_1$ であるから，すべての $\psi\in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ に対して

$$|\langle\psi, \Omega_l(\lambda)\rangle| \leqslant \|\psi\|_\infty\|\Omega_l(\lambda)\|_1 \to 0 \qquad (l\to\infty).$$

$\mathrm{L}^\infty(\mathbf{Q}_\mathrm{F})$ は $\mathscr{F}$ で稠密であり，$\|\Omega_l(\lambda)\|_2=1$ であるので，すべての $\psi\in\mathscr{F}$ に対して，(9.5.17) を得る．∎

系9.5.6は，空間切断なしの物理的真空——形式的には $\lim_{l\to\infty}\Omega_l(\lambda)\equiv\Omega(\lambda)$ で定義されるべきベクトル——が Fock 空間 $\mathscr{F}$ の中には存在し得ないことを意味している．これは，空間切断なしの理論——それが存在するとすれば——においては，その状態の Hilbert 空間が Fock 空間とは異なったものでなければならないことを暗示している．(9.5.17) は，標語的に，‘空間切断なしの真空は，Fock 空間と直交する’ と表現される．これは，**van Hove-Miyatake**

現象とよばれており，場の量子論における典型的な現象である．この現象によって，物理の文献で通常なされている形式的摂動論は破綻する．なぜなら，形式的摂動論は，空間切断なしの真空 $\Omega(\lambda)$ を形式的に

$$\Omega(\lambda)=\Omega_0+\lambda\Omega_0^{(1)}+\lambda^2\Omega_0^{(2)}+\cdots\cdots$$

と展開し，$\Omega_0^{(j)}$ を Fock 空間のベクトルとして逐次近似的に定めてゆこうとするものだからである．

定理 9.5.5 と $-E_l(\lambda)/l\leqslant\alpha_\infty(\lambda)$ とを合わせると：

系 9.5.7 すべての $l,\lambda>0$ に対して

$$-\alpha_\infty(\lambda)l\leqslant E_l(\lambda)\leqslant-\alpha_\infty(\lambda)l-\beta_\infty(\lambda). \tag{9.5.18}$$

9.6 ϕ_F の相対限界といくつかの評価式

この節では，$f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ とするとき，汎関数

$$\int e^{\phi(f)}d\mu_{[0,t]\otimes\chi_l}$$

の限界で，t,l に依存しないものをもとめたい．ただし，$d\mu_{[0,t]\otimes\chi_l}$ は (9.3.2) に定義されている．その最初のステップとして，(9.5.8) で定義されたくりこまれたハミルトニアン $\hat{H}_l(\lambda)$ に相対的な $\phi_F(\cdot)$の限界を求める．

そのために，$\operatorname{supp} f\subset[-l/2,l/2]$ をみたす実数値関数 $f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して，演算子 $H_l^f(\lambda)$ を

$$H_l^f(\lambda)=H_l(\lambda)+\phi_F(f) \tag{9.6.1}$$

によって導入する．$H(g)$ のときと同様にして，$H_l^f(\lambda)$ は $C^\infty(H_0)$ 上で本質的に自己共役であり，下に有界であることが示される．$H_l^f(\lambda)$ の真空エネルギーを $E_l^f(\lambda)$ と書く．

補題 9.6.1 $\operatorname{supp} f$ が長さ 1 の区間に含まれるとし，$\tilde{f}$ を，$\operatorname{supp}\tilde{f}\subset[-1/2,1/2]$ となるように，f を平行移動したものとする．このとき，

(1)
$$-E_l^f(\lambda)\leqslant-E_l(\lambda)-\alpha_\infty(\lambda)-\beta_\infty(\lambda)-\frac{1}{\lambda_0}E_1^{\lambda_0 f}(\lambda_0\lambda) \tag{9.6.2}$$

ただし，$\lambda_0=2/(1-e^{-m})$.

（2）
$$-E_l{}^f(\lambda) \leqslant -E_l(\lambda)-\alpha_\infty(\lambda)-\beta_\infty(\lambda) -\frac{1}{2\lambda_0}E_1(2\lambda_0\lambda)-\frac{1}{2\lambda_0}E_0{}^{2\lambda_0 f}(0) \tag{9.6.3}$$

証明　系 9.3.4 と同様に,

$$\langle \Omega_0, e^{-tH_l{}^f(\lambda)}\Omega_0\rangle = \int d\mu_{0,\mathrm{E}}F_1F_2F_3$$

と書ける．ただし，$\operatorname{supp} f \subset [a,b]$，$-l/2<a<b<l/2$，$b-a=1$ とし,

$$F_1 = \exp[-\lambda U([0,t]\otimes\chi_{[-l/2,a]})]$$
$$F_2 = \exp[-\lambda U([0,t]\otimes\chi_{[a,b]})-\phi([0,t]\otimes f)]$$
$$F_3 = \exp[-\lambda U([0,t]\otimes\chi_{[b,l/2]})]$$

$\alpha\in\mathbf{E}^2$ を $\pi/2$ の回転とすれば，任意の t,c,d に対して

$$u_\alpha{}^{-1}(\chi_{[0,t]}\otimes\chi_{[c,d]}) = \chi_{[c,d]}\otimes\chi_{[-t,0]}$$

であるから，$d\mu_{0,\mathrm{E}}$ の Euclid 不変性を用いると

$$\langle \Omega_0, e^{-tH_l{}^f(\lambda)}\Omega_0\rangle = \int d\mu_{0,\mathrm{E}}G_1G_2G_3 \tag{9.6.4}$$

となる．ただし

$$G_1 = \exp[-\lambda U([-l/2,a]\otimes\chi_{[-t,0]})]$$
$$G_2 = \exp[-\lambda U([a,b]\otimes\chi_{[-t,0]})-\phi(f\otimes\chi_{[-t,0]})]$$
$$G_3 = \exp[-\lambda U([b,l/2]\otimes\chi_{[-t,0]})]$$

G_1, G_2, G_3 はそれぞれ $\Sigma_{[-l/2,a]}$-可測，$\Sigma_{[a,b]}$-可測，$\Sigma_{[b,l/2]}$-可測であるから，Markov 性によって

$$\int d\mu_{0,\mathrm{E}}G_1G_2G_3 = \langle G_1, E_aG_2E_bG_3\rangle_{L^2(Q_\mathrm{E})}$$
$$= \langle J_a{}^*G_1, J_a{}^*G_2J_bJ_b{}^*G_3\rangle_{L^2(Q_\mathrm{F})} \leqslant \|J_a{}^*G_1\|_2\,\|J_b{}^*G_3\|_2\,\|J_a{}^*G_2J_b\|. \tag{9.6.5}$$

そこで，まず，$\|J_a{}^*G_1\|_2$ を評価するために，$t=a$ に関する鏡映を $r(a)$ とし，$\tilde{G}_1=\Gamma(u_{r(a)})G_1$ とおく．このとき，$\tilde{G}_1$ は $\Sigma_{[a,l/2+2a]}$-可測となるから，Markov 性と $E_a\Gamma(u_{r(a)})=E_a$ を用いると

$$\|J_a{}^*G_1\|_2{}^2 = \langle G_1, E_aG_1\rangle_{L^2(Q_\mathrm{E})}$$

$$= \langle G_1, E_a \tilde{G}_1 \rangle_{L^2(Q_E)} = \int G_1 \tilde{G}_1 d\mu_{0,E}.$$

一方，Euclid 不変性によって

$$\int G_1 \tilde{G}_1 d\mu_{0,E} = \int \exp\{-\lambda U([-l/2, a] \otimes \chi_{[-t,0]})\}$$
$$\exp\{-\lambda U([a, l/2+2a] \otimes \chi_{[-t,0]})\} d\mu_{0,E}$$
$$= \int \exp\{-\lambda U([-l/2, l/2+2a] \otimes \chi_{[-t,0]})\} d\mu_{0,E}$$
$$= \int \exp\{-\lambda U([0, l+2a] \otimes \chi_t)\} d\mu_{0,E}$$
$$= \langle \Omega_0, e^{-(l+2a)H_t} \Omega_0 \rangle$$
$$= \langle \Omega_0, e^{-tH_{2a+l}} \Omega_0 \rangle. \qquad \text{(Nelson の対称性)}$$

したがって

$$\|J_a{}^* G_1\|_2 \leqslant \langle \Omega_0, e^{-tH_{2a+l}} \Omega_0 \rangle^{1/2}.$$

同様にして

$$\|J_b{}^* G_3\|_2 \leqslant \langle \Omega_0, e^{-tH_{l-2b}} \Omega_0 \rangle^{1/2}. \tag{9.6.6}$$

また，定理 9.3.2 (2) の証明によって

$$\|J_a{}^* G_2 J_b\| \leqslant \|G_2\|_{\lambda_0}. \tag{9.6.7}$$

ここで，$b-a=1$ を用いた．ところが，Euclid 不変性によって，

$$\|G_2\|_{\lambda_0}{}^{\lambda_0} = \langle \Omega_0, e^{-tH_1{}^{\lambda_0 f}(\lambda_0 \lambda)} \Omega_0 \rangle.$$

であるから

$$\|J_a{}^* G_2 J_b\| \leqslant \langle \Omega_0, e^{-tH_1{}^{\lambda_0 f}(\lambda_0 \lambda)} \Omega_0 \rangle^{1/\lambda_0}.$$

これと (9.6.4)〜(9.6.7) によって

$$\langle \Omega_0, e^{-tH_l{}^f(\lambda)} \Omega_0 \rangle \leqslant \langle \Omega_0, e^{-tH_{l+2a}(\lambda)} \Omega_0 \rangle^{1/2}$$
$$\times \langle \Omega_0, e^{-tH_{l-2b}(\lambda)} \Omega_0 \rangle^{1/2} \langle \Omega_0, e^{-tH_1{}^{\lambda_0 f}(\lambda_0 \lambda)} \Omega_0 \rangle^{1/\lambda_0}.$$

そこで，この両辺の対数をとり，t で割って，$t \to \infty$ とすれば

$$-E_l{}^f(\lambda) \leqslant -\frac{1}{2} E_{l+2a}(\lambda) - \frac{1}{2} E_{l-2b}(\lambda) - \frac{1}{\lambda_0} E_1{}^{\lambda_0 f}(\lambda_0 \lambda).$$

一方，系 9.5.7 によって，

$$E_l(\lambda) - \frac{1}{2} E_{l+2a}(\lambda) - \frac{1}{2} E_{l-2b}(\lambda) \leqslant -\alpha_\beta(\lambda) - \beta_\infty(\lambda).$$

したがって，(9.6.2) を得る．また

$$H_1^{\lambda_0 f}(\lambda_0\lambda)=\frac{1}{2}H_1(2\lambda_0\lambda)+\frac{1}{2}H_0^{2\lambda_0 f}(0)\geqslant\frac{1}{2}E_1(2\lambda_0\lambda)+\frac{1}{2}E_0^{2\lambda_0 f}(0)$$

であるから

$$-E_1^{\lambda_0 f}(\lambda_0\lambda)\leqslant-\frac{1}{2}E_1(2\lambda_0\lambda)-\frac{1}{2}E_0^{2\lambda_0 f}(0)$$

したがって，(9.6.2) から (9.6.3) が得られる．∎

定理 9.6.2　f を $\mathbf{R}$ 上の実数値関数で次の条件をみたすものとする：

（1）　$\mathrm{supp} f\subset[-l/2, l/2]$ であり，かつ $\mathrm{supp} f$ は長さ 1 の区間に含まれる．

（2）
$$\|f\|_{-1}^2\equiv\int_{\mathbf{R}}\frac{|\hat{f}(p)|^2}{p^2+m^2}dp<\infty.$$

このとき，l に依存しない定数 $c_1, c_2>0$ が存在して（λ には依存する），各 $\varepsilon>0$ に対して*)，

$$\pm\phi_{\mathrm{F}}(f)\leqslant\|f\|_{-1}\left\{\varepsilon\hat{H}_l(\lambda)+c_1\varepsilon+\frac{c_2}{\varepsilon}\right\}\tag{9.6.8}$$

ここで，$\hat{H}_l(\lambda)$ は (9.5.8) で定義されるくりこまれたハミルトニアンである．

特に，$\mathrm{supp} f\subset[-l/2, l/2]$ をみたす任意の実数値関数（$\mathrm{supp} f$ は長さ 1 の区間に含まれなくてよい）$f\in\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ に対して

$$\pm\phi_{\mathrm{F}}(f)\leqslant\|f\|_1\left\{\varepsilon\hat{H}_l(\lambda)+c_1\varepsilon+\frac{c_2}{\varepsilon}\right\}.\tag{9.6.9}$$

証明　$\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ の稠密性によって，(9.6.8), (9.6.9) のいずれの場合でも，$f\in\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ として証明すれば十分である．任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$0\leqslant\varepsilon H_l(\lambda)+\phi_{\mathrm{F}}(f)-\varepsilon E_l^{f/\varepsilon}(\lambda)$$

であるから，

$$-\phi_{\mathrm{F}}(f)\leqslant\varepsilon H_l(\lambda)-\varepsilon E_l^{f/\varepsilon}(\lambda)$$

---

*)　2 つの自己共役演算子 A, B に対して，　$A\leqslant B$ を，$\mathrm{D}(A)\supset\mathrm{D}(B)$ かつ

$$\langle\psi, A\psi\rangle\leqslant\langle\psi, B\psi\rangle,\qquad\psi\in\mathrm{D}(B)$$

であること，と定義する．

$$\leqslant \varepsilon \hat{H}_l(\lambda) + \varepsilon\{E_l(\lambda) - E_l^{f/\varepsilon}(\lambda)\}.$$

したがって，(9.6.3) によって

$$-\phi_F(f) \leqslant \varepsilon \hat{H}_l(\lambda) + \varepsilon\left\{c_1(\lambda) - \frac{1}{2\lambda_0} E_0^{2\lambda_0 f/\varepsilon}(0)\right\} \tag{9.6.10}$$

となる．ただし，$c_1(\lambda)$ は λ に依存する定数．そこで，$\operatorname{supp} h \subset [-1/2, 1/2]$ をみたす実数値関数 $h \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して，$E_0^h(0) \equiv E_0^h$ を評価しよう．定理 9.3.3 (2) によって

$$\begin{aligned} -E_0^h &\leqslant \lambda_0^{-1} \ln \langle \Omega_0, e^{-H_l^{\lambda_0 h}(0)} \Omega_0 \rangle \\ &= \lambda_0^{-1} \ln \int d\mu_{0,E} e^{-\lambda_0 \phi(\chi_{[0,1]} \otimes h)} \\ &= \lambda_0^{-1} \ln e^{\lambda_0^2 \|\chi_{[0,1]} \otimes h\|^2_{H_{-1}(\mathbf{R}^2)}/4} = \frac{\lambda_0}{4} \|\chi_{[0,1]} \otimes h\|_{H_{-1}(\mathbf{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned} \|\chi_{[0,1]} \otimes h\|_{H_{-1}(\mathbf{R}^2)}^2 &= 2\int \frac{|\hat{\chi}_{[0,1]}(p^0)\hat{h}(p^1)|^2}{p^2+m^2} dp^0 dp^1 \\ &\leqslant 2\int |\hat{\chi}_{[0,1]}(p^0)|^2 dp^0 \|h\|_{-1}^2 = 2\|h\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

よって，

$$-E_0^h \leqslant \frac{\lambda_0}{2} \|h\|_{-1}^2.$$

$h = 2\lambda_0 \tilde{f}/\varepsilon$ として，(9.6.10) に適用すれば，

$$-\phi_F(f) \leqslant \varepsilon \hat{H}_l(\lambda) + \varepsilon c_1(\lambda) + \frac{\lambda_0^2}{\varepsilon} \tag{9.6.11}$$

となる．ただし，$\|\tilde{f}\|_{-1} = \|f\|_{-1} = 1$ とした．$\|f\|_{-1} \neq 1$ のときは，$g = f/\|f\|_{-1}$ とおけば $\|g\|_{-1} = 1$ となるので (9.6.11) が適用でき (9.6.8) の $-\phi_F(f)$ についての不等式を得る．$+\phi_F(f)$ についての不等式は，$\phi_F(f)$ の f についての線形性によって $-\phi_F(f)$ についてのそれから得られる ($f \longrightarrow -f$ とすればよい).

$\omega(p)^{-1/2} = (p^2+m^2)^{-1/2} \in L^2(\mathbf{R})$ であるから，その逆 Fourier 変換 $\check{\omega}^{-1/2}$ も $L^2(\mathbf{R})$ の関数である．

$$\|f\|_{-1} = \|\omega^{-1/2} \cdot \hat{f}\|_2$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\|\check{\omega}^{-1/2} * f\|_2 \leqslant (2\pi)^{-1/2}\|\omega^{-1/2}\|_2\|f\|_1.$$

したがって，$\mathrm{supp}\, f$ が長さ1の区間に含まれるとき，(9.6.8) から，(9.6.9) が得られる．次に，$\mathrm{supp}\, f$ が必ずしも長さ1の区間に含まれないとしよう．このとき

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & -\dfrac{l}{2}+n-1 \leqslant x < -\dfrac{l}{2}+n \\ 0 & \text{その他の点} \end{cases}$$

とすれば，$\mathrm{supp}\, f_n$ は長さ1の区間に含まれる $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ 関数であり，

$$f = \sum_{n=1}^{[l+1]} f_n$$

と書ける．上に示したように f_n に対しては，(9.6.9) がなりたつから，$c(\varepsilon) \equiv c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^{-1}$ として

$$\begin{aligned} \pm\phi_{\mathrm{F}}(f) &= \sum_{n=1}^{[l+1]} (\pm\phi_{\mathrm{F}}(f_n)) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{[l+1]} \|f_n\|_1(\varepsilon\hat{H}_l(\lambda)+c(\varepsilon)) = \|f\|_1(\varepsilon\hat{H}_l(\lambda)+c(\varepsilon)). \end{aligned}$$ ∎

(9.6.9) において，$\varepsilon = \|f\|_1^{-1}$ とすれば，

$$\pm\phi_{\mathrm{F}}(f) \leqslant \hat{H}_l(\lambda)+c_1+c_2\|f\|_1 \qquad (9.6.12)$$

を得る．

$\phi_{\mathrm{F}}(\cdot)$ の演算子としての性質を詳しく見るために，正の自己共役演算子 $\hat{H}_l(\lambda)$ に付随する Hilbert 空間の列 $\{\mathrm{H}_\alpha^{(l)}\}$ を次のように定義する．$\alpha \geqslant 0$ のときは，$\mathrm{H}_\alpha^{(l)} = \mathrm{D}(\hat{H}_l(\lambda)^{\alpha/2})$（ベクトル空間として）で，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha^{(l)}$ を

$$\langle\phi,\eta\rangle_\alpha^{(l)} = \langle(\hat{H}_l(\lambda)+1)^{\alpha/2}\phi,\ (\hat{H}_l(\lambda)+1)^{\alpha/2}\eta\rangle$$

によってあたえる．$\alpha < 0$ のときは，アプリオリには，$\mathrm{H}_\alpha^{(l)} = \mathscr{F}$ として，内積を同じ式によって導入し，この内積について，$\mathscr{F}$ を完備化したものを $\mathrm{H}_\alpha^{(l)}$ と定義する．したがって，$\alpha > \beta$ ならば $\mathrm{H}_\alpha^{(l)} \subset \mathrm{H}_\beta^{(l)}$ がなりたつ．

$f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$，$\mathrm{supp}\, f \subset [-l/2, l/2]$ のとき，(9.6.9) により，ある定数 $c > 0$ が存在して，

$$\|\,|\phi_{\mathrm{F}}(f)|^{1/2}\phi\| \leqslant c\|f\|_1^{1/2}\|\phi\|_1^{(l)}, \qquad \phi \in \mathrm{H}_1^{(l)}$$

となる．したがって，$|\phi_F(f)|^{1/2}$ は，$H_1^{(l)}$ から $H_0^{(l)}=\mathscr{F}$ への有界演算子であって，そのノルムは $c\|f\|_1^{1/2}$ 以下である．これは，$|\phi_F(f)|^{1/2}(\hat{H}_l(\lambda)+1)^{-1/2}$ が $\mathscr{F}$ 上の有界演算子であることを意味し，したがってまた，共役演算子を考えることにより，$(\hat{H}_l(\lambda)+1)^{-1/2}|\phi_F(f)|^{1/2}$ も $\mathscr{F}$ 上の有界演算子に一意的に拡張され，そのノルムは $c\|f\|_1^{1/2}$ 以下である．ゆえに，$|\phi_F(f)|$ は，$H_1^{(l)}$ から $H_{-1}^{(l)}$ への有界演算子に一意的に拡張され，

$$\| |\phi_F(f)|\psi\|_{-1}^{(l)} \leqslant c^2\|f\|_1\|\psi\|_1^{(l)}, \qquad \psi\in H_1^{(l)}$$

が成立する．したがってまた，$\phi_F(f)$ も $H_1^{(l)}$ から $H_{-1}^{(l)}$ への有界演算子に拡張され，そのノルム $\|\phi_F(f)\|_{1,-1}$ は

$$\|\phi_F(f)\|_{1,-1}\leqslant c^2\|f\|_1 \tag{9.6.13}$$

をみたす．

さて，π_F を時刻 0 の正準運動量の $L^2(\mathbf{Q}_F, d\mu_{0,F})$ における表現としよう．系 4.3.5 によって，$\omega^{3/2}\hat{f}\in L^2(\mathbf{R})$，$\psi\in D(H_0^{3/2})$ に対して*)

$$[H_0, \phi_F(f)]\psi=-i\pi_F(f)\psi, \tag{9.6.14}$$

$$[H_0, \pi_F(f)]\psi=i\phi_F((-\Delta+m^2)f). \tag{9.6.15}$$

また，$\sqrt{\omega}\,\hat{f}\in L^2(\mathbf{R})$，$f$ を実数値とするとき，

$$e^{i\phi_F(f)}H_0e^{-i\phi_F(f)}=H_0-\pi_F(f)+\frac{1}{2}\|f\|_2^2 \tag{9.6.16}$$

がなりたつ．

定理 9.6.3

（1） f が実数値で，$\sqrt{\omega}\,\hat{f}\in L^2(\mathbf{R})$ をみたすとき，

$$\pm\pi_F(f)\leqslant\hat{H}_l(\lambda)+\frac{1}{2}\|f\|_2^2, \tag{9.6.17}$$

$$\pm\pi_F(f)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2(\hat{H}_l(\lambda)+1), \tag{9.6.18}$$

（2） $\omega^{3/2}\hat{f}\in L^2(\mathbf{R})$ ならば，

$$[\hat{H}_l(\lambda), \phi_F(f)]=-i\pi_F(f). \tag{9.6.19}$$

ただし，(9.6.19) の左辺の交換関係は $H_3^{(l)}$ から $H_{-3}^{(l)}$ への演算子として定

*) いま，$m>0$ の場合を考えているので，f に対する条件は $\omega^{3/2}\hat{f}\in L^2(\mathbf{R})$ だけでよい．

義される．

証明　（1）（9.6.16）によって，

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant e^{i\phi_{\mathrm{F}}(f)}\hat{H}_l(\lambda)e^{-i\phi_{\mathrm{F}}(f)} \\
&= e^{i\phi_{\mathrm{F}}(f)}H_0e^{-i\phi_{\mathrm{F}}(f)}+\lambda H_I(\chi_l)-E_l(\lambda) \\
&= H_0-\pi_{\mathrm{F}}(f)+\frac{1}{2}\|f\|_2{}^2+\lambda H_I(\chi_l)-E_l(\lambda) \\
&= \hat{H}_l(\lambda)-\pi_{\mathrm{F}}(f)+\frac{1}{2}\|f\|_2{}^2.
\end{aligned}
$$

したがって，（9.6.17）の $+\pi_{\mathrm{F}}(f)$ についての不等式を得る．$-\pi_{\mathrm{F}}(f)$ の方は，$-\pi_{\mathrm{F}}(f)=\pi_{\mathrm{F}}(-f)$ として得られる．（9.6.18）は，（9.6.17）で，f のかわりに，$\pm\sqrt{2}\,f/\|f\|_2$ を考えることによって得られる．

（2）たとえば，$\mathrm{C}^\infty(H_0)\cap\mathrm{H}_3{}^{(l)}$ 上では，（9.6.19）の左辺は，$\hat{H}_l(\lambda)=H_0+\lambda H_I(\chi_l)$ として意味をもつ*)．したがって，$[H_I(\chi_l),\phi_{\mathrm{F}}(f)]=0$ と（9.6.14）を使って，（9.6.19）を得る．$\mathrm{C}^\infty(H_0)\cap\mathrm{H}_3{}^{(l)}$ は $\mathrm{H}_3{}^{(l)}$ で稠密であることと（1）を用いれば，$\mathrm{H}_3{}^{(l)}$ から $\mathrm{H}_{-3}{}^{(l)}$ への演算子等式として（9.6.19）を得る．∎

系 9.6.4　$f\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R})$，$\mathrm{supp}\,f\subset[-l/2,l/2]$ とする．このとき

（1）$\phi_{\mathrm{F}}(f)$ は，$\mathrm{H}_3{}^{(l)}$ から $\mathrm{H}_1{}^{(l)}$ への有界演算子で，そのノルムは，ある定数 $c>0$ が存在して

$$\|\phi_{\mathrm{F}}(f)\|_{3,1}\leqslant c(\|f\|_1+\|f\|_2) \tag{9.6.20}$$

と評価される．

（2）l に依存しない定数 $d>0$ が存在して

$$\phi_{\mathrm{F}}(f)^2\leqslant d(\|f\|_1+\|f\|_2)^2\{\hat{H}_l(\lambda)+1\}^2. \tag{9.6.21}$$

証明　定理9.6.3によって，$A\equiv[\hat{H}_l(\lambda),\phi_{\mathrm{F}}(f)]$ は $\mathrm{H}_1{}^{(l)}$ から $\mathrm{H}_{-1}{}^{(l)}$ への有界演算子に一意的に拡張され

$$\|A\|_{1,-1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2.$$

$\psi\in\mathrm{H}_3{}^{(l)}$ とすると，$\phi_{\mathrm{F}}(f)\{\hat{H}_l(\lambda)+1\}\psi\in\mathrm{H}_0{}^{(l)}\subset\mathrm{H}_{-1}{}^{(l)}$，

---

*) 閉包をとると必ずしもこのように分離できない．

$$\{\hat{H}_l(\lambda)+1\}\phi_F(f)\psi-\phi_F(f)\{\hat{H}_l(\lambda)+1\}\psi = A\psi \in \mathsf{H}_{-1}{}^{(l)},$$

したがって，$\{\hat{H}_l(\lambda)+1\}\phi_F(f)\psi \in \mathsf{H}_{-1}{}^{(l)}$，すなわち，$\phi_F(f)\psi \in \mathsf{H}_1{}^{(l)}$ でなければならない．ゆえに，$\phi_F(f)$ は $\mathsf{H}_3{}^{(l)}$ を $\mathsf{H}_1{}^{(l)}$ へうつす．さらに，

$$\begin{aligned}\|\phi_F(f)\psi\|_1{}^{(l)} &= \|\{\hat{H}_l(\lambda)+1\}\phi_F(f)\psi\|_{-1}{}^{(l)} \\ &\leqslant \|A\psi\|_{-1}+\|\phi_F(f)\{\hat{H}_l(\lambda)+1\}\psi\|_{-1}{}^{(l)} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_2\|\psi\|_1{}^{(l)}+\|\phi_F(f)\|_{1,-1}\|\{\hat{H}_l(\lambda)+1\}\psi\|_1{}^{(l)} \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(\|f\|_2+\|\phi_F(f)\|_{1,-1})\|\psi\|_3{}^{(l)}.\end{aligned}$$

これと (9.6.13) とによって，(9.6.20) を得る．

(1) と，$\phi_F(f)$ がもともと $\mathsf{H}_1{}^{(l)}$ から $\mathsf{H}_{-1}{}^{(l)}$ への有界演算子であること，および $\mathsf{H}_\alpha{}^{(l)}$ についての補間定理*) を用いると

$$\left.\begin{aligned} m_t &= 1\cdot t+3(1-t), \\ n_t &= (-1)t+1\cdot(1-t)\end{aligned}\right. \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

として，$\phi_F(f)$ は $\mathsf{H}_{m_t}{}^{(l)}$ から $\mathsf{H}_{n_t}{}^{(l)}$ への有界演算子で，そのノルムは

$$\|\phi_F(f)\|_{m_t,n_t} \leqslant (\|\phi_F(f)\|_{1,-1})^t(\|\phi_F(f)\|_{3,1})^{(1-t)}$$

と評価される．特に，$t=1/2$ の場合を考えると，$\phi_F(f)$ は $\mathsf{H}_2{}^{(l)}$ から $\mathscr{F}$ への有界演算子で

$$\begin{aligned}\|\phi_F(f)\|_{2,0} &\leqslant c\|f\|_1{}^{1/2}(\|f\|_1+\|f\|_2)^{1/2} \\ &\leqslant c'(\|f\|_1+\|f\|_2)\end{aligned}$$

となる．ただし，c, c' は定数．これは，(9.6.21) を意味する．∎

系 9.6.4 の応用として，帯領域 $\mathbf{R}\times[-l/2, l/2]$ における 2 点 Schwinger 関数

$$S_2{}^{(l)}(t,f;s,g) \equiv \lim_{T\to\infty}\int\phi(\delta_t\otimes f)\phi(\delta_s\otimes g)d\mu_{[-T,T]\otimes\lambda\chi l}, \quad f,g\in\mathsf{H}_{-1/2}(\mathbf{R}), \tag{9.6.22}$$

*) Reed and Simon (1975), § IX. 4. 例 3.

に対する評価式を得ることができる．$S_2^{(l)}(t,f;s,g)$ の存在は，Gell-Mann-Low の公式（定理 9.4.2）によって保証され，実際，

$$S_2^{(l)}(t,f;s,g) = \langle \Omega_l(\lambda),\ \phi_{\mathrm{F}}(f)e^{-|t-s|\hat{H}_l(\lambda)}\phi_{\mathrm{F}}(g)\Omega_l(\lambda)\rangle \quad (9.6.23)$$

がなりたつ．

定理 9.6.5　$\mathrm{supp}\,f,g\subset[-l/2,l/2]$ をみたすすべての $f,g\in\mathscr{S}(\mathbf{R})$ に対して，l に依存しない $\mathscr{S}(\mathbf{R})$-ノルム $|||\cdot|||$ と定数 $c>0$ が存在して，すべての t,s に対して

$$|S_2^{(l)}(t,f;s,g)| \leqslant c|||f|||\,|||g|||, \quad (9.6.24)$$

$$|S_2^{(l)}(t,f;0,g)-S_2^{(l)}(s,f;0,g)| \leqslant c|||f|||\,|||g|||\,|t-s|. \quad (9.6.25)$$

証明　系 9.6.4 によって，$f\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R})$，$\mathrm{supp}\,f\subset[-l/2,l/2]$ のとき，ある $\mathscr{S}(\mathbf{R})$-ノルム $|||\cdot|||$ と定数 c が存在して，

$$\|\phi_{\mathrm{F}}(f)\|_{3,1}\leqslant c|||f|||$$

となる（たとえば，$|||f|||=\sup_x|(1+x^2)f(x)|$）．一方，$t>s$ のとき（λ を省略して），

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \langle\Omega_l,\ \phi_{\mathrm{F}}(f)\hat{H}_l e^{-(t-s)\hat{H}_l}\phi_{\mathrm{F}}(f)\Omega_l\rangle\\ &\quad +\langle\Omega_l,\ \phi_{\mathrm{F}}(f)e^{-(t-s)\hat{H}_l}\phi_{\mathrm{F}}(f)\Omega_l\rangle\\ &=\langle\{\hat{H}_l+1\}^{1/2}\phi_{\mathrm{F}}(f)\{\hat{H}_l+1\}^{-3/2}\Omega_l,\\ &\qquad\qquad e^{-(t-s)\hat{H}_l}\{\hat{H}_l+1\}^{1/2}\phi_{\mathrm{F}}(f)\{\hat{H}_l+1\}^{-3/2}\Omega_l\rangle\\ &\leqslant\|\phi_{\mathrm{F}}(f)\|_{3,1}{}^2\end{aligned}$$

となる．ここで，$\{\hat{H}_l+1\}^{\alpha}\Omega_l=\Omega_l$，$\alpha\in\mathbf{R}$，を用いた．したがって，

$$0\leqslant\langle\Omega_l,\ \phi_{\mathrm{F}}(f)\hat{H}_l e^{-|t-s|\hat{H}_l}\phi_{\mathrm{F}}(f)\Omega_l\rangle\leqslant c^2|||f|||^2,$$

$$0\leqslant\langle\Omega_l,\ \phi_{\mathrm{F}}(f)e^{-|t-s|\hat{H}_l}\phi_{\mathrm{F}}(f)\Omega_l\rangle\leqslant c^2|||f|||^2$$

を得る．ゆえに，(9.6.23) によって，

$$\begin{aligned}|S_2^{(l)}(t,f;s,g)| &\leqslant S_2^{(l)}(t,f;s,f)^{1/2}S_2^{(l)}(t,g;s,g)^{1/2}\\ &\qquad\qquad\text{(Schwarz の不等式)}\\ &\leqslant c^2|||f|||\,|||g|||,\end{aligned}$$

となって，(9.6.24) を得る．また，$t>0$ として

$$\frac{d}{dt}S_2^{(l)}(t,f;0,g) = -\langle\Omega_l,\ \phi_{\mathrm{F}}(f)\hat{H}_l e^{-t\hat{H}_l}\phi_{\mathrm{F}}(g)\Omega_0\rangle$$

であるから，$t>s$ のとき，

$$\begin{aligned}&|S_2^{(l)}(t,f;0,g)-S_2^{(l)}(s,f;0,g)|\\ &\leqslant \int_s^t d\tau|\langle\Omega_l,\ \phi_F(f)\hat{H}_l e^{-\tau\hat{H}_l}\phi_F(g)\Omega_0\rangle|\\ &\leqslant \int_s^t d\tau c^2|||f|||\,|||g||| = c^2|||f|||\,|||g|||(t-s)\end{aligned}$$

を得る．$s>t$ のときも同様である．ゆえに，(9.6.25) が示された．■

さて，これで本節の目的とする定理を示す用意ができた：

定理 9.6.6

(1) $\mathrm{supp} f\subset \mathbf{R}\times[-l/2,l/2]$ をみたす各 $f\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2)$ に対して，ある定数 $c(f)>0$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty}\int e^{\phi(f)}d\mu_{[-t,t]\otimes\lambda\chi_l}\leqslant e^{c(f)} \tag{9.6.26}$$

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，定数 $c(\varepsilon)>0$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty}\int e^{\phi(f)}d\mu_{[-t,t]\otimes\lambda\chi_l}\leqslant e^{c(\varepsilon)\|f\|_1} \tag{9.6.27}$$

ただし，$f\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2)$ は次の 2 条件をみたすとする：

(i) $\quad \mathrm{supp}\ f\subset\mathbf{R}\times[-l/2,l/2]$,

(ii) $\quad \sup_{t\in\mathbf{R}}\int|f(t,x)|dx\leqslant\varepsilon^{-1}$.

証明 証明を通して，相互作用定数 λ は書かないことにする．$f(t,x)$ の t についての台が $[a,b]$ に含まれているとし，n を十分に大きな自然数として

$$t_j=a+\frac{(b-a)j}{n},\qquad j=1,\cdots,n$$

とおく．このとき，

$$\lim_{T\to\infty}e^{-T\hat{H}_l}\Omega_0=\langle\Omega_l,\Omega_0\rangle\Omega_l$$

を用いて，

$$\begin{aligned}I_n(f)\equiv\langle\Omega_l,\ &e^{-(t_1-a)\{\hat{H}_l+\phi_F(ft_1)\}}e^{-(t_2-t_1)\{\hat{H}_l+\phi_F(ft_2)\}}\times\cdots\\ &\cdots\times e^{-(t_n-t_{n-1})\{\hat{H}_l+\phi_F(ft_n)\}}\Omega_l\rangle\end{aligned}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{N_n(T)}{D(T)}.$$

ただし，$f_t(x) = f(t, x)$ で，

$$N_n(T) = \langle \Omega_0,\ e^{-TH_l} e^{-(t_1-a)\{H_l+\phi_F(f_{t_1})\}} \times \cdots$$
$$\cdots \times e^{-(t_n-t_{n-1})\{H_l+\phi_F(f_{t_n})\}} e^{-\{T-(b-a)\}H_l} \Omega_0\rangle$$
$$D(T) = \langle \Omega_0, e^{-2TH_l}\Omega_0\rangle.$$

FKN 公式によって（証明は定理 9.4.1 と同様），

$$N_n(T) = \int \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \phi(\delta_t \otimes f_{t_j})\right\} \exp\{-\lambda U([-T, T]\otimes\chi_l)\}\, d\mu_{0,\mathrm{E}}$$

$$D(T) = \int \exp\{-\lambda U([-T, T]\otimes\chi_l)\}\, d\mu_{0,\mathrm{E}}$$

したがって，

$$\frac{N_n(T)}{D(T)} = \int \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \phi(\delta_t \otimes f_{t_j})\right\} d\mu_{[-T,T]\otimes\lambda\chi_l}.$$

すなわち，

$$I_n(f) = \lim_{T\to\infty} \int \exp[F_n(f)]\, d\mu_{[-T,T]\otimes\lambda\chi_l} \tag{9.6.28}$$

を得る．ただし，

$$F_n(f) \equiv \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \phi(\delta_t \otimes f_{t_j}).$$

次に，(9.6.28) を用いて，$I_n(f)$ が $n\to\infty$ のとき収束することを示そう．$|e^x - e^y| \leqslant |x-y||e^x + e^y|$ と Schwarz の不等式を用いると，

$$|I_n(f) - I_k(f)|$$
$$\leqslant \varlimsup_{T\to\infty} \|F_n(f) - F_k(f)\|_2 \{\|\exp[F_n(f)]\|_2 + \|\exp[F_k(f)]\|_2\}.$$

ただし，$\|\cdot\|_2$ は測度 $d\mu_{[-T,T]\otimes\lambda\chi_l}$ についてのものである．(9.6.28) によって

$$\lim_{T\to\infty} \|\exp[F_n(f)]\|_2 = I_n(2f)^{1/2}.$$

と表わされる．

$$\phi(f) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \phi(\delta_t \otimes f_t)$$

であるから

$$\|\phi(f)-F_n(f)\|_2^2$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}dt\int_{t_{i-1}}^{t_i}ds\langle\phi(\delta_t\otimes[f_t-f_{t_j}]),\phi(\delta_s\otimes[f_s-f_{t_i}])\rangle.$$

したがって

$$\lim_{T\to\infty}\|\phi(f)-F_n(f)\|_2^2$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}dt\int_{t_{i-1}}^{t_i}ds S_2^{(l)}(t,f_t-f_{t_j};s,f_s-f_{t_i})$$
$$\leqslant c\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}dt|||f_t-f_{t_j}|||\right)^2$$

を得る．ここで，(9.6.24) を用いた．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta(\varepsilon)>0$ が存在して，$|t-s|<\delta(\varepsilon)$ ならば

$$|||f_t-f_s|||<\varepsilon$$

とできるから，n を十分大きくとれば，すべての $j=1,\cdots,n$ に対して

$$|||f_t-f_{t_j}|||<\varepsilon,\qquad t\in[t_{j-1},t_j]$$

とできる．したがって

$$\lim_{T\to\infty}\|\phi(f)-F_n(f)\|_2^2\leqslant c\varepsilon^2(b-a)^2.$$

よって，任意の $\varepsilon>0$ に対して $n_0(\varepsilon)$ が存在して，$k,n\geqslant n_0(\varepsilon)$ ならば，

$$|I_n(f)-I_k(f)|\leqslant\varepsilon\{I_n(2f)^{1/2}+I_k(2f)^{1/2}\}\tag{9.6.29}$$

となる．そこで，$I_n(f)$ のもともとの定義にもどれば，

$$|I_n(f)|\leqslant\exp[-(t_1-a)E(t_1)-(t_2-t_1)E(t_2)$$
$$-\cdots\cdots-(t_n-t_{n-1})E(t_n)]\tag{9.6.30}$$

ここで，$E(t)$ は $\hat{H}_l+\phi_F(f_t)$ の真空エネルギーである．(9.6.9)′ によって

$$-E(t)\leqslant c_1+c_2\|f_t\|_1.$$

ゆえに，$t_0\equiv a$ として

$$|I_n(f)|\leqslant\exp\left[\sum_{j=1}^{n}(t_j-t_{j-1})(c_1+c_2\|f_{t_j}\|_1)\right]$$
$$\leqslant\exp\left[(b-a)c_1+c_2\sum_{j=1}^{n}(t_j-t_{j-1})\|f_{t_j}\|_1\right]\leqslant d(f)\tag{9.6.31}$$

ここで，$d(f)$ は f に依存する定数である（l には依存しない）．(9.6.29) と (9.6.31) とによって

$$\lim_{k,n\to\infty}|I_n(f)-I_k(f)|=0$$

を得る．ゆえに，

$$I(f)\equiv\lim_{n\to\infty}I_n(f)$$

は存在し，

$$|I(f)|\leqslant\exp[c(f)] \tag{9.6.32}$$

をみたす．ただし，$c(f)\equiv(b-a)c_1+c_2\|f\|_1$ とおいた．

次に，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(T)}{D(T)}=\int\exp[\phi(f)]d\mu_{[-T,T]\otimes\lambda\chi_l} \tag{9.6.33}$$

を示そう．これが示せれば，$\lim_{T\to\infty}N_n(T)/D(T)$ の収束の n についての一様性（証明は容易）と $\lim_{n\to\infty}I_n(f)$ の存在とによって，極限 $T\to\infty$ と $n\to\infty$ の順序が交換できて

$$I(f)=\lim_{T\to\infty}\int\exp[\phi(f)]d\mu_{[-T,T]\otimes\lambda\chi_l} \tag{9.6.34}$$

となるので，(9.6.26) を得る．(9.6.33) の証明は $\lim_{n\to\infty}I_n(f)$ の存在の証明と同様である．すなわち，測度 $d\mu_{[-T,T]\otimes\lambda\chi_l}$ に関する期待値を単に $\langle\cdot\rangle$ と書くと，

$$\begin{aligned}&|N_n(T)/D(T)-\langle\exp[\phi(f)]\rangle|\\&\quad\leqslant\langle\{F_n(f)-\phi(f)\}^2\rangle^{1/2}(\langle\exp[F_n(2f)]\rangle^{1/2}+\langle\exp[\phi(2f)]\rangle^{1/2})\end{aligned}$$

と評価できる．ところが，

$$\begin{aligned}&\langle\{F_n(f)-\phi(f)\}^2\rangle\\&\quad=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}dt\int_{t_{i-1}}^{t_i}ds\langle\phi(\delta_t\otimes[f_t-f_{t_j}])\phi(\delta_s\otimes[f_s-f_{t_i}])\rangle\end{aligned}$$

であって，FKN 公式によって，$t>s$ のとき，

$$\begin{aligned}&|\langle\phi(\delta_t\otimes[f_t-f_{t_j}])\phi(\delta_s\otimes[f_s-f_{t_i}])\rangle|\\&\quad=\frac{|\langle\Omega_0,\ e^{-T\hat{H}_l}\phi_{\mathrm{F}}(f_s-f_{t_i})e^{-(t-s)\hat{H}_l}\phi_{\mathrm{F}}(f_t-f_{t_j})e^{-(T-t+s)\hat{H}_l}\Omega_0\rangle|}{\langle\Omega_0,\ e^{-2T\hat{H}_l}\Omega_0\rangle}\end{aligned}$$

$$\leqslant \|\phi_{\mathrm{F}}(f_s - f_{t_1}) e^{-T\hat{H}_l}\Omega_0\| \, \|\phi_{\mathrm{F}}(f_t - f_{t_1}) e^{-(T-t+s)\hat{H}_l}\Omega_0\| / \|e^{-T\hat{H}_l}\Omega_0\|^2$$
$$\leqslant c |||f_s - f_{t_1}||| \, |||f_t - f_{t_1}|||.$$

ここで，系 9.6.4 (2) を用いた．$|||\cdot|||$ は $\|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$ で，c は l に依存する定数．したがって，前半と同様に

$$\lim_{n\to\infty} \langle \{F_n(f) - \phi(f)\}^2 \rangle = 0$$

を得る．$\langle \exp[F_n(2f)] \rangle$ についても前半と同様で，n に依存しない定数で抑えられる．よって，(9.6.33) を得る．

(9.6.27) を得るためには，(9.6.30) の右辺を評価するときに，(9.6.9) を用いればよい．すなわち，すべての t について $\|f_t\|_1 < \varepsilon^{-1}$ ならば，ε に依存する定数 $c(\varepsilon)$ があって，

$$-c(\varepsilon)\|f_t\|_1 \leqslant \hat{H}_l + \phi_{\mathrm{F}}(f_t)$$

となるから，

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I_n(f) \leqslant e^{c(\varepsilon)\|f\|_1}$$

となる．▮

上に証明した定理 9.6.6 は，後に，無限体積極限を考える際に重要な役割を果たすことになろう．

9.7 有界領域における $(\phi^{2N})_2$-Euclid 場の理論

$\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ を開集合とし，$-\Delta_\Lambda$ を $-\Delta \upharpoonright \mathrm{C}_0^\infty(\Lambda)$ の $\mathrm{L}^2(\Lambda, d^2x)$ における Friedrichs 拡大とする*)．$-\Delta_\Lambda$ は $\mathrm{L}^2(\Lambda, d^2x)$ で正の自己共役演算子である．$f, g \in \mathrm{L}^2(\Lambda, d^2x)$ に対して内積 $\langle f, g\rangle_{-1,\Lambda}$ を

$$\langle f, g\rangle_{-1,\Lambda} = 2\langle f, (-\Delta_\Lambda + m^2)^{-1} g\rangle_{\mathrm{L}^2(\Lambda)} \tag{9.7.1}$$

によって定義する．また，$\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ を開集合または閉集合とするとき，Λ に台をもつ，$\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ の元が生成する実 Hilbert 空間を $\mathrm{H}_{-1}(\Lambda)$ とし，その上への射影演算子を e_Λ とする．

*) 正の対称演算子の Friedrichs 拡大については，たとえば，Reed and Simon (1975), §X. 3 参照．

補題 9.7.1　Λ を開集合とし，P_Λ を $\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)^\perp$ 上への射影演算子とする：

$$P_\Lambda = 1 - e_{\mathbf{R}^2\backslash\Lambda}. \tag{9.7.2}$$

このとき，

$$\langle f, g\rangle_{-1,\Lambda} = \langle P_\Lambda f, P_\Lambda g\rangle_{-1}, \qquad f, g \in \mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda). \tag{9.7.3}$$

ここで，$\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ は，実数値の $\mathrm{C}_0{}^\infty(\Lambda)$ 関数の全体を表わす．特に，$\|\cdot\|_{-1,\Lambda}$ による $\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ の完備化は $\mathrm{H}_{-1}(\Lambda)$ を含む．

証明　まず，$g = (-\Delta+m^2)h = (-\Delta_\Lambda+m^2)h$, $h\in \mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ という形の場合を考える．$f\in \mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ としよう．$\mathrm{supp}(1-P_\Lambda)f \subset \mathbf{R}^2\backslash\Lambda$ であるから，

$$\langle(1-P_\Lambda)f, h\rangle_{\mathrm{L}^2} = 0.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_{-1,\Lambda} &= 2\langle f, h\rangle_{\mathrm{L}^2}\\ &= 2\langle P_\Lambda f, h\rangle_{\mathrm{L}^2}\\ &= \langle P_\Lambda f, (-\Delta+m^2)h\rangle_{-1}\\ &= \langle P_\Lambda f, g\rangle_{-1},\end{aligned}$$

すなわち，(9.7.3) がなりたつ．一方，$\mathrm{D} \equiv (-\Delta_\Lambda+m^2)\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ は $\mathrm{L}_r{}^2(\Lambda)$ (実数値関数のつくる実 Hilbert 空間) で稠密で，$\|\cdot\|_{-1,\Lambda} \leqslant \sqrt{2}\|\cdot\|_{\mathrm{L}^2(\Lambda)}/m$, ($\Lambda = \mathbf{R}^2$ のときも含めて) であるから，(9.7.3) は，任意の $g\in \mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ まで拡張される (実際には，$f, g\in \mathrm{L}_r{}^2(\Lambda)$ まで拡張される)．(9.7.3) によって，$f\in \mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ に対して

$$\|f\|_{-1,\Lambda} \leqslant \|f\|_{-1}$$

となるので，$\|\cdot\|_{-1,\Lambda}$ による $\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ の完備化は，$\|\cdot\|_{-1}$ による $\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ の完備化——これは，$\mathrm{H}_{-1}(\Lambda)$ に等しい——を含む．■

ノルム $\|\cdot\|_{-1,\Lambda}$ による $\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ の完備化を $\hat{\mathrm{H}}_{-1}(\Lambda)$ とする．

定義 9.7.2　$\Lambda\subset\mathbf{R}^2$ を開集合とする．

（1）　$\mathrm{H}_{-1}(\Lambda)$ を指標とする Gauss 超過程 $\phi_\Lambda(\cdot)$ を Λ における自由境界条件つきの自由な Euclid 場という．

（2）　$\hat{\mathrm{H}}_{-1}(\Lambda)$ を指標とする Gauss 超過程 $\phi_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(\cdot)$ を Λ における Dirichlet 条件つきの自由な Euclid 場，あるいは単に Dirichlet 場という．

Λ における自由境界条件の Euclid 場は，ϕ を $\mathrm{H}_{-1}(\Lambda)$ に制限して得られるものにほかならない．したがって，$\phi_\Lambda=\phi$ と記す．この境界条件に対する Schwinger 関数を

$$S_\Lambda(f_1,\cdots,f_n)=\frac{\int d\mu_{0,\mathrm{E}}\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)e^{-\lambda U_\Lambda}}{\int d\mu_{0,\mathrm{E}}e^{-\lambda U_\Lambda}} \tag{9.7.4}$$

によって定義しよう．ただし，$f_1,\cdots,f_n\in \mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ で，

$$U_\Lambda=U(\chi_\Lambda)=:\phi^{2N}(\chi_\Lambda):, \tag{9.7.5}$$

χ_Λ は Λ の定義関数である．

次に，Dirichlet 境界条件に対応する Schwinger 関数を定義したい．そのために，自由境界条件の Euclid 場と Dirichlet 場との関係を考察するとき 2 つの描像があることに注意する：

(1) 能動描像 (active picture)

この描像は Minlos の定理（定理 3.2.12 参照）にもとづくものである．すなわち，$\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ は，$\mathrm{H}_{-1}(\Lambda),\hat{\mathrm{H}}_{-1}(\Lambda)$ のいずれにおいても稠密であり，連続的に埋めこまれているので，Minlos の定理（定理 3.2.12 の一般化*)）により，$\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)'$ 上の確率測度 $d\mu_{0,\Lambda}, d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}$ が存在して，$f\in\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ に対して

$$\int_{\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)'} e^{i\phi(f)}d\mu_{0,\Lambda}=e^{-\|f\|_{-1}^2/4}, \tag{9.7.6}$$

$$\int_{\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)'} e^{i\phi(f)}d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}=e^{-\|f\|_{-1,\Lambda}^2/4} \tag{9.7.7}$$

となる．ただし，$\phi(f)$ は，$\phi(f)(T)=T(f)$，$T\in\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)'$ によって定義される．したがって，Euclid 場，Dirichlet 場の実現する測度空間として共通に $\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)'$ をとり，かつ $\phi_\Lambda(f)=\phi^{\mathrm{D}}(f)=\phi(f)$ と選ぶことができる．この表示を**能動描像**という．

すでに見たように，$\mathbf{R}^2$ における Euclid 場 $\phi(\cdot)$ は，測度空間を

*) Gel'fand and Vilenkin (1964) を参照.

$$Q_E = \mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^2),\ \phi(f)(T) = T(f),$$
$$T \in \mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^2),\ f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2),$$

として実現された．$C_{0,r}^{\infty}(\mathbf{R}^2) \subset \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2)$ であるから，(9.7.6) によって，$d\mu_{0,\Lambda} = d\mu_{0,E} \restriction \Sigma_\Lambda$ であることがわかる．ただし，$d\mu_{0,E}$ は，$\mathbf{R}^2$ における Euclid 場に対する，Q_E 上の確率測度，Σ_Λ は $\{\phi(f) \mid f \in H_{-1}(\Lambda)\}$ によって生成される σ-加法族，$d\mu_{0,E} \restriction \Sigma_\Lambda$ は，$d\mu_{0,E}$ の Σ_Λ への制限を表わす．

(2) 受動描像 (passive picture)

これは，$\phi(\cdot)$ を $\mathbf{R}^2$ における Euclid 場とするとき，これをもとにして Dirichlet 場を定義する方法である．すなわち，

$$\phi_\Lambda{}^{D}(f) = \phi(P_\Lambda f), \quad f \in H_{-1}(\Lambda) \tag{9.7.8}$$

として Dirichlet 場 $\phi_\Lambda{}^{D}(\cdot)$ を定義する．$f, g \in C_{0,r}^{\infty}(\Lambda)$ ならば，(9.7.3) を用いて

$$\int \phi_\Lambda{}^{D}(f)\phi_\Lambda{}^{D}(g)d\mu_{0,E} = \frac{1}{2}\langle f, g\rangle_{-1,\Lambda}$$

となることが確かめられるので，$\{\phi_\Lambda{}^{D}(\cdot)\}$ は $\hat{H}_{-1}(\Lambda)$ を指標とする Gauss 超過程のひとつのモデルである．

注意 能動描像における Euclid 場，Dirichlet 場に対応する測度の関係は次のようになる：Λ' を Λ のコンパクト集合としよう．このとき，$\mu_{0,\Lambda}{}^{D} \restriction \Sigma_{\Lambda'}$ は $\mu_{0,E} \restriction \Sigma_{\Lambda'}$ について絶対連続であり，その Radon-Nykodim 微分は $\Sigma_{\partial\Lambda'}$-可測な $L^p(Q_E, d\mu_{0,E})$ の関数である．ただし，$p > 1$ はある定数．

証明については，Guerra, Rosen, Simon (1975) を参照．

さて，$\operatorname{supp} g \subset \Lambda$, $g \geqslant 0$, $g \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^{1+\varepsilon}(\mathbf{R}^2)$ $(\varepsilon \in (0, 1])$ をみたす g に対して，

$$U_\Lambda{}^{D}(g) = :\phi^{2N}(g):_\Lambda{}^{D} \tag{9.7.9}$$

を定義する．ただし，$::_\Lambda{}^{D}$ は，測度 $d\mu_{0,\Lambda}{}^{D}$ についての Wick 積であり，ϕ は能動描像における Dirichlet 場である．$U_\Lambda{}^{D}(g)$ は，Λ における Dirichlet 場の，切断 g をもつ Euclid 的相互作用を表わす．$U_\Lambda{}^{D}(g)$ は $U(g)$ の場合

と同様な手続きで定義され，アプリオリには，$\mathsf{L}^2(\mathsf{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)', d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}})$ に属する．

ところで，$f, g \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2)$ に対して，

$$\langle f, g\rangle_{-1,\Lambda}\tilde{} \equiv \langle \chi_\Lambda f, \chi_\Lambda g\rangle_{-1,\Lambda} \qquad (\chi_\Lambda \text{ は } \Lambda \text{ の定義関数})$$

とすれば，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{-1,\Lambda}\tilde{}$ は，$\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2)$ 上の半正定値の内積をあたえ*)，$f, g \in \mathsf{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ ならば，

$$\langle f, g\rangle_{-1,\Lambda}\tilde{} = \langle f, g\rangle_{-1,\Lambda}$$

となる．$f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2)$ のとき，$\chi_\Lambda f \in \hat{\mathsf{H}}_{-1}(\Lambda)$ であるから，

$$\tilde{\phi}_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f) \equiv \phi_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(\chi_\Lambda f)$$

として，$\tilde{\phi}_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(\cdot)$ を定義すれば，$\tilde{\phi}_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$ は，$\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2)$ を指標として，分散 $(f, g)_{-1,\Lambda}\tilde{}$ をもつ Gauss 超過程をあたえ，$f \in \mathsf{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ ならば，$\tilde{\phi}_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f) = \phi_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f)$ がなりたつ．したがって，$\phi_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$ は，$\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2)$ を指標とする Gauss 超過程 $\tilde{\phi}_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$ のひとつの制限としてあたえられる．$\tilde{\phi}_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$ の実現する測度空間は，$\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^2)$ にとれるから，測度 $d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}$ の台は，$\mathbf{Q}_{\mathrm{E}} = \mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^2)(\subset \mathsf{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)')$ の中にあることがわかる．補題 9.7.1 によって

$$\|f\|_{-1,\Lambda}\tilde{} \leqslant \|f\|_{-1}, \qquad f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2)$$

がなりたつ．したがって，$\tilde{\phi}_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$ は ϕ のコンディショニングとしてあたえられる（付録3参照）．ゆえに，付録3の結果の応用として，次の定理を得る：

定理 9.7.3

$$U_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(g), \exp[-U_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(g)] \in \bigcap_{p<\infty} \mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}).$$

上の定理によって，次の定義が可能である：

定義 9.7.4 有界開集合領域 Λ における Dirichlet 条件つきの $\lambda(\phi^{2N})_2$ Euclid 場の理論は $\{\phi(\cdot), \mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{D}}\}$ によってあたえられる．ただし，$\lambda > 0$ で，

$$d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{D}} = \frac{\exp[-\lambda U_\Lambda{}^{\mathrm{D}}]d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}}{\int \exp[-\lambda U_\Lambda{}^{\mathrm{D}}]d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}} \tag{9.7.10}$$

---

*) $\langle f, f\rangle = 0$ でも，必ずしも $f = 0$ とならないとき，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は半正定値 (positive semi-definite) であるという．

であり，

$$U_\Lambda{}^{\mathrm{D}} = U_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(\chi_\Lambda). \tag{9.7.11}$$

Dirichlet 境界条件の Schwinger 関数は，$f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ に対して，

$$S_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f_1, \cdots, f_n) = \langle \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) \rangle_\Lambda{}^{\mathrm{D}} \tag{9.7.12}$$

によって定義される．ただし，$\langle \cdot \rangle_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$ は，測度 $d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$ による期待値を表わす．

統計力学的見地からは，$\langle \cdot \rangle_\Lambda{}^{\mathrm{D}}$ は **Dirichlet 状態**とよばれる．これとは異なる，有用なもうひとつの状態を定義するために，以下の準備をする．

補題 9.7.5　Λ を有界領域とし

$$\delta G_\Lambda(x, y) = G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x, y) - G_0(x, y), \quad x \neq y,\ x, y \in \Lambda \tag{9.7.13}$$

とおく．ただし，$G_0(x, y)$ は $(-\Delta + m^2)^{-1}$ の積分核である：

$$G_0(x, y) \equiv G_0(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2+m^2} d^2p \tag{9.7.14}$$

また $G_\Lambda^{\mathrm{D}}(x, y)$ は $(-\Delta_\Lambda + m^2)^{-1}$ の積分核である．このとき，次の (1)〜(5) がなりたつ．

(1)
$$\delta G_\Lambda(x) \equiv \lim_{y \to x} \delta G_\Lambda(x, y) \tag{9.7.15}$$
がすべての $x \in \Lambda$ に対して存在する．

(2)　すべての $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$, に対して
$$G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x, y) \geqslant 0.$$

(3)　すべての $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$ に対して
$$\delta G_\Lambda(x, y) \leqslant 0.$$

(4)　すべての $x \in \Lambda$ に対して
$$0 \leqslant -\delta G_\Lambda(x) \leqslant \sup_{y \in \partial\Lambda} G_0(x-y). \tag{9.7.16}$$
特に，$d(x) \equiv \inf_{y \in \partial\Lambda} |x-y| \equiv \mathrm{dist}\,(x, \partial\Lambda)$ が十分に小なら
$$0 \leqslant -\delta G_\Lambda(x) \leqslant -\frac{1}{2\pi} \ln d(x) + c. \tag{9.7.17}$$
また，十分大きな $d(x)$ に対しては
$$0 \leqslant -\delta G_\Lambda(x) \leqslant ce^{-md(x)}. \tag{9.7.18}$$
ただし，$c > 0$ は定数で Λ に依存しない．

(5)　$\Lambda' \supset \Lambda$ なら $\delta G_{\Lambda'}(x) \geqslant \delta G_\Lambda(x)$, $x \in \Lambda$.

証明 （1） Λ において,

$$(-\Delta_y+m^2)G_0(x,y)=\delta(x-y)=(-\Delta_y+m^2)G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x,y)$$

であるから,

$$(-\Delta_y+m^2)\delta G_\Lambda(x,y)=0 \tag{9.7.19}$$

である．したがって，楕円型方程式の解の正則性によって，$\delta G_\Lambda(x,y)$ は，各 x に対して，y について Λ 上で C^∞ 関数である．ゆえに，$\delta G_\Lambda(x)$ は存在する．

（2） 次の一般的な事実を用いる：

$\Omega\subset\mathbf{R}^2$ をコンパクト集合とし，f を Ω の内部で $(-\Delta+m^2)f=0$ をみたす関数とする．このとき，Ω 上で $f\geqslant 0$ $(f\leqslant 0)$ ならば，f は劣調和（優調和）関数であり，したがって，その最大値（最小値）を $\partial\Omega$ 上でとる．

さて，$y\in\Lambda$ を固定しよう．このとき，

$$\lim_{x\to y}G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x,y)=\lim_{x\to y}\{\delta G_\Lambda(x,y)+G_0(x,y)\}=+\infty.$$

ここで，δG_Λ に対する (1) の結果と $G_0(x,y)\to+\infty$ $(x\to y)$ とを用いた．そこで，$S=\{x\in\Lambda\mid G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x,y)<0\}$ とおく．$y\notin S$ であるから，S 上で $(-\Delta_x+m^2)G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x,y)=0$ がなりたつ．したがって，$G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x,y)$ $(x\in S)$ は，∂S 上で最小値をとる．$x\in\partial S$ ならば，$x\in\partial\Lambda$ であるか，または，x の近傍で $G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x,y)$ は負と非負の両方の値をとる．前者ならば，$G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x,y)=0$．また後者の場合，明らかに，$G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x,y)=0$．ゆえに，$S\cup\partial S$ 上で $G_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(x,y)\geqslant 0$ である．すなわち，$S=\phi$ でなければならない．

（3） (9.7.19) によって，(2) と同様の議論が $\delta G_\Lambda(x,y)$ に対して適用できる．$x\in\partial\Lambda$ のとき，$\delta G_\Lambda(x,y)=-G_0(x,y)\leqslant 0$ に注意すれば［以下の (9.7.20) 参照]，求める結果を得る．

（4） (9.7.19) と (3) の結果によって，$-\delta G_\Lambda(x,y)$ は x の関数として $\partial\Lambda$ 上で最大値をとる．一方，$x\in\partial\Lambda$ ならば $-\delta G_\Lambda(x,y)=G_0(x-y)$ であるから，(9.7.16) を得る．

(9.7.14) と公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itb}}{t^2+a^2}dt=\frac{\pi e^{-|ab|}}{|a|}$$

を用いると

$$G_0(x)=\frac{1}{2(2\pi)}\int\frac{e^{-\omega(p)|x^0|-ix^1p}}{\omega(p)}dp$$

となる．ただし，$\omega(p)=(p^2+m^2)^{1/2}$．もともとの定義から，任意の $\alpha\in\mathbf{E}^2$ に対して，$G_0(\alpha x)=G_0(x)$ (Euclid 不変性) となるから，

$$G_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-\omega(p)|x|}}{\omega(p)}dp \tag{9.7.20}$$

となる．$\omega(p)|x|\longrightarrow p$ の変数変換をすると

$$G_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{m|x|}^\infty\frac{e^{-p}}{\sqrt{p^2-m^2|x|^2}}dp.$$

したがって，$|x|$ が十分小なら，ある定数 $c>0$ が存在して

$$G_0(x)\leqslant\frac{1}{2\pi}\ln m|x|+c.$$

また，$|x|$ が十分に大なら，

$$G_0(x)\leqslant ce^{-m|x|}$$

となる．よって，(9.7.17), (9.7.18) を得る．

(5)　　$f(x)=\delta G_\Lambda(x,y)-\delta G_{\Lambda'}(x,y)$　　(y:固定)

とおくと，Λ 上で，$(-\Delta+m^2)f=0$ をみたす．$x\in\partial\Lambda$ ならば，$f(x)=-G_{\Lambda'}{}^{\mathrm{D}}(x,y)\leqslant 0$．したがって，(2) と同様の議論によって，$f\leqslant 0$．すなわち，$x\in\Lambda$ に対して，$\delta G_\Lambda(x,y)\leqslant\delta G_{\Lambda'}(x,y)$．そこで，$x\to y\in\Lambda$ とすれば，$\delta G_\Lambda(y)\leqslant\delta G_{\Lambda'}(y)$ を得る．∎

さて，Λ を有界領域とすれば，補題9.7.5 (4) によって，$\delta G_\Lambda\in\bigcap_{p<\infty}\mathsf{L}^p(\Lambda,d^2x)$ となる．したがって，$\mathrm{supp}\,g\subset\Lambda$ となる任意の $g\in\mathsf{L}^{1+\varepsilon}(\mathbf{R}^2)$，$\varepsilon\in(0,1]$ と $n,k\geqslant 1$ に対して

$$:\phi^n(g(\delta G_\Lambda)^k):_\Lambda{}^{\mathrm{D}},\qquad k=0,1,2,\cdots,n,$$

は定義される．(3.2.14) によって

$$:\phi^n(g):=\sum_{k=0}^{[n/2]}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}:\phi^{n-2k}(g(\delta G_\Lambda)^k):_\Lambda{}^{\mathrm{D}} \tag{9.7.21}$$

を得る．ただし，

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \frac{n!}{(n-2k)!\,k!\,2^k}.$$

定理 9.7.6 Λ を有界領域とし，

$$U_\Lambda \equiv U(\chi_\Lambda) = :\phi^{2N}(\chi_\Lambda): \tag{9.7.22}$$

とおく．このとき，

$$U_\Lambda,\ \ e^{-U_\Lambda} \in \bigcap_{p<\infty} \mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}). \tag{9.7.23}$$

証明 (9.7.21) によって

$$U_\Lambda = \sum_{k=0}^{N} \begin{Bmatrix} 2N \\ k \end{Bmatrix} :\phi^{2(N-k)}(\chi_\Lambda(\delta G_\Lambda)^k):_\Lambda{}^{\mathrm{D}}.$$

これに対応して，

$$\tilde{U}_\Lambda = \sum_{k=0}^{N} \begin{Bmatrix} 2N \\ k \end{Bmatrix} :\phi^{2(N-k)}(\chi_\Lambda(\delta G_\Lambda)^k):$$

とおけば，$(\delta G_\Lambda)^k \in \bigcap_{p<\infty} \mathsf{L}^p(\Lambda, d^2x)$ によって

$$\tilde{U}_\Lambda,\ \ e^{-\tilde{U}_\Lambda} \in \bigcap_{p<\infty} \mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}}).$$

(系 9.2.4，定理 9.2.7 参照)．付録 3 のコンディショニング比較定理によって

$$\|U_\Lambda\|_{\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}})} \leqslant \|\tilde{U}_\Lambda\|_{\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})},$$

$$\|e^{-U_\Lambda}\|_{\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}})} \leqslant \|e^{-\tilde{U}_\Lambda}\|_{\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})}.$$

となるから，(9.7.23) を得る．∎

この定理によって，次の定義が可能である：

定義 9.7.7 有界領域 Λ における半 Dirichlet 条件つきの $\lambda(\phi^{2N})_2$ Euclid 場の理論は $\{\phi(\cdot), \mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}\}$ によってあたえられる．ただし，$\lambda > 0$ で

$$d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{HD}} = \frac{\exp[-\lambda U_\Lambda] d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}}{\displaystyle\int \exp[-\lambda U_\Lambda] d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}} \tag{9.7.24}$$

である．

半 Dirichlet-Schwinger 関数は，$f_1, \cdots, f_n \in \mathsf{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ として，

$$S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n) = \langle \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) \rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}} \tag{9.7.25}$$

によって定義される．ただし，$\langle \cdot \rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$ は $d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$ による期待値であり，**半 Dirichlet 状態** (half-Dirichlet state) とよばれる．

$\bar{\Lambda}'\subset\Lambda$ となる有界領域 Λ' に対して

$$U_{\Lambda,\Lambda'}=\sum_{k=0}^{N}\left\{\begin{matrix}2N\\k\end{matrix}\right\}:\phi^{2(N-k)}(\chi_{\Lambda'}(\delta G_\Lambda)^k):_\Lambda{}^{\mathrm{D}} \tag{9.7.26}$$

とおき，

$$S_{\Lambda,\Lambda'}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)=\frac{\displaystyle\int d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)e^{-\lambda U_{\Lambda,\Lambda'}}}{Z_{\Lambda,\Lambda'}{}^{\mathrm{HD}}}, \tag{9.7.27}$$

$$Z_{\Lambda,\Lambda'}{}^{\mathrm{HD}}=\int d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}e^{-\lambda U_{\Lambda,\Lambda'}} \tag{9.7.28}$$

を定義する．このとき，

命題 9.7.8　$\{\Lambda_n\}$ を $\bar{\Lambda}_n\subset\Lambda$ なる有界領域の単調増大列とすれば

$$\lim_{n\to\infty}S_{\Lambda,\Lambda_n}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)=S_\Lambda(f_1,\cdots,f_n).$$

証明　受動描像で，$S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}, S_{\Lambda,\Lambda_n}{}^{\mathrm{HD}}$ を表わし，命題9.2.8を用いればよい（命題9.2.8は，単項式の Wick 積に対するものであったが，これは，下に有界な多項式に対応する Wick 積の場合にも拡張される）．∎

9.8　格子近似の収束

第8章で格子空間 $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ $(a>0)$ 上の格子場の $P(\phi)_\nu$ モデルを議論した．この節では，$\nu=2$ とし

$$P(X)=X^{2N}$$

として，$\mathbf{R}^2$ の有界領域 Λ に対して，$\Lambda\cap\mathbf{Z}_a{}^2$ における $(\phi^{2N})_2$ 格子場理論の $a\to0$ の極限を調べる．

そのために，まず，格子場を可測空間 $\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ の上に実現させることを考えよう．各 $n\in\mathbf{Z}^2$ と $a>0$ に対して，$h_{n,a}\in\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ をその Fourier 変換

$$\hat{h}_{n,a}(p)=\begin{cases}\dfrac{e^{-ipna}\omega(p)}{2\pi\omega_a(p)}; & |p_i|\leqslant\pi/a \text{ のとき } (i=1,2)\\ 0 & ; \text{ 他の場合}\end{cases} \tag{9.8.1}$$

によって定義する．ただし，

$$\omega(p) = (p^2+m^2)^{1/2}, \tag{9.8.2}$$

$$\omega_a(p) = \left(4a^{-2}\sum_{i=1}^{2}\sin^2\frac{p_i a}{2}+m^2\right)^{1/2}. \tag{9.8.3}$$ *)

$f \in C_{0,r}^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$f_a(x) = \sum_n a^2 f(na) h_{n,a}(x) \tag{9.8.4}$$

とおき，$\{f_a \mid f \in C_{0,r}^{\infty}(\mathbf{R}^2)\}$ によって生成される，$H_{-1}(\mathbf{R}^2)$ の部分空間を $H_{-1,a}(\mathbf{R}^2)$ としよう．$H_{-1,a}(\mathbf{R}^2)$ から，$\mathbf{Z}_a{}^2$ 上の関数空間への写像 u を，まず (9.8.4) の f_a に対して

$$(uf_a)(na) = f(na) \tag{9.8.5}$$

によって定義する．このとき，$uf_a \in \mathcal{N}_a$ (付録2の記号) であり，任意の f, $g \in C_{0,r}^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$\langle uf_a, ug_a\rangle_{\mathcal{N}_a} = \langle f_a, g_a\rangle_{-1} \tag{9.8.6}$$

となることがわかる．逆に，$f \in \mathcal{N}_a$ に対して

$$f_a(x) = \sum_n a^2 f(na) h_{n,a}(x) \tag{9.8.7}$$

とおけば，$f_a \in H_{-1,a}(\mathbf{R}^2)$ であって，(9.8.6) がなりたつ．したがって，u は $H_{-1,a}(\mathbf{R}^2)$ から $\mathcal{N}_a$ の上へのユニタリ変換に一意的に拡張され，この意味で，$H_{-1,a}(\mathbf{R}^2)$ と $\mathcal{N}_a$ は同一視される．

$\mathcal{N}_a$ における重要な量と格子空間における量との対応を述べておこう．まず，

$$u\tilde{\Delta}_a u^{-1} = \Delta_a \tag{9.8.8}$$

で定義される $\tilde{\Delta}_a$ は，(9.8.7) の f_a に対して

$$\tilde{\Delta}_a f_a = \sum_n a^2(\Delta_a f)(na) h_{n,a} \tag{9.8.9}$$

という作用をもつ．また，明らかに，

$$uh_{n,a} = a^{-2}e_{na}. \tag{9.8.10}$$

ただし e_{na} は，$e_{na}(la) := \delta_{nl}, n, l \in \mathbf{Z}$ によって定義される $\mathbf{Z}_a^2$ 上の関数である．$\Lambda \subset \mathbf{R}^2$ に対して，

$$\Lambda_a = \Lambda \cap \mathbf{Z}_a{}^2, \qquad \Lambda_a{}^{\mathrm{ext}} = \Lambda^c \cap \mathbf{Z}_a{}^2 \tag{9.8.11}$$

---

*) 付録 2 (2.15) の μ_a で，$\nu = 2$ としたもの．

とおき，$\{h_{n,a} \mid na \in \Lambda_a^{\mathrm{ext}}\}$ によって生成される，$\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ の閉部分空間上への射影演算子を $\tilde{e}_{\Lambda_a^{\mathrm{ext}}}$ とし，

$$\tilde{P}_{\Lambda_a} = 1 - \tilde{e}_{\Lambda_a^{\mathrm{ext}}} \tag{9.8.12}$$

とおく．このとき，

$$u\tilde{e}_{\Lambda_a^{\mathrm{ext}}}u^{-1} = e_{\Lambda_a^{\mathrm{ext}}}, \tag{9.8.13}$$

$$u\tilde{P}_{\Lambda_a}u^{-1} = P_{\Lambda_a}. \tag{9.8.14}$$

右辺の量は，付録2で定義されたものである．

さて，容易にわかるように，

$$\begin{aligned}\int d\mu_{0,\mathrm{E}}\phi(h_{n,a})\phi(h_{k,a}) &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbf{B}_a} e^{ip(n-k)a}\omega_a(p)^{-2}d^2p \\ &= C_a(na, nk)\end{aligned} \tag{9.8.15}$$

となる．ただし，$\mathbf{B}_a = \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)^2$ である．したがって $\phi(h_{n,a})$ は，格子点 $na \in \mathbf{Z}^2$ における，自由境界条件の格子場のモデルをあたえる．そこで，

$$\phi_a(n) = \phi(h_{n,a}) \tag{9.8.16}$$

とおき，以後 $\phi_a(n)$ を $\mathbf{Z}_a{}^2$ 上の自由な Euclid 格子場と考える．こうして，$\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}$ 上に格子場が実現できた．

次に $f \in \mathsf{C}_{0,r}{}^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ に対して，

$$\phi_a(f) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} a^2 f(na)\phi_a(n) \tag{9.8.17}$$

を定義する．これは，ちょうど f で均された格子場である．$g \geqslant 0, g \in \mathsf{C}_0{}^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$U_a(g) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} a^2 : \phi_a(n)^{2N} : g(na) \tag{9.8.18}$$

とおく．これは，切断 g をもつ格子場の相互作用を表わし，実際には，もっと一般の $g \geqslant 0$ に対しても定義される（たとえば，$g = \chi_\Lambda, \Lambda$ は $\mathbf{R}^2$ の有界開集合）．この相互作用に対応する Schwinger 関数は，$f_1, \cdots, f_n \in \mathsf{C}_0{}^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ として，

$$S_{g,a}(f_1, \cdots, f_n) = \frac{\displaystyle\int \phi_a(f_1)\cdots\phi_a(f_n)e^{-U_a(g)}d\mu_{0,\mathrm{E}}}{\displaystyle\int e^{-U_a(g)}d\mu_{0,\mathrm{E}}} \tag{9.8.19}$$

であたえられる．$g=\chi_\Lambda, f_1, \cdots, f_n \in C_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ ならば，これは，ちょうど自由境界条件の均された Schwinger 関数である（ただし，f_j を $f_j \restriction \mathbf{Z}_a{}^2$ と見る）．

補題 9.8.1

（1） 各 $p\in\mathbf{R}^2$ に対して，$\omega_a(p)\to\omega(p)\quad(a\to 0)$．

（2） $p\in\mathbf{B}_a$ ならば，

$$\omega_a(p)^{-1}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega(p)^{-1}. \tag{9.8.20}$$

証明 （1）は

$$\lim_{x\to 0}x^{-1}\sin x=1$$

によって得られる．(2) は，不等式

$$|\sin x|\geqslant\frac{2}{\pi}|x| \qquad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

によって得られる．∎

補題 9.8.2

（1） 各 $r>1$ に対して

$$\|\chi_a\omega_a{}^{-2}-\omega^{-2}\|_r\leqslant ca^{2(1-1/r)}. \tag{9.8.21}$$

ただし，χ_a は $\mathbf{B}_a$ の定義関数で，c は a に依存しない定数である．したがって，$a\to 0$ のとき，$\mathrm{L}^r(\mathbf{R}^2)$ で，$\chi_a\omega_a{}^{-2}\to\omega^{-2}$．

（2） $f\in C_0{}^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して，

$$\hat{f}_a(p)=\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}^2}\frac{a^2}{2\pi}f(na)e^{-ipna}\right)\chi_a(p), \qquad p\in\mathbf{R}^2, \tag{9.8.22}$$

とおく．このとき，各 $\mathrm{L}^r(\mathbf{R}^2)$，$r\in[2,\infty]$，で

$$\hat{f}_a\to\hat{f}\quad(a\to 0).$$

また，任意の $\delta\in(0,1)$ と $r>2/\delta$ に対して，

$$\|(\hat{f}_a-\hat{f})/(1+|p|)^\delta\|_r\leqslant ca^{\delta-2/r}, \qquad a\in(0,1], \tag{9.8.23}$$

がなりたつ．ただし，c は f, r のみに依存する定数．

（3） $\Lambda\subset\mathbf{R}^2$ を連続な境界をもつ有界開集合とする．$f=\chi_\Lambda$ に対して，(9.8.22) で定義される $\hat{f}_a$ を $\hat{\chi}_{\Lambda,a}$ とする．このとき，$\hat{\chi}_{\Lambda,a}$ に対しても，(2) と同じことがなりたつ．

証明

（1）三角不等式によって

$$\|\chi_a\omega_a{}^{-2}-\omega^{-2}\|_r \leqslant \|\chi_a(\omega_a{}^{-2}-\omega^{-2})\|_r+\|\omega^{-2}(\chi_a-1)\|_r. \tag{9.8.24}$$

$$\omega^2-\omega_a{}^2=\sum_{i=1}^{2}p_i{}^2\left\{1-\left[\frac{\sin(p_ia/2)}{p_ia/2}\right]^2\right\}$$

および $|1-(\sin x/x)|\leqslant x^2/6$, (9.8.20) を用いると

$$\|\chi_a(\omega_a{}^{-2}-\omega^{-2})\|_r{}^r \leqslant ca^{2r}\int_{\mathrm{B}_a}\frac{|p|^{4r}}{\omega(p)^{4r}}dp \leqslant (2\pi)^2ca^{2(r-1)} \tag{9.8.25}$$

ただし，$c>0$ は定数．他方，

$$\|\omega^{-2}(\chi_a-1)\|_r{}^r \leqslant 2\pi\int_{\pi/a}^{\infty}\frac{pdp}{\omega(p)^{2r}} \leqslant \frac{\pi^{3-2r}}{r-1}a^{2(r-1)}.$$

これと (9.8.25), (9.8.24) とによって，(9.8.21) を得る．

（2）$\sup_{a\leqslant 1}\|\hat{f}_a\|_\infty<\infty$ かつ $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$ で $\hat{f}_a\to\hat{f}$ $(a\to 0)$ を示せば十分である．f の台は，一辺 L の正方形の中にあると仮定してよい．このとき，

$$\|\hat{f}_a\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty(2\pi)^{-1}a^2[(L/a)+2]^2.$$

したがって，

$$\sup_{a\leqslant 1}\|\hat{f}_a\|_\infty<\infty.$$

次に，Fourier 級数論の Plancherel の定理によって

$$\|\hat{f}_a\|_2{}^2=\sum_n a^2|f(na)|^2\underset{a\to 0}{\longrightarrow}\|f\|_2{}^2=\|\hat{f}\|_2{}^2.$$

さらに，任意の $h\in\mathrm{C}_0{}^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して，

$$(h,\hat{f}_a)_2\underset{a\to 0}{\longrightarrow}(\check{h},f)_2=(h,\hat{f})_2.$$

$\mathrm{C}_0{}^\infty(\mathbf{R}^2)$ は $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$ で稠密であり，$\sup_{a\leqslant 1}\|\hat{f}_a\|_2<\infty$（これは，$\|\hat{f}_a\|_2\to\|\hat{f}\|_2$ による）であるから，すべての $h\in\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$\langle h,\hat{f}_a\rangle_2\to\langle h,\hat{f}\rangle_2$$

となる．これと $\|\hat{f}_a\|_2\to\|\hat{f}\|_2$ とを合わせれば，$\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$ で，$\hat{f}_a\to\hat{f}$ を得る．

次に，(9.8.23) を示そう．三角不等式を使えば，

$$\|(\hat{f}_a-\hat{f})/(1+|p|)^\delta\|_r$$
$$\leqslant \|(\hat{f}_a-\chi_a\hat{f})/(1+|p|)^\delta\|_r+\|(\chi_a-1)\hat{f}/(1+|p|)^\delta\|_r. \qquad (9.8.26)$$

右辺の第一項を評価するために，その被積分関数の分子を次のように書きかえる：

$$\hat{f}_a(p)-\chi_a(p)\hat{f}(p)=\frac{\chi_a(p)}{2\pi}\sum_{na\in \mathbf{Z}_a{}^2\cap \mathrm{supp} f}\int_{\square_n}(f(na)e^{-ipna}-f(x)e^{-ipx})d^2x.$$

ただし，$\square_n$ は，$x=na$ を中心とする一辺 a の正方形を意味する．$|f|$ および $|\partial f/\partial x^0|$，$|\partial f/\partial x^1|$ は一様有界であるから

$$|f(na)e^{-ipna}-f(x)e^{-ipx}|$$
$$\leqslant |f(na)-f(x)|+|f(x)|\,|e^{-ipna}-e^{-ipx}|$$
$$\leqslant M|na-x|+|f(x)|\,|p|\,|na-x|$$
$$\leqslant c_1(1+|p|)\,|na-x|.$$

ここで，c_1 は f に依存する定数．さらに，$x\in\square_n$ ならば，$|na-x|\leqslant\sqrt{2}\,a$ であることと

$$\sup_{0<a\leqslant 1}\sum_{na\in \mathbf{Z}_a{}^2\cap \mathrm{supp} f}a^2<\infty$$

に注意すれば，$0<a\leqslant 1$ のとき，

$$|\hat{f}_a(p)-\chi_a(p)\hat{f}(p)|\leqslant \text{const.}\,\chi_a(p)a(1+|p|)$$

を得る．$p\in\mathbf{B}_a$ ならば，$a|p|\leqslant\sqrt{2}\,\pi$ であるから，任意の $\delta\in(0,1)$ に対して

$$\frac{|\hat{f}_a(p)-\chi_a(p)\hat{f}(p)|}{(1+|p|)^\delta}\leqslant \text{const.}\,\chi_a(p)a^\delta$$

となる．したがって，$r>2/\delta$ に対して

$$\|(\hat{f}_a-\chi_a\hat{f})/(1+|p|)^\delta\|_r\leqslant \text{const.}\,a^{\delta-2/r} \qquad (9.8.27)$$

を得る．これで，(9.8.26) の右辺第一項が評価できた．第二項は，容易である：

$$\|(\chi_a-1)\hat{f}/(1+|p|)^\delta\|_r\leqslant\left(2\pi\int_{\pi/a}^{\infty}\frac{p}{(1+|p|)^{\delta r}}dp\right)^{1/r}\|\hat{f}\|_\infty\leqslant c_r\|\hat{f}\|_\infty a^{\delta-2/r}. \qquad (9.8.28)$$

ただし，c_r は r に依存する定数．(9.8.26)～(9.8.28) によって，(9.8.23)

が得られる.

（3） (9.8.23) 以外の証明はまったく同じである. (9.8.23) の証明には (9.8.27) の導出の仕方を少し変更しなければならない ((9.8.28) の導出は同じである). $f=\chi_\Lambda$ ならば

$$\begin{aligned}&\hat{\chi}_{\Lambda,a}(p)-\chi_a(p)\hat{\chi}_\Lambda(p)\\&=\frac{\chi_a(p)}{2\pi}\Bigg[\sum_{\substack{na\in\mathbf{Z}_a{}^2\cap\Lambda\\ \square_n\subset\Lambda}}\int_{\square_n}(e^{-ipna}-e^{-ipx})d^2x\\&\qquad-\sum_{\substack{na\in\mathbf{Z}_a{}^2\cap\Lambda\\ \square_n\cap\Lambda^c\neq\phi}}\int_{\square_n}(e^{-ipna}-\chi_{\square_n\cap\Lambda}(x)^{-ipx})d^2x\Bigg]\end{aligned}$$

となる. 上式の右辺第一項は, (2) の場合と同様に,

$$\text{const. }\chi_a(p)|p|a$$

で抑えられる. 右辺第二項は, Λ の境界の長さを L_Λ とすれば,

$$\text{const. }L_\Lambda a$$

で抑えられる. したがって

$$|\hat{\chi}_{\Lambda,a}(p)-\chi_a(p)\hat{\chi}_\Lambda(p)|\leqslant\text{const. }a(1+|p|)$$

を得る. よって, あとは (2) の場合と同様にして (9.8.27) に対応する評価を得る. ∎

以後, Λ は $\mathbf{R}^2$ の有界開集合とし, その境界は連続であると仮定する.

補題 9.8.3　$g\geqslant 0$, $g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ または $g=\chi_\Lambda$ とする. このとき, $\varepsilon>0$ が存在して, すべての $a\in(0,1]$ と $p\in[2,\infty)$ に対して,

$$\|U_a(g)-U(g)\|_p\leqslant c(p-1)^N a^\varepsilon$$

が成立する. ただし, c は, a,p によらない定数.

証明　直接の計算によって

$$\begin{aligned}&\|U_a(g)-U(g)\|_2{}^2\\&=\frac{(2N)!}{(2\pi)^{4N-2}}\int\left|\frac{\chi_a(p_1)\cdots\chi_a(p_{2N})}{\omega_a(p_1)\cdots\omega_a(p_{2N})}\tilde{\hat{g}}_a(p_1+\cdots+p_{2N})-\frac{\hat{g}(p_1+\cdots+p_{2N})}{\omega(p_1)\cdots\omega(p_{2N})}\right|^2\\&\qquad\times dp_1\cdots dp_{2N}.\end{aligned}$$

ただし,

$$\tilde{\tilde{g}}(p) = \left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}^2} a^2 g(na)e^{-ipna}\right)\chi_{C_a}(p),$$

$$\mathbf{C}_a = \{p = p_1+\cdots+p_{2N} \mid p_j \in \mathbf{B}_a,\ j = 1, 2, \cdots, 2N\}.$$

被積分関数を

$$\left|\left(\prod_{j=1}^{2N}\frac{\chi_a(p_j)}{\omega_a(p_j)}\right)(1+|p_1+\cdots+p_{2N}|^\delta)\left(\frac{\tilde{\tilde{g}}_a(p_1+\cdots+p_{2N})-\hat{g}(p_1+\cdots+p_{2N})}{1+|p_1+\cdots+p_{2N}|^\delta}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\prod_{j=1}^{2N}\frac{\chi_a(p_j)}{\omega_a(p_j)}-\prod_{j=1}^{2N}\frac{1}{\omega(p_j)}\right)\hat{g}(p_1+\cdots+p_{2N})\right|^2$$

とし，定理 9.2.3 の証明と同様に Hölder の不等式を用いて評価し，補題9.8.2 の評価式を使えば

$$\|U_a(g)-U(g)\|_2 \leqslant ca^\epsilon$$

を得る．c は定数である．$p>2$ に対しては，定理3.4.10 を使えばよい．∎

さて，$g \geqslant 0$, $g \in \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^2)\cap\mathsf{L}^{1+\epsilon}(\mathbf{R}^2)$, $\epsilon \in (0, 1]$, $f_1, \cdots, f_n \in \mathsf{C}_{0,r}{}^\infty(\mathbf{R}^2)$ として，

$$S_g(f_1, \cdots, f_n) \equiv \frac{\displaystyle\int \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)e^{-U(g)}d\mu_{0,\mathrm{E}}}{\displaystyle\int e^{-U(g)}d\mu_{0,\mathrm{E}}} \tag{9.8.29}$$

定理 9.8.4

（1） $f \in \mathsf{C}_{0,r}{}^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して，各 $\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_\mathrm{E}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$, $p \in [1, \infty)$ で

$$\phi_a(f) \to \phi(f) \quad (a \to 0).$$

（2） $g \geqslant 0$, $g \in \mathsf{C}_0{}^\infty(\mathbf{R}^2)$ としよう．このとき，各 $\mathsf{L}^p(\mathbf{Q}_\mathrm{E}, d\mu_{0,\mathrm{E}}), p \in [1, \infty)$ で

$$U_a(g) \to U(g) \qquad (a \to 0)$$
$$e^{-U_a(g)} \to e^{-U(g)} \qquad (a \to 0)$$

（3） $g \geqslant 0$, $g \in \mathsf{C}_0{}^\infty(\mathbf{R}^2)$, $f_1, \cdots, f_n \in \mathsf{C}_{0,r}{}^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$\lim_{a\to 0} S_{g,a}(f_1, \cdots, f_n) = S_g(f_1, \cdots, f_n).$$

（4） $g = \chi_\Lambda$, $f_1, \cdots, f_n \in \mathsf{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ に対しても，(2), (3) がなりたつ．

証明 （1） $\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_\mathrm{E}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ での収束を示せば十分である（定理3.4.10 によ

る). 直接の計算によって

$$\|\phi_a(f)-\phi(f)\|_2=\left\|\frac{\hat{f}_a}{\omega_a}-\frac{\hat{f}}{\omega}\right\|_2$$
$$\leqslant\frac{\pi}{2m}\|\hat{f}_a-\hat{f}\|_2+\left\|\left(\frac{1}{\omega_a}-\frac{1}{\omega}\right)\hat{f}\right\|_2$$
$$\leqslant\frac{\pi}{2m}\|\hat{f}_a-\hat{f}\|_2+\left\|\frac{1}{\omega_a}-\frac{1}{\omega}\right\|_q\|\hat{f}\|_r$$

ただし, $1/q+1/r=1/2$. 第1番目の不等式は, (9.8.20), 第2番目のそれは, Hölder の不等式による. よって, 補題 9.8.2 によって, $\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ で $\phi_a(f)\to\phi(f)$ となる.

(2) $U_a(g)\to U(g)$ $(a\to 0)$ のほうは, 補題9.8.3から自明($p<2$ に対しては, Hölder の不等式を使えばよい). 不等式 $|e^x-e^y|\leqslant|x-y|(e^x+e^y)$ $(x, y\in\mathbf{R})$ と Hölder の不等式によって

$$\|e^{-U_a(g)}-e^{-U(g)}\|_p\leqslant\|U_a(g)-U(g)\|_r(\|e^{-U_a(g)}\|_q+\|e^{-U(g)}\|_q).$$

ただし, $1/r+1/q=1/p$. したがって,

$$\sup_{a\leqslant 1}\|e^{-U_a(g)}\|_q<\infty$$

を示せばよい. これは, 補題9.8.3の評価と補題9.2.5, 定理9.2.7の証明と同様にして示される(詳細は読者の演習とする). したがって, $\mathrm{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$ で, $\exp[-U_a(g)]\to\exp[-U(g)]$ となる.

(3) Hölder の不等式と (1), (2) の結果を使えばよい. ∎

次に, Dirichlet 境界条件の格子近似の収束を調べよう. この場合は, 考える有界領域 Λ のクラスを制限しなければならない:

定義 9.8.5 有界開集合領域 Λ は, $\mathrm{C}_{0,r}^{\infty}(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ が $\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ の位相で, $\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ で稠密であるとき, **正則** (regular) という.

正則な領域の例として,

命題 9.8.6 任意の有界な凸開集合は正則である.

証明 Λ を有界な凸開集合とする. $0\in\Lambda$ として一般性を失わない. このと

き，Λ の凸性によって，任意の $\lambda>1$ に対して，$\{\lambda x \mid x \notin \Lambda\}$ は，$\mathbf{R}^2\backslash\Lambda$ の部分開集合に含まれる．したがって，$f \in \mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ に対して，$f_\lambda(x)=f(\lambda^{-1}x)$ とすれば，f_λ は $\mathbf{R}^2\backslash\Lambda$ の部分開集合の中に台をもち，しかも，$\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ の位相で $f_\lambda \to f$ $(\lambda\to 1)$ となる．したがって，$\mathbf{R}^2\backslash\Lambda$ の部分開集合に台をもつ $f\in \mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ を $\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ の元によって ($\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ の位相で) 近似すればよい．これは，しかし，命題4.6.5の (3) の証明と同様にしてできる．すなわち，まず，f を Friedrichs の軟化演算子を用いて $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ の関数で近似し，さらに，$\mathrm{C}_0{}^\infty(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ の関数をそれにかけて近似すればよい．∎

正則条件の重要性は次の補題がなりたつところにある：

補題 9.8.7 Λ を正則領域としよう．このとき，$a\to 0$ となる適当な $\{a\}$ が存在して

$$\|(\tilde{P}_{\Lambda_a}-P_\Lambda)f\|_{-1}\to 0 \qquad f\in \mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2). \tag{9.8.30}$$

証明 簡単のため，$\tilde{e}_{\Lambda_a{}^{\mathrm{ext}}}=e_a$，$e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}=e$ と書く．

補題9.8.2の (2) の前半と $\|\cdot\|_{-1}\leqslant\|\cdot\|_{-2}$ によって，$\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ で，

$$f_a\to f \tag{9.8.31}$$

$$-\tilde{\Delta}_a f_a\to -\Delta f \tag{9.8.32}$$

となる．

$f\in \mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ とすれば，$e_a f_a=f_a$ であるから，

$$\begin{aligned}\|e_af-f\|_{-1}&\leqslant\|e_a(f-f_a)\|_{-1}+\|f_a-f\|_{-1}\\&\leqslant 2\|f-f_a\|_{-1}\to 0 \qquad (a\to 0).\end{aligned}$$

ここで，(9.8.31) を用いた．Λ の正則性によって，$\mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ は $\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ で稠密だから，すべての $f\in \mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2\backslash\Lambda)$ に対して，

$$e_af\to f \tag{9.8.33}$$

となる．

さて，$g\in \mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ とすれば，$\|e_ag\|_{-1}\leqslant\|g\|_{-1}$ がなりたつ．任意の Hilbert 空間における球は，弱位相でコンパクトだから，弱収束で，$e_ag\to f_0$ となる $\{a\}$ の部分列と $f_0\in \mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ が存在する．この部分列を改めて $\{e_ag\}$ と記す．$f_0=eg$ であることを示したい．

$h\in \mathrm{C}_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ とすれば，(9.8.32) によって，

$$\begin{aligned}\int f_0(x)h(x)dx &= \langle f_0, (-\Delta+m^2)h\rangle_{-1} \\ &= \lim_{a\to 0}\langle f_0, (-\tilde{\varDelta}_a+m^2)h\rangle_{-1} \\ &= \lim_{a\to 0}\langle e_a g, (-\tilde{\varDelta}_a+m^2)h\rangle_{-1} \\ &= \lim_{a\to 0} 2\sum_n a^4 C(na)h(na) \\ &= 0\end{aligned}$$

ここで，$C(na)$ は，$e_a g=\sum a^2C(na)h_{n,a}$ によってあたえられる関数で，$na\in \varLambda_a$ に対しては $C(na)=0$ をみたす．したがって，任意の $n\in \mathbf{Z}^2$ に対して，$C(na)h(na)=0$ である．したがって，f_0 の台は $\mathbf{R}^2\backslash\varLambda$ にある．すなわち，$f_0\in \mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^2\backslash\varLambda)$ である．特に，$ef_0=f_0$．したがって，任意の $f\in\mathsf{H}_{-1}(\mathbf{R}^2)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle f, f_0\rangle_{-1} &= \langle f, ef_0\rangle_{-1} = \langle ef, f_0\rangle_{-1} \\ &= \lim_{a\to 0}\langle ef, e_a g\rangle = \lim_{a\to 0}\langle e_a ef, g\rangle \\ &= \langle ef, g\rangle\end{aligned}$$

ここで，(9.8.33) を用いた．ゆえに，$f_0=eg$ を得る．

最後に，$e_a g$ が eg に強収束していることを示す．これは，しかし，一般に，Hilbert 空間で，射影演算子の列が射影演算子に弱収束すれば，実は強収束するという定理（証明は容易）の特別な場合に過ぎない．$e_a g\to eg$ は $P_a g\to Pg$ を意味するから，(9.8.30) を得る．∎

さて，各 $n\in\mathbf{Z}^2$ に対して

$$\phi_{\varLambda,a}{}^{\mathrm{D}}(n)=\phi(\tilde{P}_{\varLambda_a}h_{n,a}) \tag{9.8.34}$$

としよう．このとき，

$$\begin{aligned}\int \phi_{\varLambda,a}{}^{\mathrm{D}}(n)\phi_{\varLambda,a}{}^{\mathrm{D}}(n')d\mu_{0,\mathrm{E}} &= \frac{1}{2}\langle \tilde{P}_{\varLambda_a}h_{n,a}, h_{n',a}\rangle_{-1} \\ &= \frac{1}{2a^4}\langle \tilde{P}_{\varLambda_a}e_{na}, e_{n'a}\rangle_{\mathscr{N}_a} \\ &= C_{\varLambda_a}{}^{\mathrm{D}}(na, n'a)\end{aligned}$$

ここで，(9.8.10), (9.8.14) を用い，Dirichlet 境界条件の $(-\varDelta_{a,\varLambda_a}{}^{\mathrm{D}}+m^2)^{-1}$ の核を $C_{\varLambda_a}{}^{\mathrm{D}}(na, n'a)$ と書いた（付録2の命題2.9を参照）．したがって，上の

$\phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(n)$ は，Λ_a における Dirichlet 境界条件の格子場のモデルをあたえる．$f \in \mathrm{C}_{0,r}{}^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$\phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(f) = \sum_{n\in \mathbf{Z}^2} a^2 f(na)\phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(n) \tag{9.8.35}$$

とおく．また，$g \geqslant 0$，$g \in \mathrm{C}_{0,r}{}^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$U_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(g) = \sum_{n\in \mathbf{Z}^2} a^2 g(na) : \phi_{\Lambda_a}{}^{\mathrm{D}}(n)^{2N}: \tag{9.8.36}$$

とする．特に $g = \chi_\Lambda$ のとき，

$$U_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}} = \sum_{na\in \Lambda} a^2 : \phi_{\Lambda_a}{}^{\mathrm{D}}(n)^{2N}: \tag{9.8.37}$$

と書く．

定理 9.8.8 Λ を正則とする．このとき，$a \to 0$ となる $\{a\}$ が存在して，$a \to 0$ のとき，次が成立する：

（1） $\phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(f) \to \phi_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f)$.

（2） $U_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(g) \to U_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(g)$.

（3） $e^{-U_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(g)} \to e^{-U_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(g)}$.

ここで，上のいずれの場合も，収束は，$\mathrm{L}^p(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$，$p < \infty$，におけるものであり，$\phi_\Lambda{}^{\mathrm{D}}, U_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(g)$ は受動描像のそれである．

（4） (2), (3) は，$g = \chi_\Lambda$ の場合もなりたつ．

証明

（1） 定理 9.8.4 の (1) によって，$\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathrm{E}})$ で，$\phi_a(f) \to \phi(f)$．$P_a \equiv \tilde{P}_{\Lambda_a}$，$P \equiv P_\Lambda$ とすれば，補題 9.8.7 によって，$\|\{\Gamma(P_a) - \Gamma(P)\}\phi(g)\|_2 \to 0$．また，$\|\Gamma(P_a)\| \leqslant 1$ であるから

$$\begin{aligned}\|\phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(f) - \phi_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f)\|_2 &= \|\Gamma(P_a)\phi_a(f) - \Gamma(P)\phi(f)\|_2 \\ &\leqslant \|\Gamma(P_a)\{\phi_a(f) - \phi(f)\}\|_2 \\ &\quad + \|\{\Gamma(P_a) - \Gamma(P)\}\phi(f)\|_2 \to 0\end{aligned}$$

となる．$\phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(f)$，$\phi_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f) \in \Gamma_1(\mathrm{H}_{-1}(\mathbf{R}^2))$ であるから，その L^2-収束は，L^p-収束を意味する．

（2） $U_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(g) = \Gamma(p_a)U_a(g)$，$U_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(g) = \Gamma(p)U(g)$ であるから，証明は (1) とまったく同様である．

（3）　これは，定理 9.8.4 の (2) と同様である．すなわち，(2) が示されたので

$$\sup_{a<1} \|e^{-U_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(g)}\|_p < \infty$$

を示せばよい．これは，コンディショニングの比較定理による不等式（付録3参照）

$$\|e^{-U_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(g)}\|_p \leqslant \|e^{-U_a(g)}\|_p$$

と定理 9.8.4 によって得られる評価式

$$\sup_{a<1} \|e^{-U_a(g)}\|_p < \infty$$

とからわかる．

（4）　(2),(3) の証明とまったく同様．▮

この定理の結果として，格子近似の Dirichlet 境界条件-Schwinger 関数の $a\to 0$ での収束を示すことができる：

定理 9.8.9　$f_1, \cdots, f_n \in C_{0,r}{}^\infty(\Lambda)$ に対して

$$S_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(f_1, \cdots, f_n) = \frac{\int \phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(f_1)\cdots\phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(f_n)e^{-\lambda U_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}}d\mu_{0,\mathrm{E}}}{Z_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}} \tag{9.8.38}$$

とおく．ただし，

$$Z_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}} = \int e^{-\lambda U_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}}d\mu_{0,\mathrm{E}} \tag{9.8.39}$$

このとき，任意の正則領域 Λ に対して，$a\to 0$ となる適当な $\{a\}$ が存在して，

$$\lim_{a\to 0} S_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(f_1, \cdots, f_n) = S_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f_1, \cdots, f_n). \tag{9.8.40}$$

証明　Hölder の不等式によって，(9.8.38) の分子を評価し，定理 9.8.8 の結果を用いればよい．▮

f_j を $f_j \upharpoonright \mathbf{Z}_a{}^2$ と見れば，$S_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}(f_1, \cdots, f_n)$ は，ちょうど均された Dirichlet

境界条件-Schwinger 関数である (第8章を参照).

最後に，半 Dirichlet 境界条件の Schwinger 関数の収束を調べよう.

格子近似での半 Dirichlet 境界条件-Schwinger 関数を $\phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}$ を使って表わすために，相互作用を次のように書きかえる:

$$U_{\Lambda,a}=\sum_{k=0}^{N}\begin{Bmatrix}2N\\k\end{Bmatrix}\sum_{na\in\Lambda_a}:\phi_a{}^{2(N-k)}(na):_{\Lambda_a}{}^{\mathrm{D}}\delta C_{a,\Lambda_a}{}^{\mathrm{D}}(na)^k.$$

ここで，$\delta C_{a,\Lambda_a}{}^{\mathrm{D}}(na)$ は定義 8.4.1 であたえられるものである. したがって，格子近似の半 Dirichlet 境界条件の Schwinger 関数は，$\phi_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}$ を用いて

$$S_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)=(Z_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{HD}})^{-1}\int\phi_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}(f_1)\cdots\phi_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}(f_n)e^{-\lambda V_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}}d\mu_{0,\mathrm{E}},$$

$$Z_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{HD}}=\int e^{-\lambda V_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}}d\mu_{0,\mathrm{E}}$$

となる (なお，第8章参照). ただし，

$$V_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}=\Gamma(\tilde{P}_{\Lambda_a})V_{\Lambda,a},$$

$$V_{\Lambda,a}=\sum_{k=0}^{N}\begin{Bmatrix}2N\\k\end{Bmatrix}\sum_{na\in\Lambda_a}:\phi_a{}^{2(N-k)}(na):\delta C_{a,\Lambda_a}{}^{\mathrm{D}}(na)^k.$$

そこで，$V_{\Lambda,a}$ の $a\to 0$ の極限をとるために，次の補題が必要になる:

補題 9.8.10 Λ 上の関数 $g_a{}^{(k)}(x)$ を，x が点 na を中心とする一辺 a の正方形に入っているとき，$\delta C_{a,\Lambda_a}{}^{\mathrm{D}}(na)^k$ に等しい関数として定義する. このとき，各 $\mathrm{L}^p(\Lambda,dx)$，$1\leqq p<\infty$，で $g_a{}^{(k)}(x)\to\delta G_\Lambda(x)$.

この補題の証明は，長くなるので省略する*).

$\bar{\Lambda}'\subset\Lambda$，となる有界領域 Λ' をとり

$$V_{\Lambda,\Lambda',a}=\sum_{k=0}^{N}\begin{Bmatrix}2N\\k\end{Bmatrix}\sum_{na\in\Lambda_a'}:\phi_a(na)^{2(N-k)}:\delta C_{a,\Lambda_a}{}^{\mathrm{D}}(na)^k.$$

とおく.

$$V_{\Lambda,\Lambda',a}{}^{\mathrm{D}}\equiv\Gamma(\tilde{P}_{\Lambda_a})V_{\Lambda,\Lambda',a}$$

によって，$V_{\Lambda,a}{}^{\mathrm{D}}$ を置きかえた半 Dirichlet 境界条件-Schwinger 関数を

*) 詳しくは，Guerra, Rosen and Simon (1976) の §IX 参照.

$S_{\Lambda,\Lambda',a}{}^{\mathrm{HD}}$ としよう．

定理 9.8.11　Λ を正則領域，$\{\Lambda_n\}$ を $\bar{\Lambda}_n \subset \Lambda$ となる有界領域の単調増大列とする．このとき，すべての $f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{C}_{0,r}{}^{\infty}(\Lambda)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}[\lim_{a\to 0} S_{\Lambda,\Lambda_n,a}{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n)] = S_{\Lambda}{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n).$$

証明　命題9.7.8によって，

$$\lim_{a\to 0} S_{\Lambda,\Lambda_n,a}{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n) = S_{\Lambda,\Lambda_n}{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n) \tag{9.8.41}$$

を証明すればよい．補題9.8.10と Λ_n における $g_a{}^{(k)}(x)$ の a についての一様有界性によって，定理 9.8.4 の場合と同様にして，$a\to 0$ のとき，各 $\mathrm{L}^p(\mathrm{Q_E}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$，$p<\infty$，で

$$e^{-V_{\Lambda,\Lambda_n,a}} \longrightarrow e^{-V_{\Lambda,\Lambda_n}}$$

となる．ただし，

$$V_{\Lambda,\Lambda'} = \sum_{k=0}^{N} \begin{Bmatrix} 2N \\ k \end{Bmatrix} :\phi^{2(N-k)}(\chi_{\Lambda'}(\delta G_{\Lambda})^k):$$

したがって，定理9.8.8と同様にして，各 $\mathrm{L}^p(\mathrm{Q_E}, d\mu_{0,\mathrm{E}})$，$(p<\infty)$ で

$$e^{-V_{\Lambda,\Lambda_n,a}{}^{\mathrm{D}}} \longrightarrow e^{-\Gamma(P_\Lambda)V_{\Lambda,\Lambda_n}}$$

となる．$\Gamma(P_\Lambda)V_{\Lambda,\Lambda_n} = U_{\Lambda,\Lambda_n}$（受動描像）であるから，定理9.8.9の証明と同様に，(9.8.41) を得る．■

9.9　相関不等式

前節の結果を用いて，Schwinger 関数に対する不等式を導く．

定理 9.9.1　Λ を正則領域としよう．このとき $f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{C}_{0,r}{}^{\infty}(\Lambda)$，$f_j \geqslant 0$ に対して，

(1)　$$S_\Lambda(f_1, \cdots, f_n) \geqslant 0, \tag{9.9.1}$$

(2)　$$S_\Lambda(f_1, \cdots, f_n) \geqslant S_\Lambda(f_1, \cdots, f_k) S_\Lambda(f_{k+1}, \cdots, f_n), \quad k=1, \cdots, n-1. \tag{9.9.2}$$

同じことは，$S_\Lambda{}^{\mathrm{D}}(f_1, \cdots, f_n)$，$S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n)$ に対してもいえる．

証明 格子近似 $S_{\Lambda,a}{}^{(\mathrm{B})}(f_1,\cdots,f_n)$ に対して*) 上の不等式が成立することは，すでに第8章で示した．$a\to 0$ の極限をとっても，不等式はそのまま成立するので，定理9.8.4, 9.8.9, 9.8.11 によって，もとめる不等式を得る．∎

定理 9.9.2 $\Lambda\subset\Lambda'$ とし，Λ,Λ' はいずれも正則領域とする．このとき，$f_1,\cdots,f_n\in C_{0,r}{}^{\infty}(\Lambda), f_j\geqslant 0$ に対して，

$$S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)\leqslant S_{\Lambda'}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n).$$

証明 $\{\Lambda_k'\}$ を，$\bar{\Lambda}_k'\subset\Lambda'$, $\bigcup_k \Lambda_k'=\Lambda'$, をみたす単調増大列とし，しかも，$\Lambda_k\equiv\Lambda_k'\cap\Lambda$ は $\bar{\Lambda}_k\subset\Lambda$ をみたすとする．たとえば，

$$\Lambda_k'=\{x\in\Lambda\mid \mathrm{dist}(x,\partial\Lambda)\geqslant 1/k\}\cup\{x\in\Lambda'\backslash\Lambda\mid\mathrm{dist}(x,\partial\Lambda')\geqslant 1/k\}$$

とすればよい．定理9.8.11 によって，

$$S_{\Lambda,\Lambda_k,a}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)\leqslant S_{\Lambda',\Lambda_k',a}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)$$

を示せばよいが，$\mathrm{supp}\,f_j\subset\Lambda$, $f_j\geqslant 0$ であるから，結局，$l_1a,\cdots,l_na\in\Lambda_a$ に対して

$$S_{\Lambda,\Lambda_k,a}{}^{\mathrm{HD}}(l_1a,\cdots,l_na)\leqslant S_{\Lambda',\Lambda_k',a}{}^{\mathrm{HD}}(l_1a,\cdots,l_na)$$

を示せばよい．これは，しかし，定理8.3.4 ですでに示した．∎

定理 9.9.3 Λ を正則領域とする．このとき，$f_1,\cdots,f_n\in C_0{}^{\infty}(\Lambda)$, $f_j\geqslant 0$, $j=1,\cdots,n$, に対して，

$$S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)\leqslant S_\Lambda(f_1,\cdots,f_n).$$

証明 定理8.3.4 の (2) を用いて，定理9.9.2 と同様に示される．∎

次に，半 Dirichlet 境界条件-Schwinger 関数の母汎関数

$$Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f)=\frac{\int e^{i\phi(f)}e^{-\lambda U_\Lambda}d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}}{Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}},\qquad f\in C_0{}^{\infty}(\Lambda).\tag{9.9.3}$$

を評価しよう．これは，自由境界条件の Schwinger 関数の母汎関数

---

*) B = D または HD.

$$Z_\Lambda(f) = \frac{\int e^{i\phi(f)} e^{-\lambda U_\Lambda} d\mu_{0,\mathrm{E}}}{Z_\Lambda}$$

の評価を通して得られる：

定理 9.9.4

（1）　各 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して，定数 $c(f)$ が存在して，$\operatorname{supp} f \subset \Lambda$ となるすべての正則領域 Λ に対して

$$|Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f)| \leqslant e^{c(f)}. \tag{9.9.4}$$

（2）　各 $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $c(\varepsilon)$ が存在して，

$$|Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(if)| \leqslant e^{c(\varepsilon)\|f\|_1}. \tag{9.9.5}$$

ただし，Λ は正則領域とし，$f \in C_{0,r}^\infty(\Lambda)$ は，すべての t に対して

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t,x)| dx < \varepsilon^{-1}$$

をみたすものとする．

証明

定理 9.6.6 における評価が，$C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ の関数の絶対値であたえられるような関数にまで拡張されることに注意する．これを見るには，$f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$，$\operatorname{supp} f \subset \mathbf{R} \times (-l/2, l/2)$ に対して，$|f|$ を

$$f_\varepsilon = |f| * \rho_\varepsilon, \qquad \varepsilon > 0$$

によって近似すればよい．ただし，ρ_ε は，

$$\int \rho(x) dx = 1, \qquad \rho(x) \geqslant 0, \qquad \operatorname{supp} \rho \subset \{x \mid |x| \leqslant 1\}$$

をみたす $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ を使って，$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-2}\rho(x/\varepsilon)$ によって定義される関数である．$f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$，$f_\varepsilon \geqslant 0$ であり，ε が十分小さければ，$\operatorname{supp} f \subset \mathbf{R} \times (-l/2, l/2)$ となる．さらに，f_j が実数値ならば，

$$S_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n) \leqslant S_\Lambda^{\mathrm{HD}}(|f_1|, \cdots, |f_n|)$$

がなりたつ．これを示すには，$f_j^\pm(x) = \max\{0, \pm f_j(x)\}$ とすれば，$f_j^\pm \geqslant 0$ であって，

$$f_j = f_j^+ - f_j^-, \qquad |f_j| = f_j^+ + f_j^-$$

と書けることに注意する．このとき，

$$\begin{aligned} S_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n) &= \sum_{2^n\text{項}} (-1)^\alpha S_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f_1^\sharp,\cdots,f_n^\sharp) \\ &\leqslant \sum_{2^n\text{項}} S_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f_1^\sharp,\cdots,f_n^\sharp) \qquad [(9.9.1)\text{ による}] \\ &= S_\Lambda^{\mathrm{HD}}(|f_1|,\cdots,|f_n|). \end{aligned}$$

ここで，$f_j^\sharp$ は，f_j^+, f_j^- のどちらかを表わし，α は $f_j^\sharp = f_j^-$ となる j の個数である．したがって，

$$Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(if) \leqslant Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(-i|f|).$$

複素数値の $f\in C_0^\infty(\Lambda)$ に対しては，

$$\begin{aligned} |Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f)| &\leqslant Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(i\,\mathrm{Im}\,f) \\ &\leqslant Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(-i|\mathrm{Im}\,f|) \\ &\leqslant Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(-i|f|) \end{aligned} \tag{9.9.6}$$

定理 9.9.3 によって，

$$Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(-i|f|) \leqslant Z_\Lambda(-i|f|). \tag{9.9.7}$$

いま，$\Lambda\subset[-t/2,t/2]\times[-l/2,l/2]\equiv\Lambda_{t,l}$ とすれば，定理 9.9.2 と (9.9.7) によって，

$$\begin{aligned} Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(-i|f|) &\leqslant Z_{\Lambda_{t,l}}^{\mathrm{HD}}(-i|f|) \\ &\leqslant \lim_{t\to\infty} Z_{\Lambda_{t,l}}^{\mathrm{HD}}(-i|f|) \\ &\leqslant \lim_{t\to\infty} Z_{\Lambda_{t,l}}(-i|f|). \end{aligned}$$

これと定理 9.6.6 を使えば，(9.9.4)，(9.9.5) を得る． ∎

(9.9.5) から，$S_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)$ の，Λ に関する一様評価を得ることができる：

系 9.9.5 Λ を正則領域，$f_1,\cdots,f_n\in C_0^\infty(\Lambda)$ とし，

$$|||f_j|||_1 = \|f_j\|_1 + \sup_t \int |f_j(t,x)|dx \tag{9.9.8}$$

とおく．このとき，定数 $c>0$ が存在して

$$|S_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)| \leqslant \prod_{j=1}^n (e^c |||f_j|||_1) \tag{9.9.9}$$

が成立する．

証明　$Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}\left(-i\sum_{j=1}^{n}\zeta_j f_j\right)$ は，$\zeta_1,\cdots,\zeta_n\in\mathbf{C}$，について解析的であり，

$$S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)=\left.\frac{\partial^n Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}\left(-i\sum_{j=1}^{n}\zeta_j f_j\right)}{\partial\zeta_1\cdots\partial\zeta_n}\right|_{\zeta_1=\cdots=\zeta_n=0}.$$

したがって，Cauchy の評価式と (9.9.5) を使えば，$\sup_t\int|h_j(t,x)|dx<1$，$\|h_j\|_1<1$ をみたす $h_j\in C_0{}^\infty(\Lambda)$ に対して

$$|S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(h_1,\cdots,h_n)|\leqslant e^{cn} \tag{9.9.10}$$

を得る．ただし，$c=c(1)$ とおいた．次に，一般の $f_j\in C_0{}^\infty(\Lambda)$ に対しては，

$$h_j=\frac{f_j}{|||f_j|||_1}$$

とおけば，この h_j に対して，(9.9.10) がなりたつ．したがって，(9.9.9) を得る．∎

系 9.9.6　Λ を正則領域，$f\in C_0{}^\infty(\Lambda)$ とするとき，定数 $c>0$ が存在して，

$$|Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f)|\leqslant e^{c|||f|||_1}. \tag{9.9.11}$$

証明　$Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(\zeta f)$ は，$\zeta\in\mathbf{C}$ の解析関数で

$$\left.\frac{d^n}{d\zeta^n}Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(\zeta f)\right|_{\zeta=0}=i^n S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f,\cdots,f)$$

であるから

$$Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(\zeta f)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\zeta)^n}{n!}S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f,\cdots,f).$$

したがって，特に，$\zeta=1$ として，(9.9.9) を使えば (9.9.11) を得る．∎

9.10　無限体積極限とその基本的性質——公理の検証

この節では，半 Dirichlet 境界条件-Schwinger 関数，およびその母汎関数の無限体積極限の存在を示し，無限体積理論の基本的性質を調べる．

定理 9.10.1　すべての $f_1,\cdots,f_n\in C_0{}^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{R}^2}S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)\equiv S_n(f_1,\cdots,f_n) \tag{9.10.1}$$

は存在する．ただし，$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbf{R}^2}$ は，$\mathbf{R}^2$ に収束する正則領域の任意の増大列に関する極限を表わす．さらに，評価式

$$|S_n(f_1, \cdots, f_n)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \{c|||f_j|||_1\} \tag{9.10.2}$$

がなりたつ．ただし，$c>0$ は定数．さらに，S_n は

$$\tilde{S}_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = S_n(f_1, \cdots, f_n) \tag{9.10.3}$$

となるような $\tilde{S}_n \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^{2n})$ に一意的に拡張される．

証明　$S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$ の多重線形性によって，$f_j \geqslant 0$ の場合に対して示せば十分である．定理9.9.2，系9.9.5によって $S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f_1, \cdots, f_n)$ は，上に有界な，Λ の単調増加関数である．よって，無限体積極限 S_n は存在する．(9.10.2) は (9.9.9) で $\Lambda \nearrow \mathbf{R}^2$ とすれば得られる．$|||f|||_1$ は，ある $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ のノルムで上から抑えられるから，$S_n(f_1, \cdots, f_n)$ は，まず，$\mathscr{S}(\mathbf{R}^2) \times \cdots \times \mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ (n 個の $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ の直積) 上の連続な多重線形汎関数に拡張される．したがって，Schwartz の核定理によって，(9.10.3) をみたす $\tilde{S}_n \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^{2n})$ が一意的に存在する．∎

以後，$\tilde{S}_n = S_n$ と書く．また，$S_0 \equiv 1$ とおく．

系 9.10.2　すべての $n \geqslant 1$ に対して，

$$S_{2n+1}(f) = 0, \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{2(2n+1)}).$$

証明　$d\mu_{0,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}$ は $\mathscr{S}_r{}'(\mathbf{R}^2)$ 上の偶測度であり，$U_\Lambda(\phi) = U_\Lambda(-\phi)$ であるから，$d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$ は，$\mathscr{S}_r{}'(\mathbf{R}^2)$ 上の偶測度である．したがって，任意の $f_1, \cdots, f_{2n+1} \in C_0{}^\infty(\Lambda)$ に対し，

$$S_{2n+1,\Lambda}(f_1, \cdots, f_{2n+1}) = 0.$$

$\Lambda \nearrow \mathbf{R}^2$ として，$S_{2n+1}(f_1, \cdots, f_{2n+1}) = 0$ を得る．これと連続性とによって，もとめる結果を得る．∎

上の結果は，考えているモデルに依存した性質である．

定理 9.10.3　$\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ は，クラスター性を除いて，他のすべての Osterwalder-Schrader の公理 (OS 1)′, (OS 2)—(OS 4) をみたす．

証明

(OS 1)′ : S_n の超関数としての緩増加性 (定理9.10.1) と問題2.7による．

また，エルミート性は，格子近似でのそれ（定理8.3.6(1)）から得られる．

(OS 2)：$\alpha\in\mathbf{E}^2$ とすれば，

$$S_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f_1\circ\alpha,\cdots,f_n\circ\alpha)=S_{\alpha^{-1}(\Lambda)}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n) \tag{9.10.4}$$

Λ_n が $\Lambda_n\nearrow\mathbf{R}^2$ をみたす，正則領域の単調増大列であれば，$\alpha^{-1}(\Lambda_n)$ もそうである．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}S_{\alpha^{-1}(\Lambda_n)}{}^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n)=S^{\mathrm{HD}}(f_1,\cdots,f_n),\qquad f_j\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2).$$

他方，(9.10.4) の左辺は，$S^{\mathrm{HD}}(f_1\circ\alpha,\cdots,f_n\circ\alpha)$ に収束する．よって，S^{HD} の Euclid 不変性が得られる．

(OS 3)：これは，格子近似での対応する性質（定理8.3.6(2)）から，極限操作によって得られる．

(OS 4)：$\langle\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}=\langle\phi(f_{\pi(1)})\cdots\phi(f_{\pi(n)})\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$，$\pi\in\mathcal{P}_n$，によって明らか．■

Schwinger 関数のクラスター性 (OS 5) については：

定理 9.10.4　定数 $\lambda_0>0$ が存在して，$0<\lambda\leqslant\lambda_0$ ならば，Schwinger 関数 $\{S_n\}$ はクラスター性をもつ．

実際，定数 $M(\lambda)>0$ が存在して，$0<\lambda\leqslant\lambda_0$ ならば，任意の $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^k)$，$g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ と絶対値が十分に大きな $a\in\mathbf{R}^2$ に対して

$$|S_{k+n}(f\otimes g_a)-S_k(f)S_n(g)|\leqslant C(f,g)e^{-M(\lambda)|a|}$$

がなりたつ．ただし，

$$g_a(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1-a,\cdots,x_n-a)$$

で，$C(f,g)>0$ は，f,g に依存する定数である（λ にも依存し得る）．

この定理の証明はしない*)．証明には，統計力学における，いわゆるクラスター展開あるいは高温展開の方法が用いられる．

次に，母汎関数の収束を調べよう：

定理 9.10.5　$f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ とする．このとき，

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{R}^2}Z_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}(f)\equiv Z(f) \tag{9.10.5}$$

*) Glimm, Jaffe and Spencer (1973) を参照せよ．

は存在し，

$$|Z(f)| \leqslant e^{c|||f|||_1} \tag{9.10.6}$$

が成立する．ただし，$\Lambda \nearrow \mathbf{R}^2$ は，$\mathbf{R}^2$ に収束する正則領域の任意の増大列の極限を表わし，$c>0$ は定数である．さらに，

$$\mathbf{C}^n \ni (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \longrightarrow Z\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right), \qquad f_1, \cdots, f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2),$$

は解析的であり，

$$(-i)^n \frac{\partial^n Z\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)}{\partial\zeta_1 \cdots \partial\zeta_n}\Bigg|_{\zeta_1=\cdots=\zeta_n=0} = S_n(f_1, \cdots, f_n). \tag{9.10.7}$$

証明 $\{\Lambda_l\}$ を正則領域の単調増大列で $\Lambda_l \nearrow \mathbf{R}^2$ $(l \to \infty)$ となるものとし，$f_1, \cdots, f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ を固定し，

$$F_l(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = Z_{\Lambda_l}^{\mathrm{HD}}\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)$$

とおく．(9.9.11) によって，

$$|F_l(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)| \leqslant e^{c\sum_{j=1}^n |\zeta_j| |||f_j|||_1}$$

また，定理 9.10.1 によって，すべての自然数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \geqslant 0$ に対して

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} F_l(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)}{\partial\zeta_1^{\alpha_1} \cdots \partial\zeta_n^{\alpha_n}}\Bigg|_{\zeta_1=\cdots=\zeta_n=0} = i^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} \langle \phi(f_1)^{\alpha_1} \cdots \phi(f_n)^{\alpha_n} \rangle_{\Lambda_l}^{\mathrm{HD}} \tag{9.10.8}$$

は，$l \to \infty$ のとき収束する．よって，$F_l(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ は Vitali の定理（補題 8.4.10）の仮定をみたす．ゆえに，$\mathbf{C}^n$ 上の正則関数 $F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ が存在して，F_l は，任意のコンパクト集合上，F に一様収束する．特に，$n=1, \zeta_1 f_1 = f$ とすれば，(9.10.5) を得る．このとき，

$$Z\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right) = F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$$

であるから，$Z\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)$ は，$(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ の整関数である．不等式 (9.10.6) は，(9.9.11) で $\Lambda \nearrow \mathbf{R}^2$ として得られる．(9.10.7)は，F_l の収束の一様性と (9.10.1), (9.10.8) によって成立する．∎

$f, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ とすれば，不等式

$$|e^{\zeta_1}-e^{\zeta_2}| \leqslant |\zeta_1-\zeta_2|(e^{\mathrm{Re}\,\zeta_1}+e^{\mathrm{Re}\,\zeta_2}) \qquad (\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{C})$$

と Schwarz の不等式によって

$$\begin{aligned} &|Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f)-Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(g)| \\ &\leqslant S_\Lambda^{\mathrm{HD}}(\bar{f}-\bar{g}, f-g)^{1/2}[Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(-i\,2\,\mathrm{Re}\,f)^{1/2}+Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(-i\,2\,\mathrm{Re}\,g)^{1/2}]. \\ &\leqslant c|\!|\!|f-g|\!|\!|_1(e^{c|\!|\!|f|\!|\!|_1}+e^{c|\!|\!|g|\!|\!|_1}). \end{aligned}$$

ただし，$c>0$ は定数で，最後の不等式を得るのに (9.10.2), (9.10.6) を用いた．そこで，Λ を正則領域として，$\Lambda \nearrow \mathbf{R}^2$ とすれば，

$$|Z(f)-Z(g)| \leqslant c|\!|\!|f-g|\!|\!|_1(e^{c|\!|\!|f|\!|\!|_1}+e^{c|\!|\!|g|\!|\!|_1}) \qquad (9.10.9)$$

を得る．$|\!|\!|\cdot|\!|\!|_1$ は，ある $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ のノルムで抑えられるから，(9.10.9) は，ア・プリオリには，$C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ 上の汎関数である $Z(f)$ が，$\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ 上の汎関数に，連続的に拡張されることを示している．この拡張も同一記号 $Z(f)$ で表わすことにする．

定理 9.10.6　$\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^2)$ 上の確率測度 $d\mu$ が存在して，すべての $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$Z(f) = \int_{\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^2)} e^{i\phi(f)} d\mu \qquad (9.10.10)$$

となる．さらに，

（1）　すべての $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ に対して，

$$S_n(f_1, \cdots, f_n) = \int \phi(f_1)\cdots\phi(f_n) d\mu \qquad (9.10.11)$$

（2）　μ は，Euclid 群の作用に対して不変である．すなわち，任意の変換 $\alpha \in \mathbf{E}^2$ に対して，$\mu\circ\alpha = \mu$.

証明　まず，$f \in \mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2)$ とすれば，$Z(f)$ が Minlos の定理の仮定をみたすことを示す．$Z(0)=1$ は明らか．$f \longrightarrow Z(f)$ の連続性は (9.10.9) によって示される．$f_1, \cdots, f_n \in C_{0,r}^\infty(\mathbf{R}^2)$ とすれば，明らかに，

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\zeta}_i\zeta_j Z_\Lambda^{\mathrm{HD}}(f_i-f_j) \geqslant 0, \qquad \zeta_1, \cdots, \zeta_n \in \mathbf{C}.$$

$\Lambda \nearrow \mathbf{R}^2$ の極限をとれば，

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\zeta}_i \zeta_j Z(f_i - f_j) \geqslant 0 \tag{9.10.12}$$

を得る．次に，連続性によって，(9.10.12) は，すべての $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2)$ に拡張される．こうして，$Z(f)$ は Minlos の定理の仮定をみたすことがわかった．ゆえに，$f \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2)$ として，(9.10.10) をみたす，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^2)$ 上の確率測度 $d\mu$ がただひとつ存在する．

次に，$x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$, $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2)$ とすれば，いま示したことにより

$$Z\left(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j\right) = \int e^{i \sum_{j=1}^{n} x_j \phi(f_j)} d\mu.$$

$Z\left(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j\right)$ は，$x_1, \cdots, x_n$ について実解析的であったから，(9.10.7) によって，(9.10.11) を得る．すると多重線形性によって，(9.10.11) は，すべての $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ に拡張される．Schwinger 関数に対する評価式 (9.10.2) を用いると，すべての $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ に対して，

$$\int e^{|\phi(f)|} d\mu < \infty$$

を得る．したがって，Lebesgue の収束定理によって

$$\begin{aligned} Z(f) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} S_n(f, \cdots, f) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{[i\phi(f)]^n}{n!} d\mu \\ &= \int e^{i\phi(f)} d\mu \end{aligned}$$

となる．

(2) は，Schwinger 関数の Euclid 不変性 (OS 2) から得られる：$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ とすれば，$\alpha \in \mathbf{E}^2$ に対して，

$$\begin{aligned} \int e^{i\phi(f\circ\alpha)} d\mu &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} S_n(f\circ\alpha, \cdots, f\circ\alpha) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} S_n(f, \cdots, f) = \int e^{i\phi(f)} d\mu. \end{aligned}$$

したがって，

$$\int e^{i\phi(f)} d(\mu\circ\alpha^{-1}) = \int e^{i\phi(f)} d\mu.$$

これは，すべての $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ に対して成立し，$\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2)\}$ は full であるから，$\mu\circ\alpha^{-1} = \mu$ でなければならない．∎

無限体積理論における相関不等式を以下に列挙する．ただし，詳しい証明はしない．

$$\langle\cdot\rangle = \int \cdot\, d\mu$$

とおく．

定理 9.10.7 (**GKS 不等式**)

(1) $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $f_j \geqslant 0$, $j = 1, \cdots, n$, とすれば

$$\langle\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\rangle \geqslant 0.$$

(2) $f_1, \cdots, f_{n+l} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $f_j \geqslant 0$, $j = 1, \cdots, n+l$, とすれば

$$\langle\phi(f_1)\cdots\phi(f_{n+l})\rangle \geqslant \langle\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\rangle\langle\phi(f_{n+1})\cdots\phi(f_{n+l})\rangle.$$

証明　定理 9.9.1 による．∎

定理 9.10.8 (**FKG 不等式**)　$f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $f_j \geqslant 0$ とする．F, G を $\mathbf{R}^n$ 上の多項式的に有界な関数で，各変数について，単調増大であるとしよう．このとき，

$$\langle F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))G(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))\rangle$$
$$\geqslant \langle F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))\rangle\langle G(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))\rangle.$$

証明　格子近似まで還元して考えればよい．∎

注意　上の型の $F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) \equiv F$ に対しても，$\langle F\rangle_\Lambda^{\mathrm{HD}} \to \langle F\rangle$ となることが示される (問題 9.3)．

定理 9.10.9 (**Lebowitz 不等式**)　$f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, $f_j \geqslant 0$ とするとき，

$$\langle\phi(f_1)\phi(f_2)\phi(f_3)\phi(f_4)\rangle - \langle\phi(f_1)\phi(f_2)\rangle\langle\phi(f_3)\phi(f_4)\rangle$$
$$-\langle\phi(f_1)\phi(f_3)\rangle\langle\phi(f_2)\phi(f_4)\rangle - \langle\phi(f_1)\phi(f_4)\rangle\langle\phi(f_2)\phi(f_3)\rangle \leqslant 0.$$

証明　格子近似で Lebowitz の不等式が成立することによる．∎

9.11 摂動級数の漸近性

前節までに，$(\phi^{2N})_2$ モデルを厳密な仕方で構成し，その基本的性質を調べた．しかし，実際の物理量（たとえば，S-行列）と直接結びつく Schwinger 関数の‘具体的な計算法’については何もいわなかった．ここでいう‘具体的な計算法’とは，Schwinger 関数を‘よくわかった’関数を用いて表わすことである．そのひとつの簡便な方法は**摂動論**（perturbation theory）である．

摂動論は，ひとつのモデルに限られた特殊なものではない．その考え方は，モデルに含まれるパラメーター——$X\in\mathbf{C}$ と書こう；$(\phi^{2N})_2$ モデルの場合でいえば，たとえば結合定数 λ——のある値 X_0 に対してそのモデルがよくわかっている場合に，そのモデルのもつ物理量を $X-X_0$ の巾級数——**摂動級数**(perturbation series)——に展開し，その展開係数を，$X=X_0$ の場合から始めて逐次もとめようというものである．場の量子論の多くのモデルでは，この摂動論を形式的に行なうと‘発散の困難’に出会うことを第1章に述べた．すなわち，摂動級数の展開係数の中に発散するものが現われるのである．この困難を回避するひとつの方法として提出されたのが，いわゆる‘くりこみ法(renormalization method)’であった．これは，簡単にいうと摂動級数の展開係数を有限にする一種のアルゴリズムである．しかし，これで問題は解決したわけではなく，くりこみをした摂動級数の厳密な数学的意味づけ（たとえば，摂動級数はどのような意味で総和可能なのか）はもとより，くりこみで得た量が何らかの Hilbert 空間における演算子論としての場の量子力学に対応しているかという問題も残されたままであった（なお，11.2節を参照）．この問題——くりこみ理論の厳密な数学的基礎づけ——は，モデルの数学的構成と不可分のものである．以下，$(\phi^{2N})_2$ モデルの Schwinger 関数に対する摂動論の数学的意味づけについての結果を紹介しよう．

まず，Schwinger 関数に対する形式的摂動級数をあたえる．測度 $d\mu_{0,\mathrm{E}}$ による期待値を $\langle\cdot\rangle_0$ と記す：

$$\langle\cdot\rangle_0=\int\cdot\, d\mu_{0,\mathrm{E}}. \tag{9.11.1}$$

$\mathbf{Q}_E$ 上の関数 $F_1, \cdots, F_n$ に対して自由場の n **点関数の実質部分** (truncated n-point function) $\langle F_1 \cdots F_n \rangle_0{}^{\mathrm{T}}$ を帰納的に次のように定義する：

$$\langle F_1 \rangle_0{}^{\mathrm{T}} = \langle F_1 \rangle_0, \tag{9.11.2}$$

$$\langle F_1 \cdots F_n \rangle_0{}^{\mathrm{T}} = \langle F_1 \cdots F_n \rangle_0 - \sum_{\pi \in \Pi_n} \prod_{p \in \pi} \langle \{F_i\}_{i \in p} \rangle_0{}^{\mathrm{T}}, \qquad n \geqslant 2. \tag{9.11.3}$$

ただし，Π_n は $(1, \cdots, n)$ の分割のすべての集合である．たとえば，

$$\langle F_1 F_2 \rangle_0{}^{\mathrm{T}} = \langle F_1 F_2 \rangle_0 - \langle F_1 \rangle_0 \langle F_2 \rangle_0,$$

$$\begin{aligned} \langle F_1 F_2 F_3 \rangle_0{}^{\mathrm{T}} = \langle F_1 F_2 F_3 \rangle_0 &- \langle F_1 \rangle_0 \langle F_2 F_3 \rangle_0 - \langle F_2 \rangle_0 \langle F_1 F_3 \rangle_0 \\ &- \langle F_3 \rangle_0 \langle F_1 F_2 \rangle_0 + 2 \langle F_1 \rangle_0 \langle F_2 \rangle_0 \langle F_3 \rangle_0. \end{aligned}$$

次に，$\Lambda = (-l/2, l/2) \times (-l/2, l/2)$ に対して (9.7.22) を

$$U_\Lambda = U_l \tag{9.11.4}$$

とおく．いま，$f = (f_1, \cdots, f_n)$，$f_j \in \mathbf{C}$，を固定し，

$$S^{(l)}(\lambda, f) = \frac{\langle \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) e^{-\lambda U_l} \rangle_0}{\langle e^{-\lambda U_l} \rangle_0} \tag{9.11.5}$$

を考える．形式的摂動論においては，$S^{(l)}(\lambda, f)$ をもとめるために，次のように λ の形式的巾級数に展開する：

$$\begin{aligned} S^{(l)}(\lambda, f) &= \frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} \langle \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) U_l{}^r \rangle_0}{\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^r}{r!} \langle U_l{}^r \rangle_0} \\ &\equiv \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} a_r{}^{(l)}(f). \end{aligned} \tag{9.11.6}$$

ただし，

$$a_r{}^{(l)}(f) = (-1)^r \langle \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) U_l{}^r \rangle_0{}^{\mathrm{T}} \tag{9.11.7}$$

である．右辺は Gauss 型積分であるから，Wick の定理によって，自由場の2点 Schwinger 関数を用いて書ける．したがって，n 点 Schwinger 関数 $S^{(l)}(\lambda, f)$ は，形式的には，具体的に計算できることになる．無限体積極限に対する形式的摂動級数は，(9.11.6) で形式的に $l \to \infty$ として，

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} a_r(f) \tag{9.11.8}$$

であたえられる．ただし，

$$a_r(f) \equiv \lim_{l\to\infty} a_r^{(l)}(f). \qquad (9.11.9)$$

ここで次の点を強調しておこう．すなわち，形式的摂動級数 (9.11.8) は，モデルの厳密な構成とは別に，相互作用ないし U_l があたえられれば，(9.11.7), (9.11.9) を経て直接に計算されるということである．2 次元時空の場合には $a_r(f)$ は発散しないで収束することを実際に示すことができる．そのためには，(9.11.7) 型の積分を第1章に述べた Feynman グラフで表示して評価すればよい*⁾．3次元以上の $P(\phi)$ モデルでは，すべての $a_r(f)$ $(r=1,2,\cdots)$ が有限とはならない．すなわち，真のくりこみを必要とする．この意味でも $P(\phi)_2$ モデルは簡単なモデルといわねばならない．

さて，問題は，形式的摂動級数 (9.11.8) が，いかなる意味で，(9.10.1) で定義される無限体積極限の Schwinger 関数 $S_n(f_1,\cdots,f_n)$ を近似するかである．形式的摂動級数が発散することは，Jaffe (1965) によって示された**⁾．この結果は，形式的摂動級数の意味づけには，もしそれが可能であるとすれば，一般には，発散級数に対する総和法が用いられなければならないことを暗示している．実際，次が成立する：

定理 9.11.1 $S_n(f_1,\cdots,f_n)=S_n(\lambda,f)$ と書こう．このとき，ある定数 $\lambda_0>0$ が存在して，$S_n(\lambda,f)$ は λ について，$[0,\lambda_0]$ で無限回微分可能であり，したがって形式的摂動級数 (9.11.8) は $S_n(\lambda,f)$ に対する漸近級数である．すなわち，各 $N\geqq 1$ に対して

$$|\lambda|^{-N}\left|S_n(\lambda,f)-\sum_{r=0}^{N}\frac{\lambda^r}{r!}a_r(f)\right|\to 0 \qquad (\lambda\to +0)$$

がなりたつ．

この定理の証明はしない．Dimock (1974) を参照．この定理は，形式的摂動級数が漸近級数として数学的に意味をもつことを示している．

Schwinger 関数を実時間に解析接続した，Minkowski 場の理論での Green 関数——時間順序づけられた Wightman 超関数——に対する摂動級数の漸近

*) 詳しくは，中西 (1975) の第5, 6章を参照．

**) ただし，彼は Minkowski 時空で考えているが，Euclid 時空の場合でも証明法は変らない．

性も Dimock (1976) によって示されている.

9.12 散乱の存在，スペクトルなど

物理的にいって，特に興味があるのは散乱である．結合定数 λ が十分小さい場合には，エネルギー・運動量スペクトルにおいて，孤立した一粒子双曲面の存在が示される [Glimm, Jaffe and Spencer (1974)]．したがって，散乱理論を構成するのに，公理論的に確立された Haag-Ruelle の散乱理論（たとえば，ボゴリューボフ他 (1972) の第4章）を使うことができ，入射粒子の状態と出て行く粒子の状態のあいだの遷移確率振幅をあたえる散乱演算子 S——S-行列ともよばれる——が定義される．散乱の存在をいうには，$S \neq I$（恒等演算子）を示せばよいが，これは，Osterwalder and Sénéor (1976), Eckmann, Epstein and Fröhlich (1976) によって証明された．その方法は，S の行列要素が λ について漸近展開できることを示し，λ の低次の項が 0 でないことをいうものである．S の行列要素は，いわゆる LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann)の公式によって*)，実時間に解析接続された Schwinger 関数と結びついているので，前節で述べた Dimock (1976) の結果は，すでに $S \neq I$, すなわち，散乱の存在を含んでいたといえる．もちろん，厳密ではない形式的摂動論にしたがえば，散乱の存在は，容易に予想されることである．技術的な詳細については，上記の論文を参照せよ．

その他の問題として，束縛状態，質量スペクトルのそれがあるが，これらについては，Spencer and Zirilli (1976), Dimock and Eckmann (1976) 等を参照のこと.

9.13 モデルを特徴づける方程式

前節までに，$(\phi^{2N})_2$ モデルの切断なしの Schwinger 関数列を構成し，それらのいくつかの基本的性質をみてきた．この節では，これらの Schwinger

---

*) ボゴリューボフ他 (1972) の4章参照.

関数列を特徴づける方程式についていくつかの注意を述べる.

クラスター性 (OS 5) を仮定すれば*), 定理9.10.3と再構成定理**)によって, Gårding-Wightman の公理系をみたす, Minkowski 空間上の $(\phi^{2N})_2$ 量子場理論を得ることができ, その量子場の方程式として, (9.1.1) に対応するものが導かれる (Glimm and Jaffe (1971), Schrader (1974) を参照).

$P(\phi)_\nu$ モデル (いまの場合は $\nu=2$, $P(X)=X^{2N}$) をひとつの古典統計力学のモデルとしてみるならば, 第8章におけるように, それを DLR 型の方程式を使って特徴づけるのも自然といえる. 実際, P に対応して, ア・プリオリに DLR 型の方程式を定義することができ, 前節までに構成した, 無限体積極限の状態の確率測度 μ がその方程式を ($P=X^{2N}$ として) みたすことが証明される (Guerra 他 (1975), Fröhlich (1974, 1977), Fröhlich and Simon (1977) 等を参照).

ここでは, $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ 上の汎関数微分方程式による $P(\phi)_\nu$ モデルの特徴づけについて, 少し詳しく記述しよう (Arai (1983)). この方程式は, **Schwinger-Dyson 方程式**とよばれるもので, Schwinger によって唱えられた, 量子化の'微分的観点' = '源 (sources)' の方法における基礎方程式である (Schwinger (1951, 1970, 1973) などを参照). また, 近年では, 物理の文献において, 形式的汎関数積分との関連で, 形式的な道具として用いられている (たとえば, Nash (1978)). 以下の議論は, Schwinger-Dyson 方程式を厳密な数学解析の対象としてとらえる試みのひとつである.

$\Phi : \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu) \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ 上の汎関数としよう. このとき, ある $D\Phi : \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^\nu)$ が存在して, すべての $f, g \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Phi(f+\varepsilon g)-\Phi(f)}{\varepsilon} = \langle D\Phi(f), g\rangle \equiv D_g\Phi(f) \qquad (9.13.1)$$

がなりたつならば, Φ は $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ 上で汎関数微分可能であるという. ここで

$$\langle \phi, h\rangle \equiv \phi(h), \quad \phi \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^\nu),\ h \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu). \qquad (9.13.2)$$

$D\Phi$ を Φ の導汎関数 (functional derivative) とよび,

*) 定理 9.10.4 参照.

**) 第2章参照.

$$D\Phi(f)(x)=\frac{\delta\Phi(f)}{\delta f(x)},\qquad x\in\mathbf{R}^\nu, \tag{9.13.3}$$

と書く．$D\Phi(f)(x)$ は $D\Phi(f)\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^\nu)$ の超関数核である．$D_g\Phi$ は，各 g を固定すれば，$\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ 上の汎関数をあたえる．そこで，各 g に対して $D_g\Phi$ が $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ 上で汎関数微分可能であるならば Φ は2回汎関数微分可能であるという．さらに，$D_hD_g\Phi:\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)\longrightarrow\mathbf{C}$ であるが，$D_hD_g\Phi(f)$ が，各 $h,g,f\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ について連続であるならば，Φ は2回連続汎関数微分可能であるという．このとき，ある $D^2\Phi:\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)\longrightarrow\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2\nu})$ がただひとつ存在して

$$D_hD_g\Phi(f)=\langle D^2\Phi(f),\ h\otimes g\rangle=\langle D^2\Phi(f),\ g\otimes h\rangle \tag{9.13.4}$$

となる．$D^2\Phi$ の一意的存在は Schwartz の核定理により，(9.13.4) の第2の等号——これは，$D^2\Phi(f)$ が対称な緩増加超関数であることを意味する——は $D_hD_g\Phi(f)$ の f についての連続性による．$D^2\Phi$ を Φ の2階の導汎関数とよび $D^2\Phi(f)$ の超関数核 $D^2\Phi(f)(x,y)$ を

$$D^2\Phi(f)(x,y)=\frac{\delta^2\Phi(f)}{\delta f(x)\delta f(y)} \tag{9.13.5}$$

と書く．(9.13.4) の第2の等式によって

$$\frac{\delta^2\Phi(f)}{\delta f(x)\delta f(y)}=\frac{\delta^2\Phi(f)}{\delta f(y)\delta f(x)}$$

がなりたつ．以下同様にして，Φ の n 階の導汎関数 $D^n\Phi:\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)\longrightarrow\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n\nu})$ が定義され，$D^n\Phi(f)$ の超関数核 $D^n\Phi(f)(x_1,\cdots,x_n)$ を

$$D^n\Phi(f)(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\delta^n\Phi(f)}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)} \tag{9.13.6}$$

と書く．$\delta^n\Phi(f)/\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)$ は $(x_1,\cdots,x_n)$ の任意の置換に対して対称的である．

次に，n 階の導汎関数 $\delta^n\Phi(f)/\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)$ から*)，同一の空間点 $x=x_1=\cdots=x_n$ における n 階の導汎関数 '$\delta^n\Phi(f)/\delta f(x)^n$' を定義したい．しかし，$\delta^n\Phi(f)/\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)$ は，一般には，$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n\nu})$ の元の核であるので，$x_i=x_j$ $(i\neq j)$ の近傍で特異であり得る．そこで，次のような手続をふむ:

*) 言葉を混用して，$D^n\Phi(f)$ の核もこのようによぶことにする．

$C=C(x,y)$ を $\mathbf{R}^\nu\times\mathbf{R}^\nu$ 上の対称な緩増加超関数とし，**C について再順序化された n 階の導汎関数**

$$\mathrm{R}_C\left[\frac{\delta^n}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}\right]\Phi(f)\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n\nu})$$

を，次の漸化式によって定義する：

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_C&\left[\frac{\delta^n}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}\right]\Phi(f)\\&=\frac{\delta}{\delta f(x_1)}\mathrm{R}_C\left[\frac{\delta^{n-1}}{\delta f(x_2)\cdots\delta f(x_n)}\right]\Phi(f)\\&\quad-\sum_{k=2}^{n}C(x_1,x_k)\mathrm{R}_C\left[\frac{\delta^{n-2}}{\delta f(x_2)\cdots\widehat{\delta f(x_k)}\cdots\delta f(x_n)}\right]\Phi(f),\qquad(9.13.7)\\\mathrm{R}_C&\left[\frac{\delta}{\delta f(x_1)}\right]\Phi(f)=\frac{\delta\Phi(f)}{\delta f(x_1)}.\end{aligned}$$

ここに，$\widehat{\ }$ はその因子を除くことを意味する．たとえば，

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_C&\left[\frac{\delta^3}{\delta f(x)\delta f(y)\delta f(z)}\right]\Phi(f)\\&=\frac{\delta^3\Phi(f)}{\delta f(x)\delta f(y)\delta f(z)}-C(x,y)\frac{\delta\Phi(f)}{\delta f(z)}\\&\quad-C(y,z)\frac{\delta\Phi(f)}{\delta f(x)}-C(z,x)\frac{\delta\Phi(f)}{\delta f(y)}.\end{aligned}$$

$C\equiv 0$ ならば，再順序化された n 階の導汎関数はもとのものに等しい．

$\rho\in\mathsf{K}(\mathbf{R}^\nu)$，$\rho_\varepsilon$ は (9.1.15) であたえられるとする．このとき，**C について，再規格化された，同一空間点での n 階の導汎関数**を

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_C\left[\frac{\delta^n}{\delta f(x)^n}\right]\Phi(f)\equiv\lim_{\varepsilon\to\infty}\int dx_1\cdots dx_n\mathrm{R}_C&\left[\frac{\delta^n}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}\right]\Phi(f)\\&\times\rho_\varepsilon(x-x_1)\cdots\rho_\varepsilon(x-x_n),\qquad(9.13.8)\end{aligned}$$

によって定義する．ただし，右辺が $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^\nu)$ の収束の意味で ρ の選び方によらず存在するときに限る．したがって，$\mathrm{R}_C[\delta^n/\delta f(x)^n]\Phi(f)$ は，一般には，各点 x で意味をもたず，$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^\nu)$ の元として意味をもつ．これで，問題の Schwinger-Dyson 方程式を定義する準備ができた．

多項式 P，パラメーター $m\geqslant 0$，対称な超関数 $C\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2\nu})$ があたえられ

たとき，汎関数微分方程式

$$\left.\begin{aligned}(-\Delta+m^2)(-i)\frac{\delta\Phi(f)}{\delta f(x)} &= if(x)\Phi(f)-\mathrm{R}_C\left[P'\left(-i\frac{\delta}{\delta f(x)}\right)\right]\Phi(f)\\ \Phi(0) &= 1\end{aligned}\right\}\qquad \text{(SD)}$$

を，**P, m, C から定まる Schwinger-Dyson 方程式**という*)．ここで，Δ は，$\mathbf{R}^\nu$ 上のラプラシアン，P' は P の多項式としての導関数を表わす．

この方程式を用いると，次の定理の意味で $(\phi^{2N})_2$ モデルを特徴づけることができる．

定理 9.13.1　$(\phi^{2N})_2$ モデルの母汎関数 $Z(f)$ は $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ 上の汎関数として，無限回連続汎関数微分可能であり，C を $(-\Delta+m^2)^{-1}$ の積分核とし，$P(X)=X^{2N}$ として，方程式 (SD) をみたす．さらに，Schwinger 関数は

$$S_n(x_1,\cdots,x_n) = (-i)^n\frac{\delta^n Z(f)}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)}\bigg|_{f=0} \tag{9.13.9}$$

としてあたえられる．

注意　上の定理は，P が

$$P(X) = \sum_{k=1}^{N} a_k X^{2k}+hX, \qquad a_N>0,\ \ h, a_1, \cdots, a_{N-1}\in\mathbf{R},$$

の形であたえられる $P(\phi)_\nu$ モデル $(\nu=1,2)$ に対しても成立する．ただし，C は上の定理のものと同じとする．

定理 9.13.1 を証明するには，さらにいくつかの補題が必要である．

μ を定理 9.10.6 であたえられる，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^2)$ 上の確率測度とする．

補題 9.13.2　任意の $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ と $n=1,\cdots,2N$ に対して，$:\phi_\kappa^n(f):$，$:\phi^n(f):\in \mathrm{L}^2(\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^2), d\mu)$ であり，

$$\lim_{\kappa\to\infty}\int d\mu |:\phi_\kappa^n(f):-:\phi^n(f):|^2 = 0, \tag{9.13.10}$$

*)　方程式 (SD) は，P, m, C があたえられれば，その解の有無にかかわらず，定まることに注意．

$$\int d\mu|:\phi^n(f):|\leqslant c|||f|||, \tag{9.13.11}$$

がなりたつ．ここで，$c>0$ はある定数，$|||f|||$ は $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ のあるセミノルムである．

補題 9.13.3 F を $\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^2)$ 上の関数で，$\exp\phi(f)$, $\phi(f), f\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ から代数的に生成される集合に属するものとする．このとき，すべての $g\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ に対して，

$$\begin{aligned}&\int d\mu(\phi)\phi([-\Delta+m^2]g)F(\phi)\\&=\int d\mu\left\{\left\langle\frac{\delta F}{\delta\phi}, g\right\rangle-2N:\phi^{2N-1}(g):F(\phi)\right\},\end{aligned} \tag{9.13.12}$$

がなりたつ．ここで，$\delta F(\phi)/\delta\phi(x)$ は

$$\frac{\delta F(\phi)}{\delta\phi(x)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{F(\phi+\varepsilon\delta_x)-F(\phi)}{\varepsilon},\qquad x\in\mathbf{R}^2,$$

によって定義される*)．ただし，$\delta_x\in\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^2)$ は

$$\delta_x(y)=\delta(x-y)$$

であたえられる．

補題 9.13.3 は，測度 μ に対する部分積分公式である．上のふたつの補題を証明するには $\exp:\phi^n(f):$, $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, の有界領域 Λ における測度 $d\mu_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}$ に関する評価を Λ について一様に行なえばよい．詳細については，Glimm and Jaffe (1981) の 12 章を参照せよ．

定理 9.13.1 の証明 $f, g\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^2)$ とし，$F(\phi)=\exp[i\phi(f)]$ とすれば，(9.13.12) により

$$\begin{aligned}&\int d\mu\phi([-\Delta+m^2]g)e^{i\phi(f)}\\&=i\langle f, g\rangle Z(f)-2N\int d\mu:\phi^{2N-1}(g):e^{i\phi(f)}.\end{aligned} \tag{9.13.13}$$

*) ここで考えている F に対しては，各 $x\in\mathbf{R}^2$ ごとに，$\delta F(\phi)/\delta\phi(x)$ は存在する．

一方，Schwinger 関数に対する評価と Lebesgue の収束定理により，Z は無限回連続汎関数微分可能であり，超関数の意味で，

$$(-i)^n \frac{\delta^n Z(f)}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_n)} = \int d\mu\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)e^{i\phi(f)}$$

となることがわかる．特に，$n=1$ の場合を考えると

$$\int d\mu\phi([-\Delta+m^2]g)e^{i\phi(f)} = -i\left\langle\frac{\delta Z(f)}{\delta f}, [-\Delta+m^2]g\right\rangle. \qquad (9.13.14)$$

さらに，(9.13.10) および Wick 積に対する漸化式を用いると

$$\begin{aligned}
&\int d\mu : \phi^{2N-1}(g) : e^{i\phi(f)} \\
&= \lim_{\kappa\to\infty}\int d\mu : \phi_\kappa{}^{2N-1}(g) : e^{i\phi(f)} \\
&= \lim_{\kappa\to\infty}\int dx\, g(x)\int d\mu : \phi(\rho_\kappa(x-\cdot))^{2N-1} : e^{i\phi(f)} \\
&= \lim_{\kappa\to\infty}\int dx\, g(x)\int dx_1\cdots dx_n \mathrm{R}_C\left[(-i)^{2N-1}\frac{\delta^{2N-1}}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_{2N-1})}\right]Z(f) \\
&\qquad\qquad \times\rho_\kappa(x-x_1)\cdots\rho_\kappa(x-x_{2N-1}) \\
&= \int dx g(x)\mathrm{R}_C\left[(-i)^{2N-1}\frac{\delta^{2N-1}}{\delta f(x)^{2N-1}}\right]Z(f)
\end{aligned} \qquad (9.13.15)$$

(9.13.13), (9.13.14), (9.13.15) によって，

$$\begin{aligned}
&\left\langle(-i)\frac{\delta Z(f)}{\delta f}, (-\Delta+m^2)g\right\rangle \\
&\qquad = \langle if, g\rangle Z(f) - \left\langle 2N\mathrm{R}_C\left[(-i)^{2N-1}\frac{\delta^{2N-1}}{\delta f^{2N-1}}\right]Z(f), g\right\rangle
\end{aligned}$$

を得る．これは，$P(X)=X^{2N}$ とし，$(-\Delta+m^2)^{-1}$ の積分核を C とした Schwinger-Dyson 方程式にほかならない．∎

こうして，定理 9.13.1 およびそれに続く注意により，$P(\phi)_\nu$ モデルを Schwinger-Dyson 方程式 (SD) の解としてとらえることが可能であることがわかった．この観点からは，本章でしてきたことを，主として方程式 (SD) のひとつの解の構成であったとみることもできるわけである．方程式 (SD) の解

の一意性や解の別の構成法についてはまだよくわかっていない．ただし次の定理が成立する：

定理 9.13.4 $P(X)=\lambda X^2/2+\rho X$, $\lambda\geqslant 0$, $\rho\in\mathbf{R}$, $C(x,y)$ を $(-\Delta+m^2)^{-1}$ の積分核とする．このとき，Schwinger-Dyson 方程式 (SD) はただひとつの解をもち，それは，すべての $f\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ に対して，

$$\Phi(f)=e^{-\frac{1}{2}\langle f,(-\Delta+m^2+\lambda)^{-1}f\rangle-i\rho\langle 1,(-\Delta+m^2+\lambda)^{-1}f\rangle} \tag{9.13.16}$$

であたえられる（$\nu\geqslant 1$ は任意でよい）．

証明 Φ を方程式 (SD) の任意の解とし，$f\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ を固定し，関数 $F(t)$, $t\in\mathbf{R}$, を

$$F(t)=\Phi(tf)$$

によって定義する．このとき，Φ の汎関数微分可能性は $F(t)$ の t についての微分可能性を意味し，

$$\frac{d}{dt}F(t)=\left\langle\frac{\delta\Phi(tf)}{\delta f},f\right\rangle$$

がなりたつ．そこで，方程式 (SD) を使って右辺を変形すれば，

$$\frac{d}{dt}F(t)=(-ct-i\rho d)F(t),\qquad F(0)=1, \tag{9.13.17}$$

となる．ただし，

$$c=\langle f,(-\Delta+m^2+\lambda)^{-1}f\rangle,\qquad d=\langle 1,(-\Delta+m^2+\lambda)^{-1}f\rangle.$$

方程式 (9.13.17) は，$\mathbf{R}$ 上にただひとつの解をもち，それは

$$F(t)=e^{-ct^2/2-i\rho dt}$$

であたえられる．したがって，特に $t=1$ とすれば，方程式 (SD) の任意の解 Φ は，存在するとすれば，必ず

$$\Phi(f)=e^{-c/2-i\rho d}$$

の形である．これは，(9.13.16) にほかならない．しかも，これが，実際に，方程式 (SD) をみたすことは容易に確かめられる．■

容易に見られるように，汎関数 (9.13.16) は，分散が $(-\Delta+m^2+\lambda)^{-1}$，平均が $-\rho/(m^2+\lambda)$ であるような，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ 上の Gauss 型確率測度の特性汎関

数である*). また，上の証明からもわかるように，$P(X)$ が2次以下の場合は，Schwinger-Dyson 方程式を用いて解くほうが，本章であたえた方法で解くよりも簡単である（問題9.3と比較せよ).

$P(\phi)_\nu$ モデルは，スカラー場の量子論であるため，その Schwinger-Dyson 方程式には，一種類の導汎関数だけが現われた．いろいろな種類の場が相互作用している理論では，その理論を特徴づける Schwinger-Dyson 方程式は，その場の種類に応じた導汎関数（"偏導汎関数"）からなる，いわば"汎関数偏微分方程式"となる**). 非相対論的場の量子論のモデルでは，一階の偏導汎関数からなる Schwinger-Dyson 方程式で，物理的にも数学的にもトリヴィアルではないものがあり***)，そうした方程式のいくつかは Inoue (1981, 1985) によって解かれた．また，それに関する一意性の問題は，定理 9.13.4 の証明と同様の考え方で，Arai (1985) によって解決された．

最後に，DLR 型の方程式 [Guerra 他 (1975)，Fröhlich (1974, 1977)，Fröhlich and Simon (1977)] と Schwinger-Dyson 方程式との関係について述べておこう．DLR 型の方程式についてのある種の条件のもとで，その方程式をみたす，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ 上の確率測度の特性汎関数は，Schwinger-Dyson 方程式をみたすことが証明される．この意味で，DLR 型方程式から Schwinger-Dyson 方程式を導くことができるのである（証明は，定理9.13.1の証明とほとんど同様である).

●演習問題

9.1　$\phi_{\mathrm{F},\kappa}{}^2(g)$ は，$\kappa\to\infty$ のとき，測度 $d\mu_{0,\mathrm{F}}$ に関してほとんどいたるところ発散していることを証明せよ．

9.2　F を $\mathbf{R}^n$ 上の多項式的に有界な関数とするとき，すべての $f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{R}^2}\langle F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\rangle_\Lambda{}^{\mathrm{HD}}=\langle F(\phi(f_1),\cdots,\phi(f_n))\rangle$$

がなりたつことを証明せよ．

*)　Minlos の定理を使って確かめよ．

**)　未知汎関数が"多変数汎関数"になる．

***)　ある種の"くりこみ"を必要とするもの．

9.3 相互作用が高々 2 次のモデルを考える．簡単のため，時空の次元は 2 とする．したがって，Schwinger 関数に対する母汎関数は

$$Z_g(f)=\frac{\int d\mu_{0,\mathrm{E}}e^{i\phi(f)-\lambda:\phi^2(g):/2-\rho\phi(g)}}{\int d\mu_{0,\mathrm{E}}e^{-\lambda:\phi^2(g):/2-\rho\phi(g)}},\quad f\in\mathcal{S}_r(\mathbf{R}^2),$$

で定義される．ただし，$\lambda\geqslant 0, g\geqslant 0, g\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^2), \rho\in\mathbf{R}$ とする．このとき，

（i）

$$Z_g(f)=e^{-\frac{1}{2}\langle(-\Delta+m^2+\lambda g)^{-1}f,\,f+2i\rho g\rangle}$$

となることを示せ．ここで，$(-\Delta+m^2+\lambda g)^{-1}$ は自己共役演算子 $-\Delta+m^2+\lambda g$ の逆演算子である（実際にそれが存在することも確かめよ）．

（ii） 無限体積極限（$g\to 1$）は

$$Z(f)\equiv e^{-\frac{1}{2}\langle(-\Delta+m^2+\lambda)^{-1}f,\,f+2i\rho\rangle}$$

となることを示せ．したがって，無限体積極限は，一般化された自由場となる（一般の時空次元に対しても，もう少し技術的な考察を必要とするが，同様の結果を得ることができる）．

●文献

Arai, A. (1983a), On the existence of solution to Schwinger's functional differential equations of higher order, Proc. Japan. Acad. Ser. A. **59,** 227–230.

Arai, A. (1985), On uniqueness theorem concerning renormalized Schwinger-Dyson equations of first order, Kodai Math. Journ. **9,** 161–164.

ボゴリューボフ，N. N., A. A. ログノフ，I. T. トドロフ (1972，新版 1980)，『場の量子論の数学的方法』，江沢他訳，東京図書．

DeWitt, C. and R. Stora ed. (1971), *Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, Gordon and Breach, New York.

Dimock, J. (1974), Asymptotic perturbation expansion in the $P(\phi)_2$ quantum field theory, Commun. Math. Phys. **35,** 347–356.

Dimock, J. (1976), The $P(\phi)_2$ Green's functions: Asymptotic perturbation expansion, Helv. Phys. Acta **49,** 199–216.

Dimock, J. and J.-P. Eckmann (1977), Spectral properties and bound-state scattering for weakly coupled $P(\phi)_2$ models, Ann. Phys. **103,** 289–314.

Eckmann, J.-P., H. Epstein and J. Fröhlich (1976). Asymptotic perturbation

expansion for the S-matrix and the definition of time ordered functions in relativistic quantum field models, Ann. Inst. Henri Poincaré **25,** 1–34.

Ezawa, H. (1963), A note on the van Hove-Miyatake catastrophe, Prog. Theor. Phys. **30,** 545–549.

Fröhlich, J. (1974), Schwinger functions and their generating functionals, I. Helv. Phys. Acta **47,** 265–306.

Fröhlich, J. (1977), Schwinger functions and their generating functionals, II. Markovian and generalized path space measures on L^1, Adv. Math. **23,** 119–180.

Fröhlich J. and B. Simon (1977), Pure states for general $P(\phi)_2$ theories: Construction, regularity and variational equality, Ann. Math. **105,** 493–526.

Gel'fand, J. M. and N. Ya. Vilenkin (1964), *Generalized Functions IV: Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, New York.

Glimm, J. and A. Jaffe (1971), Quantum field theory models, *in* DeWitt and Stora (1971).

Glimm, J., A. Jaffe and T. Spencer (1974), The Wightman axioms and particle structure in the $P(\phi)_2$ quantum field model, Ann. Math. **100,** 585–632.

Glimm, J. and A. Jaffe (1981, 1987), *Quantum Physics*, Springer, New York.

Guerra, F. (1972), Uniqueness of vacuum energy density and Van Hove Phenomeпa in the infinite volume limit for two dimensional self-coupled bose fields, Phys. Rev. Lett. **28,** 1213–1215.

Guerra, F., L. Rosen and B. Simon (1975), The $P(\phi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics, Ann. Math. **101,** 111–259.

Guerra, F., L. Rosen and B. Simon (1976), Boundary conditions in the $P(\phi)_2$ Euclidean field theory, Ann. Inst. Henri Poincaré **15,** 231–334.

Inoue, A. (1981), An explicit solution of a certain Schwinger-Dyson equation, Proc. Japan Acad. Ser. A. **57,** 477–480.

Inoue, A. (1986), Some examples exhibiting the procedures of renormalization and gauge fixing——Schwinger-Dyson equations of first order, Kodai Math. Journ. **9,** 134–160.

Jaffe, A. (1965), Divergence of perturbation theory for Bosons, Commun. Math. Phys. **1,** 127–149.

Kato, Y. (1961), Some converging examples of the perturbation series in the

quantum field theory, Prog. Theor. Phys. **26**, 99–122.

Miyatake, O. (1952), J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. **2A,** 89; **3A,** 145.

中西 襄 (1975), 『場の量子論』, 培風館.

Nash, C. (1978), *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press, London.

Nelson, E. (1973), Quantum fields and Markoff fields, *in* Spencer (1973), pp. 413 –420.

Osterwalder, K. and R. Sénéor (1976), The scattering matrix is non-trivial for weakly coupled $P(\phi)_2$ models, Helv. Phys. Acta **49,** 525–535.

Reed, M. and B. Simon (1975), *Methods of Modern Mathematical Physics, II, Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York.

Schrader, R. (1974), Local operator products and field equations in $P(\phi)_2$ theories, Fortschr. Phys. **22,** 611–631.

Schwinger, J. (1951), On the Green's functions of quantized fields, I, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **37,** 452–459.

Schwinger, J. (1970, 1973), *Particles, Souces and Fields, I, II*, Addison-Wesley, Massachusetts.

Simon, B. (1974), *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, Princeton.

Spencer, D. ed. (1973), *Partial Differential Equations*, Symp. in Pure Math. XXIII, A. M. S. Publications.

Spencer, T. and F. Zirill (1976), Scattering states and bound states in $P(\phi)_2$, Commun. Math. Phys. **49,** 1–16.

van Hove, L. (1952), Les difficultés des divergences pour un modeléle particulier de champ quantifié, Physica **18,** 145–159.

第10章

ランダム ウォーク表示とその応用

格子スピン系の強磁性的モデルを格子上のランダム ウォーク (random walk) を用いて表示し，その表示を場の量子論および統計力学の問題に応用する [Brydges et al. (1982, 1983)].

10.1 格子スピン系のランダム ウォーク表示

この節の目的は，格子スピン系の強磁性的モデルの相関関数——場の理論に即していえば，Schwinger 関数——に対して，格子空間上のランダム ウォーク表示を導くことである.

定義 10.1.1 (1) $\mathbf{L}$ を有限集合とする. $i, j \in \mathbf{L}$ $(i \neq j)$ に対して，順序対 (i, j) を $\mathbf{L}$ のステップ (step) とよび，記号 s で表わす. $\mathbf{L}$ のステップの順序づけられた集合で

$$\omega = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots, (i_{N-1}, i_N) \mid i_1, \cdots, i_N \in \mathbf{L}\} \tag{10.1.1}$$

という形のものを i_1 を始点，i_N を終点とする，$\mathbf{L}$ 上のウォーク (walk) とよび，記号 $\omega : i_1 \longrightarrow i_N$ で表わす.

(2) $k \in \mathbf{L}$ と $\mathbf{L}$ 上のウォーク ω に対して，ω が k に‘ぶつかる’回数を $\eta(k, \omega)$ で表わす. すなわち，ω が (10.1.1) であたえられるとき，$\eta(k, \omega)$ は $i_1, \cdots, i_N$ のうちで k に等しいものの個数である.

(3) $\mathbf{L}$ 上のウォーク ω の‘長さ’$|\omega|$ を

$$|\omega| = \sum_{k \in \mathbf{L}} \eta(k, \omega) - 1 \tag{10.1.2}$$

によって定義する. したがって，ω が (10.1.1) であたえられるときには，

$|\omega| = N-1$ である．明らかに，$|\omega| \geqq 1$ である．便宜上，$\mathbf{L}$ の一点からなる集合 $\omega = \{i\}$ もウォークとみなし，この場合 $\eta(k, \omega) = \delta_{ki}$ とするから $|\omega| = 0$ である．そして，ウォークを変数とする関数 $f(\omega)$ があたえられたとき，そのようなウォークに対しては，$f(\omega) = 1$ と規約する．以下で，$|\omega| = 0$ でも，$\omega : i \longrightarrow j$ と書く場合があるが，このときは，$\omega = \{i\}$ で，$i = j$ のところしか考えないものと約束する．

実際の応用では，$\mathbf{L}$ は，主に，格子間隔 a の ν 次元格子空間 $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の有界部分集合（または，その極限としての $\mathbf{Z}_a{}^\nu$）である．

さて，行列 J, Λ を，行列要素が $\mathbf{L}$ の点の組によって次のように指定されるものとして定義する：

$$J_{ij} = J_{ji} \begin{cases} \geqq 0 & i \neq j \text{ のとき} \\ = 0 & i = j \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.1.3}$$

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ のとき} \\ \lambda_i \ (\neq 0) & i = j \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.1.4}$$

このとき：

命題 10.1.2

$$(\Lambda - J)^{-1}{}_{ij} = \sum_{\omega : i \to j} J_\omega \prod_{k \in \mathbf{L}} \lambda_k{}^{-\eta(k, \omega)} \tag{10.1.5}$$

ここで，

$$J_\omega = \prod_{s \in \omega} J_s. \tag{10.1.6}$$

(10.1.5) の左辺は，$(\Lambda - J)^{-1}$ の (i, j) 成分であり，等式の意味は，右辺が絶対収束するならば，$(\Lambda - J)^{-1}$ が存在して，その (i, j) 成分が右辺であたえられるということである．

証明　$(\Lambda - J)^{-1}$ が存在するとして，形式的にこれを Neumann 級数に展開しよう：

$$(\Lambda - J)^{-1} = \sum_{N=0}^{\infty} \Lambda^{-1} (J\Lambda^{-1})^N. \tag{10.1.7}$$

($\|J\Lambda^{-1}\| < 1$ ならば，上式は確かに成立する)．この右辺の行列成分の書きなおしが，(10.1.5) の右辺にほかならないことを示そう．$N \geqq 1$ のとき，

$$[\Lambda^{-1} \overbrace{(J\Lambda^{-1}) \cdots (J\Lambda^{-1})}^{N\text{個}}]_{ij} = \sum_{k_1, \cdots, k_{N-1}} \lambda_i{}^{-1} J_{ik_1} \lambda_{k_1}{}^{-1} \cdots J_{k_{N-1}j} \lambda_j{}^{-1}$$

$$= \sum_{k_1,\cdots,k_{N-1}} (\lambda_i\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_{N-1}}\lambda_j)^{-1} J_{ik_1}J_{k_1k_2}\cdots\cdots J_{k_{N-1}j}$$
$$= \sum_{\substack{\omega:i\to j\\|\omega|=N}} J_\omega \prod_{k\in\mathbf{L}} \lambda_k{}^{-\eta(k,\omega)}.$$

$N=0$ のときは

$$\Lambda^{-1}{}_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i{}^{-1} = \sum_{\substack{\omega:i\to j\\|\omega|=0}} J_\omega \prod_{k\in\mathbf{L}} \lambda_k{}^{-\eta(k,\omega)}.$$

ここで，最右辺の形をつくるために，定義 10.1.1 (3) の規約を使った．したがって，(10.1.5) の右辺が絶対収束すれば，(10.1.7) の右辺の (i,j) 成分も絶対収束し，それらは等しい．一方，(10.1.7) の右辺の任意の (i,j) 成分が絶対収束すれば，$(\Lambda-J)^{-1}$ は存在して，(10.1.7) がなりたつ．よって (10.1.5) を得る．∎

注意　容易にわかるように，(10.1.5) の右辺が絶対収束するための十分条件は，ある定数 $\rho>1$ が存在して，任意の $i\in\mathbf{L}$ に対して

$$|\lambda_i| \geqslant \rho \sum_{j\in\mathbf{L}} J_{ij} \tag{10.1.8}$$

となることである (問題 10.1).

等式 (10.1.5) は，ウォーク ω に統計的重み $J_\omega \prod_{k\in\mathbf{L}} \lambda_k{}^{-\eta(k,\omega)}$ を付与して，i を始点，j を終点とするウォークの空間上の統計的平均として $(\Lambda-J)^{-1}{}_{ij}$ を表わしたものと見ることができる．そこで，この種の表示を**ランダムウォーク表示** (random walk representation) とよぶ．

例　格子空間 $\mathbf{Z}^\nu$ 上のラプラシアンを Δ とすればその行列成分は

$$\Delta_{ij} = -2\nu\delta_{ij} + \sum_{|k-i|=1} \delta_{kj}, \qquad i,j\in\mathbf{Z}^\nu$$

であたえられる (付録2参照)．そこで，$m>0$ をパラメーターとして

$$\Lambda_{ij} = (2\nu+m^2)\delta_{ij}, \qquad J_{ij} = \sum_{|k-i|=1} \delta_{kj}$$

とおき，命題 10.1.2 を適用すれば——この場合 $\mathbf{L}=\mathbf{Z}^\nu$ で $\mathbf{L}$ は有限ではないが，その証明は容易に拡張される——，$-\Delta+m^2$ の Green 関数 (基本解)

に対して

$$(-\Delta+m^2)^{-1}{}_{ij}=\sum_{\substack{\omega:i\to j\\(\text{最近接})}}(2\nu+m^2)^{-|\omega|-1} \tag{10.1.9}$$

というランダムウォーク表示を得る．ただし，右辺の和における ω は**最近接ウォーク**，すなわち，それを構成する任意のステップ (k,n) が $|n-k|=1$ をみたすようなウォークであるとする（問題 10.3）．

次に $(\Lambda-J)^{-1}$ の行列式 $\det(\Lambda-J)^{-1}$ のランダムウォーク表示をつくろう．

定義 10.1.3 $\mathbf{L}$ 上のウォークで，その始点と終点とが同じものを**ループ** (loop) とよび，一般的に記号 $\underset{\sim}{\omega}$ で表わす．ただし，同一に見えるループでも始点を異にするものは別ものとみなす．

命題 10.1.4 (10.1.8) をみたす Λ, J に対して

$$\det(\Lambda-J)^{-1}=\Big(\prod_{k\in\mathbf{L}}\lambda_k\Big)^{-1}\exp\Big[\sum_{\underset{\sim}{\omega}}\hat{J}_{\underset{\sim}{\omega}}\prod_{k\in\mathbf{L}}\lambda_k{}^{-\eta(k,\underset{\sim}{\omega})}\Big] \tag{10.1.10}$$

ここで，

$$\hat{J}_{\underset{\sim}{\omega}}=\frac{J_{\underset{\sim}{\omega}}}{|\underset{\sim}{\omega}|}, \tag{10.1.11}$$

$\sum_{\underset{\sim}{\omega}}$ はすべてのループにわたる和を表わし，絶対収束する．

証明 有限次元の任意の行列 A に対して，公式

$$\det e^A=e^{\mathrm{tr}\,A}$$

がなりたつ．ここで $\mathrm{tr}\,A$ は A のトレース (trace) を表わす．Λ, J が (10.1.8) をみたすならば，

$$\ln(1-\Lambda^{-1}J)\equiv-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\Lambda^{-1}J)^l}{l}$$

が定義されるから，$A=-\ln(1-\Lambda^{-1}J)$ として上の公式を使えば

$$\begin{aligned}\det(\Lambda-J)^{-1}&=\det\Lambda^{-1}\det(1-\Lambda^{-1}J)^{-1}\\&=\det\Lambda^{-1}e^{-\mathrm{tr}\ln(1-\Lambda^{-1}J)}\end{aligned}$$

を得る．ところが，命題 10.1.2 の証明と同様にして

$$\mathrm{tr}\ln(1-\Lambda^{-1}J)=-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\mathrm{tr}(\Lambda^{-1}J)^l$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\sum_{i\in\mathbf{L}}\sum_{\substack{\omega : i\to i \\ |\omega|=l}} J_{\omega}\prod_{k\in\mathbf{L}}\lambda_k^{-\eta(k,\omega)}.$$

したがって

$$\operatorname{tr}\ln(1-\Lambda^{-1}J) = -\sum_{\omega}\hat{J}_{\omega}\prod_{k\in\mathbf{L}}\lambda_k^{-\eta(k,\omega)}.$$

ここで $\det\Lambda^{-1} = \prod_{k\in\mathbf{L}}\lambda_k^{-1}$ であるから，(10.1.10) を得る．∎

さて，$N\geqslant 1$ を自然数とし，各 $i\in\mathbf{L}$ に対してベクトル $\boldsymbol{S}_i\in\mathbf{R}^N$ があたえられているとしよう．$\boldsymbol{S}_i$ を $\mathbf{L}$ の点 i における‘スピン’とよび，このスピン系の相互作用ハミルトニアンを

$$H\equiv H(\boldsymbol{S})\equiv -\frac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathbf{L}}J_{ij}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j \tag{10.1.12}$$

によって定義する．点 i におけるスピンの分布関数を g_i とし，g_i は次のふたつの条件をみたすとする：

（i）　$g_i\in C^1([0,\infty)),\quad g_i\geqslant 0,\quad i\in\mathbf{L}.$

（ii）　すべての $i\in\mathbf{L}$ と すべての $c>0$ に対して

$$g_i(t)e^{ct}\to 0\qquad (t\to\infty). \tag{10.1.13}$$

スピンの関数 F に対して，規格化されていない期待値 $[F]$ を

$$[F] = \int_{(\mathbf{R}^N)^{|\mathbf{L}|}} F(\boldsymbol{S})e^{-H(\boldsymbol{S})}\prod_{i\in\mathbf{L}}g_i(\boldsymbol{S}_i^2)d\boldsymbol{S}_i \tag{10.1.14}$$

によって定義する．規格化された期待値 $\langle F\rangle$ は

$$\langle F\rangle = \frac{[F]}{Z} \tag{10.1.15}$$

によってあたえられる．ただし，Z は‘分配関数’で

$$Z\equiv[1]. \tag{10.1.16}$$

条件 (10.1.13) によって，任意の $c>0$ に対して，$t_0>0$ が存在して，$t\geqslant t_0$ ならば

$$g_i(t)e^{ct} < e^{-t}$$

がなりたつ．したがって，特に，$g_i(t)e^{ct}$ はすべての $c\in\mathbf{R}$ に対して Lebesgue 測度について可積分関数となる．ここで，$t<0$ では $g_i\equiv 0$ とし

て g_i を $\mathbf{R}$ 上の関数に拡張しておこう．すると g_i の逆 Fourier 変換*) $\tilde{g}_i$ は，全複素平面 $\mathbf{C}$ 上に解析接続 $\tilde{g}_i(z)$ $(z \in \mathbf{C})$ をもつ．これらのことから

$$g_i(t) = \int_{\Gamma_\lambda} \tilde{g}_i(z) e^{-izt} dz \tag{10.1.17}$$

と書ける．ただし，積分路 Γ_λ $(\lambda > 0)$ は

$$\Gamma_\lambda = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\, z = -\lambda\}$$

であたえられる．

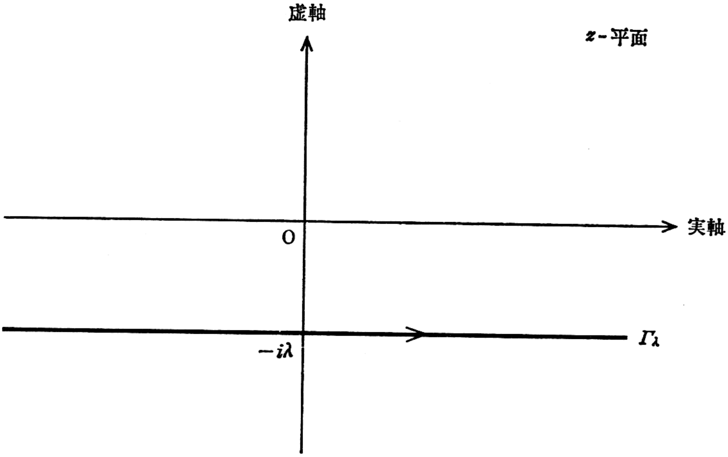


図 10.1

g_i の表示 (10.1.17) を使って，まず Z を変形しよう．(10.1.17) を $F \equiv 1$ とした (10.1.14) に代入すれば，

$$Z = \int_{\Gamma_\lambda^{|\mathbf{L}|}} \left\{ \int \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k,j \in \mathbf{L}} M_{kj} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \right] \prod_{k \in \mathbf{L}} d\boldsymbol{S}_k \right\} \prod_{j \in \mathbf{L}} \tilde{g}_j(a_j) da_j \tag{10.1.18}$$

となる．ただし，行列 $M = (M_{jk})$ は，$a \equiv (a_k \delta_{kj})$ を用いて，

*) ここでは，便宜上

$$\tilde{g}_k(p) \equiv \frac{1}{2\pi} \int g_k(t) e^{itp} dt$$

として，通常の逆 Fourier 変換と $\sqrt{2\pi}$ だけ規格化を変えておく．

$$M = 2ia - J \tag{10.1.19}$$

によってあたえられる．なお，$\prod dS_k$ と $\prod da_j$ についての積分の順序交換は，$\lambda > 0$ であるので正当化される．

(10.1.18) に現われる S_k についての積分を評価するために，以下，$\lambda > 0$ を十分大きくとり，定数 $\rho > 1$ が存在してすべての $k \in \mathbf{L}$ に対して

$$\lambda \geqslant \rho \sum_{j \in \mathbf{L}} J_{jk} \tag{10.1.20}$$

となるようにしておく．このとき，解析接続の方法を使って

$$\int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbf{L}} M_{kj} S_k \cdot S_j\right] \prod_{k\in\mathbf{L}} dS_k$$
$$= (\det M)^{-N/2} (2\pi)^{|\mathbf{L}|N/2} \tag{10.1.21}$$

を証明することができる．ここに N 乗がでるのは，S が N 成分をもつためである．したがって

$$Z = (2\pi)^{|\mathbf{L}|N/2} \int (\det M)^{-N/2} \prod_{j\in\mathbf{L}} \tilde{g}_j(a_j) da_j \tag{10.1.22}$$

そこで，命題 10.1.4 を，$\Lambda = 2ia$ として適用すれば

$$Z = (2\pi)^{|\mathbf{L}|N/2} \int \exp\left[\frac{N}{2}\sum_{\underset{\sim}{\omega}} \hat{J}_{\underset{\sim}{\omega}} \prod_{k\in\mathbf{L}} (2ia_k)^{-\eta(k,\underset{\sim}{\omega})}\right] \prod_{j\in\mathbf{L}} (2ia_j)^{-N/2} \tilde{g}_j(a_j) da_j \tag{10.1.23}$$

を得る．上式の中にある指数関数を巾級数展開し，その級数が a_j ($j \in \mathbf{L}$) に関し絶対一様に収束することを用いると，項別積分ができて，

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\underset{\sim}{\omega}_1,\cdots,\underset{\sim}{\omega}_n} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{N}{2} \hat{J}_{\underset{\sim}{\omega}_j}\right) e^{-V_n(\underset{\sim}{\omega}_1,\cdots,\underset{\sim}{\omega}_n)} \tag{10.1.24}$$

となる．ただし，$\exp[-V_n(\omega_1, \cdots, \omega_n)]$ は，一般に n 個のウォークの関数で，

$$e^{-V_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)} \equiv \prod_{j\in\mathbf{L}} \int_{\Gamma_\lambda} (2\pi)^{N/2} \tilde{g}_j(a_j) (2ia_j)^{-\eta(j;\,\omega_1,\cdots,\omega_n)} da_j \tag{10.1.25}$$

$$\eta(j\,;\omega_1, \cdots, \omega_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} \eta(j, \omega_k) + \frac{N}{2} \tag{10.1.26}$$

で定義される．この定義が意味をもつことは，すべての n とすべてのウォー

ク $\omega_1, \cdots, \omega_n$ に対して

$$e^{-V_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)} > 0 \tag{10.1.27}$$

がなりたつことによる．したがって，V_n は実数値関数となる．(10.1.27) を示すには，恒等式

$$\frac{2^n}{(2n)!!}\int_0^\infty t^n e^{-zt}dt = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\cdot\dfrac{1}{z^{n+1}}\ ; & n \text{ は任意の半自然数} \\ \dfrac{1}{z^{n+1}} & ; \ n \text{ は任意の自然数} \end{cases}$$

(n が半自然数とは，$n = m - \dfrac{1}{2}$ (m; 自然数) のこと) を用いて

$$\int_{\Gamma_\lambda} \tilde{g}_j(z)(2iz)^{-m}dz = c_m\int_0^\infty t^{m-1}g_j(2t)dt > 0 \tag{10.1.28}$$

を導けばよい．ただし，m は自然数，半自然数いずれでもよく，$c_m > 0$ は定数である．Γ_λ は図 10.1 の積分路で $z = 0$ をはずしてあるので z^{-m} があっても問題にならない．

ここで，スピン系の分配関数のランダムウォーク表示 (10.1.24) に ‘物理的意味’ をつけることができる．$V_n(\underset{\sim}{\omega}_1, \cdots, \underset{\sim}{\omega}_n)$ を n 個のループ $\underset{\sim}{\omega}_1, \cdots, \underset{\sim}{\omega}_n$ の相互作用ハミルトニアン，$N\hat{J}_{\underset{\sim}{\omega}}/2$ を $\underset{\sim}{\omega}$ の単独の相対的確率分布とみなすならば，

$$\sum_{\underset{\sim}{\omega}_1,\cdots,\underset{\sim}{\omega}_n}\left(\prod_{j=1}^n \frac{N}{2}\hat{J}_{\underset{\sim}{\omega}_j}\right)e^{-V_n(\underset{\sim}{\omega}_1,\cdots,\underset{\sim}{\omega}_n)}$$

は，n 個のランダムループの相互作用系の分配関数と考えることができる．したがって，(10.1.24) の表示において，Z は——もともと $\mathbf{L}$ 上の格子スピン系の分配関数であるが——相互作用するランダムループ系の大分配関数 (grand partition function) とみることができる．容易にわかるように，$\underset{\sim}{\omega}_1, \cdots, \underset{\sim}{\omega}_n$ が互いに交わらなければ

$$V_n(\underset{\sim}{\omega}_1, \cdots, \underset{\sim}{\omega}_n) = \sum_{k=1}^n V_1(\underset{\sim}{\omega}_k) + (\text{定数})$$

となり，このとき $\underset{\sim}{\omega}_1, \cdots, \underset{\sim}{\omega}_n$ の間には相互作用はないと解釈される．

次に，相関関数のランダムウォーク表示を求めよう．P を $\mathbf{L}$ 上のスピンの多項式とすれば，Z の場合と同様にして

$$[P]=\int\Big(\prod_{j\in\mathbf{L}}\tilde{g}_j(a_j)da_j\Big)\int P(\underset{\sim}{S})\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbf{L}}M_{kj}\boldsymbol{S}_k\cdot\boldsymbol{S}_j\Big]\prod_{i\in\mathbf{L}}d\boldsymbol{S}_i$$
$$(\underset{\sim}{S}\equiv\{\boldsymbol{S}_i\}_{i\in\mathbf{L}})\qquad(10.1.29)$$

と書ける.

(10.1.29) の $\boldsymbol{S}_i$ についての積分を書きなおすために, $\underset{\sim}{t}=\{\boldsymbol{t}_j\}_{j\in\mathbf{L}}\ (\boldsymbol{t}_j\in\mathbf{R}^N)$ として, 積分

$$I(\underset{\sim}{t})=\int\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbf{L}}M_{kj}\boldsymbol{S}_k\cdot\boldsymbol{S}_j+i\sum_{j\in\mathbf{L}}\boldsymbol{t}_j\cdot\boldsymbol{S}_j\Big]\prod_{j\in\mathbf{L}}d\boldsymbol{S}_j\qquad(10.1.30)$$

を考える. これは, 容易に計算できて

$$I(\underset{\sim}{t})=(2\pi)^{|\mathbf{L}|N/2}(\det M)^{-N/2}\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbf{L}}(M^{-1})_{kj}\boldsymbol{t}_k\cdot\boldsymbol{t}_j\Big]$$
$$(10.1.31)$$

となる (問題 10.5). (10.1.30) と (10.1.31) によって

$$\int P(\underset{\sim}{S})\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbf{L}}M_{kj}\boldsymbol{S}_k\cdot\boldsymbol{S}_j\Big]\prod_{j\in\mathbf{L}}d\boldsymbol{S}_j$$
$$=P\Big(-i\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{t}}\Big)I(\underset{\sim}{t})\Big|_{\underset{\sim}{t}=0}$$
$$=(2\pi)^{|\mathbf{L}|N/2}(\det M)^{-N/2}\Big\{P\Big(-i\frac{\partial}{\partial\underset{\sim}{t}}\Big)\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbf{L}}(M^{-1})_{kj}\boldsymbol{t}_k\cdot\boldsymbol{t}_j\Big]\Big\}_{\underset{\sim}{t}=0}$$
$$=(2\pi)^{|\mathbf{L}|N/2}(\det M)^{-N/2}\Big\{\exp\Big[\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbf{L}}(M^{-1})_{kj}\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial t_k^{(\alpha)}\partial t_j^{(\alpha)}}\Big]\Big\}P(\underset{\sim}{t})\Big|_{\underset{\sim}{t}=0}$$
$$(10.1.32)$$

を得る. ここで (10.1.32) の指数関数的な微分演算子は exp の巾級数展開で定義する (P は多項式だから, これは意味をもつ).

さて, $\boldsymbol{S}_j=(S_j^{(1)},\cdots,S_j^{(N)})$ とし, P として

$$P=S_{i_1}{}^{(\alpha)}\cdots S_{i_{2p}}{}^{(\alpha)}\qquad(\alpha=1,\cdots,N,\ p=1,2,\cdots)$$

を考えよう. このとき

$$\Big\{\exp\Big[\frac{1}{2}\sum_{k,j\in\mathbf{L}}(M^{-1})_{kj}\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial t_k^{(\alpha)}\partial t_j^{(\alpha)}}\Big]\Big\}P(\underset{\sim}{t})\Big|_{\underset{\sim}{t}=0}=\sum_{\text{comb}}(M^{-1})_{j_1k_1}\cdots(M^{-1})_{j_pk_p}$$
$$(10.1.33)$$

となる. ただし, $\sum_{\text{comb}}$ は $(i_1,\cdots,i_{2p})$ から, p 個の対の順序づけられてはいな

い集合 $\{(j_1,k_1),\cdots,(j_p,k_p)\}$ をつくる仕方 $(=(2p)!/p!2^p$ 通り) についての和を表わす. たとえば, $p=2$ のときは, (10.1.33) の右辺は

$$(M^{-1})_{i_1i_2}(M^{-1})_{i_3i_4}+(M^{-1})_{i_1i_3}(M^{-1})_{i_2i_4}+(M^{-1})_{i_1i_4}(M^{-1})_{i_2i_3}$$

である. (10.1.29), (10.1.32), (10.1.33) により

$$\begin{aligned}&[S_{i_1}{}^{(\alpha)}\cdots S_{i_{2p}}{}^{(\alpha)}]\\&=(2\pi)^{|\mathbf{L}|N/2}\sum_{\mathrm{comb}}\int(\prod_{j\in\mathbf{L}}\tilde{g}(a_j)da_j)(\det M)^{-N/2}(M^{-1})_{j_1k_1}\cdots(M^{-1})_{j_pk_p}\end{aligned}$$

を得る. さらに命題 10.1.2 と 10.1.4 を使えば, ランダム ウォーク表示ができる:

$$\begin{aligned}&[S_{i_1}{}^{(\alpha)}\cdots S_{i_{2p}}{}^{(\alpha)}]\\&=(2\pi)^{|\mathbf{L}|N/2}\int(\prod_{j\in\mathbf{L}}\tilde{g}(a_j)(2ia_j)^{-N/2}da_j)\\&\qquad\times\exp\left[\frac{N}{2}\sum_{\underline{\omega}}\hat{J}_{\underline{\omega}}\prod_{k\in\mathbf{L}}(2ia_k)^{-\eta(k,\underline{\omega})}\right]\\&\qquad\times\sum_{\mathrm{comb}}(\sum_{\omega_1:j_1\to k_1}J_{\omega_1}\prod_{k\in\mathbf{L}}(2ia_k)^{-\eta(k,\omega_1)})\\&\qquad\qquad\times\cdots\cdots\\&\qquad\qquad\times(\sum_{\omega_p:j_p\to k_p}J_{\omega_p}\prod_{k\in\mathbf{L}}(2ia_k)^{-\eta(k,\omega_p)})\end{aligned}\tag{10.1.34}$$

$$=\sum_{\mathrm{comb}}\sum_{\omega_1:j_1\to k_1}\cdots\cdots\sum_{\omega_p:j_p\to k_p}Z(\omega_1,\cdots,\omega_p).\tag{10.1.35}$$

ただし,

$$Z(\omega_1,\cdots,\omega_p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\prod_{m=1}^{p}J_{\omega_m}\right)\sum_{\underline{\omega}_1,\cdots,\underline{\omega}_n}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{N}{2}\hat{J}_{\underline{\omega}_k}\right)e^{-V_{n+p}(\underline{\omega}_1,\cdots,\underline{\omega}_n,\omega_1,\cdots,\omega_p)}\tag{10.1.36}$$

ここで, (10.1.34) から (10.1.35) を得るのに, (10.1.34) の中の exp を巾級数に展開した. こうして, 次の定理を得る:

定理 10.1.5 相関関数のランダム ウォーク表示. すべての $\alpha=1,\cdots,N$, $i_1,\cdots,i_{2p}\in\mathbf{L}$ に対して

$$\langle S_{i_1}{}^{(\alpha)}\cdots S_{i_{2p}}{}^{(\alpha)}\rangle=\sum_{\mathrm{comb}}\sum_{\omega_1:j_1\to k_1}\cdots\sum_{\omega_p:j_p\to k_p}\frac{Z(\omega_1,\cdots,\omega_p)}{Z}.\tag{10.1.37}$$

注意　単独のスピン分布 $g_j(S_j^2)$ は $S_j^{(\alpha)}$ について偶関数だから

$$\langle S_{i_1}{}^{(\alpha)} \cdots S_{i_{2p+1}}{}^{(\alpha)} \rangle = 0, \qquad (\alpha = 1, \cdots, N,\ p = 1, 2, \cdots).$$

最後にもうひとつ有用なランダム ウォーク表示を導いておく.

定理 10.1.6　$[0, \infty)$ 上の測度 $d\nu_n$ を次のように定義する:

$$d\nu_n(t) = \begin{cases} \delta(t)dt & ;\ n = 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}dt & ;\ n \geqslant 1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.1.38}$$

また, 各ウォーク ω に対して, $[0, \infty)^{|\mathbf{L}|}$ 上の測度

$$d\nu_\omega(\underset{\sim}{t}) = \prod_{j \in \mathbf{L}} d\nu_{\eta(j,\omega)}(t_j) \qquad (\underset{\sim}{t} = \{t_j\}_{j \in \mathbf{L}}) \tag{10.1.39}$$

を定義する. このとき, 任意の $i \in \mathbf{L}$, 任意の $\alpha = 1, \cdots, N$ とスピンの多項式に対して

$$[S_i{}^{(\alpha)} F] = \sum_{j \in \mathbf{L}} \sum_{\omega : i \to j} J_\omega \int d\nu_\omega(\underset{\sim}{t}) \left[\frac{\partial F}{\partial S_j{}^{(\alpha)}} \right]_{\underset{\sim}{t}} \tag{10.1.40}$$

がなりたつ. ただし,

$$[G]_{\underset{\sim}{t}} \equiv \int G e^{-H} \prod_{j \in \mathbf{L}} g_j(S_j^2 + 2t_j) dS_j. \tag{10.1.41}$$

であり, これは, (10.1.14) で定義されたもともとの期待値 [・] において, 単独分布 g_j を $g_j(\cdot + 2t_j)$ に変えたものである.

証明　Gauss 型積分の部分積分公式

$$\int \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathbf{L}} M_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \right] \right\} S_i{}^{(\alpha)} F(\underset{\sim}{S}) \prod_{j \in \mathbf{L}} d\boldsymbol{S}_j$$
$$= \int \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathbf{L}} M_{ij} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \right] \right\} \sum_{k \in \mathbf{L}} (M^{-1})_{ik} \frac{\partial F}{\partial S_k{}^{(\alpha)}} \prod_{j \in \mathbf{L}} d\boldsymbol{S}_j$$

を利用すればよい. $(M^{-1})_{ik}$ をランダム ウォーク表示することにより (命題 10.1.2),

$$[S_i{}^{(\alpha)} F] = \sum_{k \in \mathbf{L}} \sum_{\omega : i \to k} J_\omega \int \prod_{j \in \mathbf{L}} d\boldsymbol{S}_j \int \prod_{j \in \mathbf{L}} \tilde{g}_j(a_j)(2ia_j)^{-\eta(j,\omega)} da_j$$
$$\times \exp[-i \sum_{j \in \mathbf{L}} a_j \boldsymbol{S}_j^2] \exp[-H] \frac{\partial F}{\partial S_k{}^{(\alpha)}}$$

そこで，(10.1.28) を用いると

$$\int\Big(\prod_{j\in\mathbf{L}}\tilde{g}_j(a_j)(2ia_j)^{-\eta(j,\omega)}da_j\Big)\exp\Big[-i\sum_{j\in\mathbf{L}}a_j\boldsymbol{S}_j^2\Big]$$
$$=\prod_{j\in\mathbf{L}}\int_0^\infty\frac{t_j^{\eta(j,\omega)-1}}{\{\eta(j,\omega)-1\}!}g_j(\boldsymbol{S}_j^2+2t_j)dt_j$$
$$=\int d\nu_\omega(\underset{\sim}{t})\prod_{j\in\mathbf{L}}g_j(\boldsymbol{S}_j^2+2t_j).$$

ゆえに，(10.1.40) を得る．∎

10.2 $(\boldsymbol{\phi}^4)_\nu$ 理論への応用

この節では，$(\phi^4)_\nu$ モデルを第9章とは異なった仕方で構成する．すなわち，まず，格子空間 $\mathbf{Z}_a^\nu$ 上の理論をつくり——これは，すでに第8章で論じた——そのあとで連続体極限 $a\to 0$ をとるというやり方である．この方法の利点は，'くりこみ' に関連したこまかい点を除けば，何次元にも通用することであり，欠点は，連続体極限の Euclid 回転不変性の証明がむずかしくなること，および ϕ^4 モデルに特有の性質を用いている点にある．

A. モデルの定義といくつかの基本的事実

第8章で $P(X)=X^4$ とした $P(\phi)_\nu$ モデルが，$\mathbf{Z}_a^\nu$ 上の $(\phi^4)_\nu$ モデルである．本節では，半 Dirichlet 境界条件のモデルだけを考える．Λ を $\mathbf{Z}_a^\nu$ の有界集合とする．

定義 10.2.1

(i) ハミルトニアン:

$$H_\Lambda(\phi)=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{|x-y|=a\\x,y\in\Lambda}}\phi(x)\phi(y) \tag{10.2.1}$$

(ii) $\mathbf{R}$ 上の測度 ($\phi(x)$ の 分布関数):

$$d\mu_0(t)=\exp\Big[-\frac{\lambda}{4}t^4+\frac{\rho}{2}t^2\Big]dt \tag{10.2.2}$$

ここで，$\lambda=\lambda(a)>0$, $\rho=\rho(a)\in\mathbf{R}$ は，a の関数としておく（以下の注意

参照).

(iii)　$\mathbf{R}^{|\Lambda|}$ 上の確率測度:

$$d\mu_{\Lambda}{}^{\beta,a}(\phi) = Z_{\Lambda,\beta}{}^{-1}e^{-\beta H_{\Lambda}(\phi)}\prod_{x\in\Lambda}d\mu_0(\phi(x)). \tag{10.2.3}$$

ただし,

$$Z_{\Lambda,\beta} = \int e^{-\beta H_{\Lambda}(\phi)}\prod_{x\in\Lambda}d\mu_0(\phi(x)) \tag{10.2.4}$$

で，$\beta=\beta(a)>0$ は a の関数としておく（以下の注意参照).

(iv)　測度 $d\mu_{\Lambda}{}^{\beta,a}$ についての期待値を $\langle\cdot\rangle_{\Lambda}{}^{\beta,a}$ で表わす.

(v)　n 点 Schwinger 関数:

$$S_{n,\Lambda}{}^{\beta,a}(x_1,\cdots,x_n) = \langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_{\Lambda}{}^{\beta,a},\qquad x_1,\cdots,x_n\in\Lambda. \tag{10.2.5}$$

(vi)　母汎関数

$$K_{\Lambda}{}^{\beta,a}(f) = \langle e^{i\phi(f)}\rangle_{\Lambda}{}^{\beta,a}. \tag{10.2.6}$$

ここで，f は $\mathbf{Z}_a{}^{\nu}$ 上の複素数値関数で Λ に台をもつものとし，記号 $\phi(f)$ は第8章と同じく

$$\phi(f) = \sum_{x\in\mathbf{Z}_a{}^{\nu}}a^{\nu}\phi(x)f(x). \tag{10.2.7}$$

注意　第8章で $P(X)=X^4$ としたものをその通りに対応させるならば,

$$\lambda(a) = 4a^{\nu},$$
$$\rho(a) = [12\gamma_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{F}}-(2\nu a^{-2}+m^2)]a^{\nu}$$
$$\beta(a) = a^{\nu-2}$$

となる（$:\phi(x)^4:$ から生じる定数項は，(10.2.3) の分母と分子で打ち消しあうので，始めから考えなくてよい)．しかし，$\nu\geqq 3$ のときは，$\lambda(a),\rho(a),\beta(a)$ のとり方を上記のものと違うものにしなければ，連続体極限，$\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^{\nu}$，$a\to 0$ において，Schwinger 関数は存在しないことが形式的な議論（‘くりこみ法’）から予想される．そこで，連続体極限の Schwinger 関数が存在するように $\lambda(a),\rho(a),\beta(a)$ を選び，これによって，このモデルにおける‘くりこみ’が遂行されると予想するのである．しかし，そのように選ぶことができるかどうかを知るのは決して容易ではない（後述).

第8章の結果により，無限体積極限

$$S_n^{\beta,a}(x_1,\cdots,x_n)\equiv\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu}S_{n,\Lambda}{}^{\beta,a}(x_1,\cdots,x_n) \qquad (10.2.8)$$

$$K^{\beta,a}(f)\equiv\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}_a{}^\nu}K_\Lambda{}^{\beta,a}(f) \qquad (10.2.9)$$

は存在する．しかも，$K^{\beta,a}(f)$ は，$\mathcal{S}(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ 上の汎関数に拡張され——この拡張も同じ記号で書こう——，$\mathcal{S}_r'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)$ 上の確率測度 $\mu^{\beta,a}$ が存在して

$$K^{\beta,a}(f)=\int_{\mathcal{S}_r'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)}e^{i\phi(f)}d\mu^{\beta,a}(\phi),\qquad f\in\mathcal{S}(\mathbf{Z}_a{}^\nu) \qquad (10.2.10)$$

$$S_n^{\beta,a}(x_1,\cdots,x_n)=\int_{\mathcal{S}_r'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)d\mu^{\beta,a}(\phi) \qquad (10.2.11)$$

と書ける（定理 8.5.5）．

次に，$a\to 0$ の極限を考えよう．$f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ として，均された Schwinger 関数

$$S_n^{\beta,a}(f_1,\cdots,f_n)\equiv\int_{\mathcal{S}_r'(\mathbf{Z}_a{}^\nu)}\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)d\mu^{\beta,a}(\phi) \qquad (10.2.12)$$

を定義する．ここで，$\phi(f)$ は (10.2.7) によってあたえられる．

定理 10.2.2 連続体極限の存在．$\{a_m\}_{m=1}^\infty$ を正数列で $a_m\downarrow 0$ $(m\to\infty)$ となるものとし，定数 $c>0$ と $\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ のあるセミノルム $|||\cdot|||$ が存在して，すべての $m\geqq 1$ に対して，

$$|S_2{}^{\beta,a_m}(f,g)|\leqq c|||f|||\,|||g|||,\qquad f,g\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu) \qquad (10.2.13)$$

がなりたつと仮定しよう．このとき，$\{a_m\}$ の部分列 $\{a_{m_j}\}$ と $\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ 上の確率測度が存在して，すべての $f,f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ に対して

$$\int_{\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)}e^{i\phi(f)}d\mu(\phi)=\lim_{j\to\infty}K^{\beta,a_{m_j}}(f) \qquad (10.2.14)$$

$$\int_{\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)}\phi(f_1)\cdots\phi(f_n)d\mu(\phi)=\lim_{j\to\infty}S_n{}^{\beta,a_{m_j}}(f_1,\cdots,f_n),$$
$$n=1,2,\cdots. \qquad (10.2.15)$$

が成立する．ここでの $\phi(f)$ は超関数 $\phi\in\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ の f での値である．さらに，連続体極限の Schwinger 関数 (10.2.15) は $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{\nu n})$ の元に一意的に拡張され，Euclid 回転不変性とクラスター性を除いた他のすべての Osterwalder-

Schrader の公理をみたす．

証明　概略だけを述べる．詳細については，Newman (1975), Sokal (1982) を参照．$(\phi^4)_\nu$ モデルは，7.5 節で述べたように $\mathcal{L}$ 型の確率変数で定義されるから，定理 7.5.8 のあたえる型の不等式——Newman の不等式——が，$S_m^{\beta,a}$，$K^{\beta,a}(f)$ に対して成立する（もともとは，有界領域におけるモデルで成立するが，不等号は，極限をとってもそのままなりたつ）．したがって，2 点 Schwinger 関数に対する，a_m についての一様評価 (10.2.13) と対角線論法を使うことにより，極限の存在 (10.2.14), (10.2.15) が示される．$a_m \downarrow 0$ の極限をとっても Newman の不等式は成立するので (OS1) (Schwinger 関数の緩増加性) がしたがう．(OS1)（エルミート性）と (OS3)（正定値性）は，それぞれ，定理 8.3.6 の (1), (2) から遺伝する．(OS4)（対称性）は自明．並進不変性は $\mu^{\beta,a}$ のそれから導かれる．∎

定理 10.2.2 の仮定 (10.2.13) は，ひとつの‘くりこみ条件’であり，それが成立するように，$\lambda(a), \rho(a), \beta(a)$ を選べるか否かは問題であるが，$\nu<4$ のときは，それが可能であることが，Sokal (1982) によって示されている．この問題には，ここでは，これ以上には立ち入らないことにする［Sokal (1982) を参照］．

連結 n 点 Schwinger 関数　$U_n^{\beta,a}(x_1, \cdots, x_n)$，$n=1,2,\cdots$，を次の漸化式によって定義しよう：

$$U_1^{\beta,a}(x) \equiv S_1^{\beta,a}(x) = 0 \tag{10.2.16}$$

$$U_n^{\beta,a}(x_1, \cdots, x_n) = S_n^{\beta,a}(x_1, \cdots, x_n) - \sum_{\sigma \in \Pi_n} \prod_{p \in \sigma} U_{|p|}^{\beta,a}(\{x_i\}_{i \in p}), \quad n \geqslant 2. \tag{10.2.17}$$

ただし，Π_n は $(1, \cdots, n)$ の分割のすべての集合である．

定義と $S_{2n+1}^{\beta,a}(x_1, \cdots, x_{2n+1}) = 0$，$n \geqslant 0$，から

$$U_{2n+1}^{\beta,a}(x_1, \cdots, x_{2n+1}) = 0, \quad n \geqslant 0, \tag{10.2.18}$$

がでる．

定理 10.2.3　$a_m \downarrow 0$ $(m \to \infty)$ をみたす正数列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ があって，すべての $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ に対して

$$S_n(f_1, \cdots, f_n) \equiv \lim_{m \to \infty} S_n^{\beta,a_m}(f_1, \cdots, f_n)$$

が存在し，$S_n \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^{n\nu})$ と仮定する．したがって

$$U_n(f_1, \cdots, f_n) \equiv \lim_{m\to\infty} \sum_{x_1, \cdots, x_\nu} U_n{}^{\beta, a_m}(x_1, \cdots, x_n) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) a_m{}^{\nu n}$$

も存在し，U_n は $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{n\nu})$ の元を定義する．さらに，$n = 2, 3, \cdots,$ のうちのあるひとつの n に対して $U_{2n} = 0$ と仮定しよう．このとき，すべての $n = 2, 3, \cdots,$ に対して $U_n = 0$ である．

証明 概略だけを述べる．Schwinger 関数の連続体極限の存在は，Newman の不等式と 8 章で述べた Vitali の定理によって，母汎関数の極限

$$K(f) \equiv \lim_{m\to\infty} K^{\beta, a_m}(f), \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^\nu)$$

の存在を意味する．$K\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)$ $(f_j \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^\nu))$ は $\zeta_1, \cdots, \zeta_n \in \mathbf{C}$ について解析的であり，Newman の不等式

$$\left| K\left(\sum_{j=1}^n \zeta_j f_j\right)\right| \leqslant \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |\zeta_i|\, |\zeta_j| S_2(|f_i|, |f_j|)\right]$$

がなりたつ．特に，汎関数 K は Minlos の定理の仮定をみたし，$\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ 上の確率測度 μ が存在して，

$$K(f) = \int_{\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)} e^{i\phi(f)} d\mu(\phi), \qquad f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^\nu)$$

と書ける．$K^{\beta, a_m}(\zeta f)$ は，ζ の正則関数として，$\mathbf{C}$ のコンパクト集合上で一様に収束しており（Vitali の定理），その零点は純虚数であったから［$(\phi^4)_\nu$ 格子場は $\mathscr{L}$ 型の確率変数である；7.5 節を参照］，関数論の Hurwitz の定理によって，$K(\zeta f)$ の ζ についての零点も純虚数である．したがって，確率変数 $\phi(f)$ は $\mathscr{L}$ 型になる［$K(-\zeta f) = K(\zeta f)$ は自明であろう］．そこで，定理 7.5.3 を適用して，もとめる結果を得る．■

一般に，Osterwalder-Schrader の公理系にしたがう Schwinger 関数の列 $\{S_n(x_1, \cdots, x_n)\}$ が，同時に

$$S_{2n-1}(x_1, \cdots, x_{2n-1}) = 0 \tag{10.2.19}$$

$$S_{2n}(x_1, \cdots, x_{2n}) = \sum_{\text{comb}} S_2(x_{i_1}, x_{j_1}) \cdots S_2(x_{i_n}, x_{j_n}), \qquad n \geqslant 1, \quad x_i \neq x_j \ (i \neq j) \tag{10.2.20}$$

をみたすとき，この理論は，一般化された自由場であるという．これは，4.8節で，Wightman超関数を用いて定義した一般化された自由場と同値である*)．4.8節ですでに指摘したように，一般化された自由場の理論は物理的にトリヴィアルである．定理 10.2.3 は，$(\phi^4)_\nu$ モデルの連続体極限のトリヴィアル性のひとつの十分条件をあたえるものである．

B. $U_4^{\beta,a}$ の評価

次の不等式を証明する：

定理 10.2.4　$x_i \neq x_j$, $i \neq j$ に対して

$$0 \geqslant U_4^{\beta,a}(x_1, \cdots, x_4) \geqslant -\beta(a)^2 \sum_{\text{comb}} V(x_{i_1}, x_{j_1} \mid x_{i_2}, x_{j_2}) - \beta(a) \sum_{\text{comb}} R(x_{i_1}, x_{j_1} \mid x_{i_2}, x_{j_2}). \tag{10.2.21}$$

ただし，

$$V(x_1, x_2 \mid x_3, x_4) = \sum_{\substack{z \in \mathbf{Z}_a{}^\nu \\ z \notin \{x_1, \cdots, x_4\}}} \sum_{\substack{|z'-z|=a \\ |z''-z|=a}} S_2^{\beta,a}(x_1, z) S_2^{\beta,a}(z', x_2) \times S_2^{\beta,a}(x_3, z) S_2^{\beta,a}(z'', x_4), \tag{10.2.22}$$

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2 \mid x_3, x_4) = &\sum_{|z-x_1|=a} S_2^{\beta,a}(x_1, x_2) S_2^{\beta,a}(x_3, x_1) S_2^{\beta,a}(z, x_4) \\ &+ \sum_{|z-x_2|=a} S_2^{\beta,a}(x_1, x_2) S_2^{\beta,a}(x_3, x_2) S_2^{\beta,a}(z, x_4) \\ &+ \sum_{|z-x_3|=a} S_2^{\beta,a}(x_3, x_4) S_2^{\beta,a}(x_1, x_3) S_2^{\beta,a}(z, x_2) \\ &+ \sum_{|z-x_4|=a} S_2^{\beta,a}(x_3, x_4) S_2^{\beta,a}(x_1, x_4) S_2^{\beta,a}(z, x_2). \end{aligned} \tag{10.2.23}$$

$\sum_{\text{comb}}$ は $\{1, \cdots, 4\}$ の2個の対の順序づけられていない集合

$$\{(i_1, j_1)(i_2, j_2)\} = \{(1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$$

についての和である．

(10.2.21) の左側の不等式は，Lebowitz の不等式にほかならない (7.4節参照)．問題は，右側の不等式であるが，その証明の鍵となるのが，前節で議論した格子スピン系のランダムウォーク表示である．

---

*) 互いに解析接続でつながっている．

$\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の有界領域 Λ における Schwinger 関数に対して不等式 (10.2.21) を示せば十分だから，以下，単に

$$[F]=Z_{\Lambda,\beta}\langle F\rangle_\Lambda{}^{\beta,a},\qquad \langle F\rangle=\langle F\rangle_\Lambda{}^{\beta,a} \tag{10.2.24}$$

と記すことにしよう．また

$$J_{xy}=\begin{cases}\beta(a)\ ;\ |x-y|=a\ \text{のとき}\\ 0\qquad ;\ |x-y|\neq a\ \text{のとき}\end{cases} \tag{10.2.25}$$

$$g_x(t)\equiv g(t)=\exp\left[-\frac{\lambda(a)}{4}t^2+\frac{\rho(a)}{2}t\right],\qquad x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu \tag{10.2.26}$$

とおこう．このとき，$N=1$, $\mathbf{L}=\Lambda$, $H=H_\Lambda(\phi)$, $S_x=\phi(x)$, $x\in\mathbf{Z}_a{}^\nu$, という対応によって，10.1 節の理論を適用することができる．したがって，定理 10.1.6 によって——$S_x=\phi(x)$, $F=\phi(y)$ として——

$$[\phi(x)\phi(y)]=\sum_{\omega:x\to y}\beta^{|\omega|}\int d\nu_\omega(\underset{\sim}{t})Z(\underset{\sim}{t}) \tag{10.2.27}$$

という表示を得る．ここで，$d\nu_\omega(\underset{\sim}{t})$ は (10.1.39) で定義されている．ω は Λ 上の最近接ウォーク——すなわち，その任意のステップ (z,z') に対し $|z-z'|=a$ となるようなもの——であり，$Z(\underset{\sim}{t})$ は

$$Z(\underset{\sim}{t})=\int e^{-H_\Lambda}\Big[\prod_{x\in\Lambda}g(\phi(x)^2+2t_x)d\phi(x)\Big],\qquad \underset{\sim}{t}=\{t_x\}_{x\in\Lambda}. \tag{10.2.28}$$

であたえられる．$Z(0)=Z_{\Lambda,\beta}$ に注意しておこう．

以下，Λ 上のウォークはすべて最近接ウォークとする．

定理 10.1.6 において，$S_i=\phi(x_1)$, $F=\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)$ とすれば

$$\begin{aligned}&[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)]\\ &=\sum_{\omega:x_1\to x_2}\beta^{|\omega|}\int d\nu_\omega(\underset{\sim}{t})[\phi(x_3)\phi(x_4)]_{\underset{\sim}{t}}\\ &\quad+\sum_{\omega:x_1\to x_3}\beta^{|\omega|}\int d\nu_\omega(\underset{\sim}{t})[\phi(x_2)\phi(x_4)]_{\underset{\sim}{t}}\\ &\quad+\sum_{\omega:x_1\to x_4}\beta^{|\omega|}\int d\nu_\omega(\underset{\sim}{t})[\phi(x_2)\phi(x_3)]_{\underset{\sim}{t}}.\end{aligned} \tag{10.2.29}$$

ただし，(10.1.41) と同様に

$$[G]_t = \int G e^{-H_\Lambda}[\prod_{x\in\Lambda} g(\phi(x)^2 + 2t_x)d\phi(x)]. \qquad (10.2.30)$$

そこで，$g(\cdot+2t_x)$ を $g_x(\cdot)$ と考えて，定理10.1.6を適用すれば，(10.2.27)に対応する式

$$[\phi(x)\phi(y)]_t = \sum_{\omega:x\to y} \beta^{|\omega|} \int d\nu_\omega(\underset{\sim}{s}) Z(\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{s}) \qquad (10.2.31)$$

を得る．したがって，

$$[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)]$$
$$= \sum_{\text{comb}} \sum_{\substack{\omega_1:x_{i1}\to x_{j1}\\ \omega_2:x_{i2}\to x_{j2}}} \beta^{|\omega_1|+|\omega_2|} \int d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t}) d\nu_{\omega_2}(\underset{\sim}{s}) Z(\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{s}) \qquad (10.2.32)$$

となる．ゆえに

$$z(\underset{\sim}{t}) = Z(\underset{\sim}{t})/Z_{\Lambda,\beta} \qquad (10.2.33)$$

とおけば，

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = \sum_{\omega:x\to y} \beta^{|\omega|} \int d\nu_\omega(\underset{\sim}{t}) z(\underset{\sim}{t}) \qquad (10.2.34)$$

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle$$
$$= \sum_{\text{comb}} \sum_{\substack{\omega_1:x_{i1}\to x_{j1}\\ \omega_2:x_{i2}\to x_{j2}}} \beta^{|\omega_1|+|\omega_2|} \int d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t}) d\nu_{\omega_2}(\underset{\sim}{s}) z(\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{s}) \qquad (10.2.35)$$

という表示が得られる．(10.2.17) の右辺の Schwinger 関数を Λ におけるそれで置き換えて定義される連結 n 点 Schwinger 関数を単に U_n と書くことにする．このとき，(10.2.34), (10.2.35) によって

$$U_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= \sum_{\text{comb}} \sum_{\substack{\omega_1:x_{i1}\to x_{j1}\\ \omega_2:x_{i2}\to x_{j2}}} \beta^{|\omega_1|+|\omega_2|} \int d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t}) d\nu_{\omega_2}(\underset{\sim}{s}) [z(\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{s}) - z(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{s})]$$
$$(10.2.36)$$

上式の右辺を評価するために

$$\mathring{z}(\underset{\sim}{t}) \equiv z(\underset{\sim}{t}) \prod_{x\in\Lambda} \exp[\lambda t_x{}^2]$$
$$= Z_{\Lambda,\beta}{}^{-1} \int e^{-H_\Lambda} \{\prod_{x\in\Lambda} g(\phi(x)^2 + 2t_x)\exp[\lambda t_x{}^2] d\phi(x)\} \qquad (10.2.37)$$

を考えよう．

$$\exp[\lambda t^2]g(\phi^2+2t) = g(\phi^2)\exp[(-\lambda\phi^2+\rho)t]$$

であるから，

$$\dot{z}(\underset{\sim}{t}) = \langle F(\underset{\sim}{t})\rangle$$

と書ける．ただし

$$F(\underset{\sim}{t}) = \prod_{x\in\Lambda}\exp[(-\lambda\phi(x)^2+\rho)t_x]$$

$F(\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{s}) = F(\underset{\sim}{t})F(\underset{\sim}{s}) = [-F(\underset{\sim}{t})][-F(\underset{\sim}{s})]$ であり，$-F(\underset{\sim}{t})$ は，$\phi(x)$ について単調増加であるから，FKG 不等式によって

$$\dot{z}(\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{s}) \geqslant \dot{z}(\underset{\sim}{t})\dot{z}(\underset{\sim}{s})$$

がなりたつ．ゆえに，

$$\begin{aligned}
&z(\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{s})-z(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{s})\\
&\quad = \dot{z}(\underset{\sim}{t}+\underset{\sim}{s})\prod_{x\in\Lambda}\exp[-\lambda(t_x+s_x)^2]-\dot{z}(\underset{\sim}{t})\dot{z}(\underset{\sim}{s})\prod_{x\in\Lambda}\exp[-\lambda(t_x{}^2+s_x{}^2)]\\
&\quad \geqslant \dot{z}(\underset{\sim}{t})\dot{z}(\underset{\sim}{s})\{\exp[-2\lambda\sum_{x\in\Lambda}t_xs_x]-1\}\exp[-\lambda\sum_{x\in\Lambda}(t_x{}^2+s_x{}^2)]\\
&\quad = \{\exp[-2\lambda\sum_{x\in\Lambda}t_xs_x]-1\}z(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{s}).
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
&U_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\\
&\quad \geqslant \sum_{\text{comb}}\sum_{\substack{\omega_1 : x_{i1}\to x_{j1}\\ \omega_2 : x_{i2}\to x_{j2}}}\beta^{|\omega_1|+|\omega_2|}\int d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t})d\nu_{\omega_2}(\underset{\sim}{s})\\
&\qquad\qquad \times\{\exp[-2\lambda\sum_{x\in\Lambda}t_xs_x]-1\}z(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{s}) \qquad (10.2.38)
\end{aligned}$$

ところで

$$d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t})d\nu_{\omega_2}(\underset{\sim}{s}) = \prod_{x\in\Lambda}d\nu_{\eta(x,\omega_1)}(t_x)d\nu_{\eta(x,\omega_2)}(s_x)$$

であることに注意しよう．$\omega_1\frown\omega_2 = \phi$ の場合を考えると，このとき，

（a） $x\in\omega_1 \Longrightarrow \eta(x,\omega_1)\geqslant 1,\ \eta(x,\omega_2)=0$

（b） $x\in\omega_2 \Longrightarrow \eta(x,\omega_1)=0,\ \eta(x,\omega_2)\geqslant 1$

がなりたつから，任意の $x\in\omega_1\smile\omega_2$ に対して

$$d\nu_{\eta(x,\omega_1)}(t_x)d\nu_{\eta(x,\omega_2)}(s_x) = \begin{cases}\delta(t_x)dt_xd\nu_{\eta(x,\omega_2)}(s_x)\\ \quad\text{または}\\ d\nu_{\eta(x,\omega_1)}(t_x)\delta(s_x)ds_x\end{cases}$$

一方，$x\notin\omega_1\smile\omega_2$ ならば

$$d\nu_{\eta(x,\omega_1)}(t_x)d\nu_{\eta(x,\omega_2)}(s_x) = \delta(t_x)dt_x\delta(s_x)ds_x$$

よって，$\omega_1 \cap \omega_2 = \phi$ ならば

$$\int d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t})d\nu_{\omega_2}(\underset{\sim}{s})\{\exp[-2\lambda\sum_{x\in\Lambda}t_x s_x]-1\}z(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{s}) = 0$$

となる．したがって，(10.2.38) において，$\omega_1 \cap \omega_2 \neq \phi$ なるウォーク ω_1, ω_2 だけが寄与し，次の結果に導く．

$$\begin{aligned}&U_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\\ &\geqslant -\sum_{\text{comb}}\sum_{\substack{\omega_1 : x_{i1}\to x_{j1}\\ \omega_2 : x_{i2}\to x_{j2}\\ \omega_1\cap\omega_2\neq\phi}}\beta^{|\omega_1|+|\omega_2|}\int d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t})d\nu_{\omega_2}(\underset{\sim}{s})z(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{s})\\ &\geqslant -\sum_{\text{comb}}\sum_{z\in\Lambda}\sum_{\substack{\omega_1 : x_{i1}\to x_{j1}\\ \omega_2 : x_{i2}\to x_{j2}\\ \omega_1\cap\omega_2\ni z}}\beta^{|\omega_1|+|\omega_2|}\int d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t})d\nu_{\omega_2}(\underset{\sim}{s})z(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{s}).\end{aligned} \tag{10.2.39}$$

この (10.2.39) の右辺を評価するために，z についての和をふたつにわけて，$z \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ についての和を，$U_4^{(1)}$，$z \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ についての和を $U_4^{(2)}$ としよう．以下，$x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ とする．

(a) $U_4^{(1)}$ の評価　$\omega_i, (i = 1, 2)$ を 3 つの経路に分解しよう：

$$\omega_1 = \omega_1' \circ (z, z') \circ \omega_1''$$
$$\omega_2 = \omega_2' \circ (z, z'') \circ \omega_2''$$

ただし，

$$\omega_1' : x_{i_1} \to z, \qquad \omega_1'' : z' \to x_{j_1},$$
$$\omega_2' : x_{i_2} \to z, \qquad \omega_2'' : z'' \to x_{j_2}.$$

であり，$(z, z'), (z, z'')$ は $|z-z'| = |z-z''| = a$ をみたすステップとする．このとき，$|\omega_i| = |\omega_i'|+|\omega_i''|+1$ だから

$$\begin{aligned}U_4^{(1)} \geqslant -\beta^2 &\sum_{\text{comb}}\sum_{z\in\Lambda}\sum_{\substack{|z'-z|=a\\ |z''-z|=a}}\sum_{\substack{\omega_1', \omega_1''\\ \omega_2', \omega_2''}}\\ &\times\left\{\beta^{|\omega_1'|+|\omega_1''|}\int d\nu_{\omega_1'\circ(z,z')\circ\omega_1''}(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{t})\right\}\\ &\times\left\{\beta^{|\omega_2'|+|\omega_2''|}\int d\nu_{\omega_2'\circ(z,z'')\circ\omega_2''}(\underset{\sim}{s})z(\underset{\sim}{s})\right\}\end{aligned} \tag{10.2.40}$$

そこで，(10.2.40) の $\{\cdots\cdots\}$ について考えよう．いま，$x, y \in \Lambda$，$x \neq y$，$x \neq z$ に対して

$$\omega' : x \to z, \qquad \omega'' : z' \to y$$

とし，(z, z') は $|z-z'|=a$ をみたすステップとする．このとき，$d\nu_\omega$ の定義 (10.1.38), (10.1.39) にもどって考えると

$$\int d\nu_{\omega'\circ(z,z')\circ\omega''}(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{t}) = \int d\nu_{\omega'}(\underset{\sim}{t}')d\nu_{\omega''}(\underset{\sim}{t}'')z(\underset{\sim}{t}'+\underset{\sim}{t}'') \qquad (10.2.41)$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}
&\sum_{\omega',\omega''}\beta^{|\omega',\omega''|}\int d\nu_{\omega'\circ(z,z')\circ\omega''}(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{t}) \\
&\quad = \langle\phi(x)\phi(z)\rangle\langle\phi(z')\phi(y)\rangle \\
&\qquad + \sum_{\omega',\omega''}\beta^{|\omega'|+|\omega''|}\int d\nu_{\omega'}(\underset{\sim}{t}')d\nu_{\omega''}(\underset{\sim}{t}'')[z(\underset{\sim}{t}'+\underset{\sim}{t}'')-z(\underset{\sim}{t}')z(\underset{\sim}{t}'')].
\end{aligned} \qquad (10.2.42)$$

ここで，(10.2.34) を用いた．

上式の右辺の第2項を評価するために，パラメーター t に依存する期待値 $\langle\cdot\rangle(\underset{\sim}{t})$ を次式によって定義する：

$$\langle\cdot\rangle(\underset{\sim}{t}) \equiv Z(\underset{\sim}{t})^{-1}\int\cdot\, e^{-H_\Lambda}\left\{\prod_{z\in\Lambda}g(\phi(z)^2+2t_z)d\phi(z)\right\}. \qquad (10.2.43)$$

このとき，(10.2.31) により

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle(\underset{\sim}{t}) = z(\underset{\sim}{t})^{-1}\sum_{\omega:x\to y}\beta^{|\omega|}\int d\nu_\omega(\underset{\sim}{s})z(\underset{\sim}{s}+\underset{\sim}{t}) \qquad (10.2.44)$$

と書ける．これを用いると

$$\begin{aligned}
&[(10.2.42) \text{ の第2項}] \\
&\quad = \sum_{\omega'}\beta^{|\omega'|}\int d\nu_{\omega'}(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{t})[\langle\phi(z')\phi(y)\rangle(\underset{\sim}{t})-\langle\phi(z')\phi(y)\rangle]
\end{aligned} \qquad (10.2.45)$$

と表わされる．

補題 10.2.5 $\langle\phi(x)\phi(y)\rangle(\underset{\sim}{t})$ ($t_x \geqslant 0$, $x\in\Lambda$) は $\underset{\sim}{t}$ の単調減少関数である．特に，任意の $\underset{\sim}{t}$ に対して

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle(\underset{\sim}{t}) \leqslant \langle\phi(x)\phi(y)\rangle \qquad (10.2.46)$$

証明

$$g(\phi^2+2t) = g(\phi^2)\exp[-\lambda t^2-\lambda t\phi^2+t\rho]$$

に注意すると

$$\langle G\rangle(\underset{\sim}{t}) = \frac{\langle GF(\underset{\sim}{t})\rangle}{\langle F(\underset{\sim}{t})\rangle}$$

と書ける．ただし，

$$F(\underset{\sim}{t}) = \prod_{x\in\Lambda} \exp[-\lambda t_x \phi(x)^2]$$

したがって，

$$\frac{\partial}{\partial t_z}\langle\phi(x)\phi(y)\rangle(\underset{\sim}{t})$$
$$= -\lambda\{\langle\phi(x)\phi(y)\phi(z)^2\rangle(\underset{\sim}{t}) - \langle\phi(x)\phi(y)\rangle(\underset{\sim}{t})\langle\phi(z)^2\rangle(\underset{\sim}{t})\}$$

明らかに，$\langle\cdot\rangle(\underset{\sim}{t})$ に対して GKS-II 不等式は成立するから，$\lambda > 0$ を考慮して，

$$\frac{\partial}{\partial t_z}\langle\phi(x)\phi(y)\rangle(\underset{\sim}{t}) \leqslant 0$$

ゆえに，題意が示された．(10. 2. 46) は $\langle\cdot\rangle(\underset{\sim}{0}) = \langle\cdot\rangle$ に注意すればよい．∎

(10. 2. 46) と (10. 2. 45) により，(10. 2. 42) の第 2 項は非正である．こうして

$$\sum_{\substack{\omega' : x\to z \\ \omega'' : z'\to y}} \beta^{|\omega'|+|\omega''|}\int d\nu_{\omega'\circ(z,z')\circ\omega''}(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{t}) \leqslant \langle\phi(x)\phi(z)\rangle\langle\phi(z')\phi(y)\rangle \tag{10. 2. 47}$$

を得る．これと (10. 2. 40) とによって

$$U_4^{(1)} \geqslant -\beta^2 \sum_{\text{comb}} V(x_{i_1}, x_{j_1} \mid x_{i_2}, x_{j_2}) \tag{10. 2. 48}$$

を得る．

(b) $U_4^{(2)}$ の評価　この場合も (a) の場合と同様に考えればよいが，今度は，ω_i の経路分解において，片方の経路だけが分解される．たとえば，$\omega_1 : x_1 \to x_2$，$\omega_2 : x_3 \to x_4$，$z = x_1$ の場合を考えると，ω_1 は分解せず，

$$\omega_2 : \omega_2'\circ(x_1, z')\circ\omega_2'',$$
$$\omega_2' : x_3 \to x_1,$$
$$\omega_2'' : z' \to x_4$$

となる．したがって

$$\sum_{\substack{\omega_1 : x_1\to x_2\\ \omega_2 : x_3\to x_4\\ \omega_1\cap\omega_2\ni x_1}} \beta^{|\omega_1|+|\omega_2|}\int d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t})d\nu_{\omega_2}(\underset{\sim}{s})z(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{s})$$

$$=\beta\Big(\sum_{\omega_1 : x_1\to x_2}\beta^{|\omega_1|}\int d\nu_{\omega_1}(\underset{\sim}{t})z(\underset{\sim}{t})\Big)\Big(\sum_{\omega_2', \omega_2''}\beta^{|\omega_2'|+|\omega_2''|}\int d\nu_{\omega_2'\circ(x_1,z')\circ\omega_2''}(\underset{\sim}{s})z(\underset{\sim}{s})\Big)$$

$$\leqslant \beta\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle\langle\phi(x_3)\phi(x_1)\rangle\langle\phi(z')\phi(x_4)\rangle$$

ここで，(10.2.47) を用いた．$z=x_2, x_3, x_4$ の場合も同様である．よって，

$$U_4^{(2)}\geqslant -\beta\sum_{\text{comb}}R(x_{i_1}, x_{j_1}\,|\,x_{i_2}, x_{j_2})$$

が得られる．

以上で定理 10.2.4 が証明された．

C. $\nu\geqslant 4$ の $(\phi^4)_\nu$ 理論がトリヴィアルなこと

この節で $(\phi^4)_\nu$ $(\nu\geqslant 4)$ の連続体極限が――ある種の‘くりこみ条件’のもとで――一般化された自由場になること，したがって，トリヴィアルな理論であることを証明する．

初めに，2点 Schwinger 関数についていくつかの性質を述べる．

補題 10.2.6 $S_2^{\beta,a}(0,x)^{\mathrm{P}}$ を $(\phi^4)_\nu$ モデルの周期的境界条件の無限体積極限としよう*)．このとき

(a) $S_2^{\beta,a}(0,x)^{\mathrm{P}}$ は各 $|x_i|$ $(i=1,\cdots,\nu)$ について単調減少である．特に，$|b|\leqslant|x|_\infty\equiv\max_{1\leqslant i\leqslant\nu}|x_i|$ならば

$$0\leqslant S_2^{\beta,a}(0,(x_1,\cdots,x_\nu))^{\mathrm{P}}\leqslant S_2^{\beta,a}(0,(b,0,\cdots,0))^{\mathrm{P}}. \tag{10.2.49}$$

(b) $|b|\geqslant|y|_1\equiv\sum_{i=1}^{\nu}|y_i|$ ならば，

$$S_2^{\beta,a}(0,(b,0,\cdots,0))^{\mathrm{P}}\leqslant S_2^{\beta,a}(0,(y_1,\cdots,y_\nu))^{\mathrm{P}} \tag{10.2.50}$$

証明 (a) は，定理 6.5.3 による．(b) は，$\mathbf{R}^\nu$ の超平面 $x_i=x_j$ $(i\neq j)$, $i,j=1,\cdots,\nu$ に関する鏡映正値性を考えることにより，定理 6.5.3 と同様にして証明される．詳細については，Schrader (1977), Messager and Miracle-Sole (1977), Hegerfeldt (1977), Szász (1978) を参照．∎

*) 定理 8.4.12 によって少なくともひとつ存在する．

注意　上の補題は，$S_2^{\beta,a}(0,x)$ に対してもなりたつ．

補題 10.2.7　$S_2^{\beta,a}(0,x)^{\mathrm{P}}$ は次のスペクトル表示をもつ：

$$S_2^{\beta,a}(0,x)^{\mathrm{P}} = M_{\beta,a}{}^2 + \int_{[-\pi/a,\pi/a]^\nu} d^\nu p \rho(p) e^{ipx} \tag{10.2.51}$$

ただし，

$$M_{\beta,a}{}^2 = \lim_{|x|\to\infty} S_2^{\beta,a}(0,x)^{\mathrm{P}}, \tag{10.2.52}$$

ρ は非負値関数で，$p \neq 0$ に対して

$$\rho(p) \leqslant \frac{a^\nu}{(2\pi)^\nu 4\beta(a) \sum_{i=1}^{\nu} \sin^2 \frac{p_i a}{2}} \tag{10.2.53}$$

をみたす．

証明　定理 6.4.5 による．∎

上記ふたつの補題を用いると，$S_2^{\beta,a}(0,x)$ に対するひとつの評価を得ることができる：

補題 10.2.8　$\nu \geqslant 3$ としよう．このとき，ν だけによる定数 $c_\nu > 0$ が存在して

$$0 \leqslant S_2^{\beta,a}(0,x) \leqslant S_2^{\beta,a}(0,x)^{\mathrm{P}} \leqslant M_{\beta,a}{}^2 + c_\nu \zeta(a)^{-1} |x|^{2-\nu} \tag{10.2.54}$$

ただし，

$$\zeta(a) \equiv \beta(a) a^{2-\nu} \tag{10.2.55}$$

この補題の証明は，次の一般的な命題による：

命題 10.2.9　$\nu \geqslant 3$ とする．$\mathbf{Z}^\nu$ 上の関数 $f(x)$ に対して，超関数の意味で

$$\hat{f}(p) = \sum_{x\in\mathbf{Z}^\nu} e^{-ipx} f(x), \qquad p \in [-\pi,\pi]^\nu,$$

とおく．f は次の 2 つの仮定をみたすとしよう：

（i）　定数 $c > 0$ が存在して，$|y| \leqslant c|x|$ ならば，

$$0 \leqslant f(x) \leqslant f(y).$$

（ii）　$\hat{f} \in \mathrm{L}^1([-\pi,\pi]^\nu)$ で，定数 $c_1, J > 0$ が存在して，

$$0 \leqslant \hat{f}(p) \leqslant \frac{c_1}{Jp^2}, \qquad p \neq 0.$$

このとき，J に依存しない定数 $c_2>0$ が存在して

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{c_2}{J(|x|+1)^{\nu-2}} \tag{10.2.56}$$

証明　$L>0,\ x \in \mathbf{Z}^\nu$ とし，

$$\chi_L(x)=\begin{cases}1\,;\ x_i \in [-L, L],\ i=1,\cdots,\nu \text{ のとき}\\ 0\,;\ \text{その他の場合.}\end{cases}$$

とする．このとき，

$$\hat{\chi}_L(p)=\prod_{j=1}^{\nu}\frac{\sin\left(L+\frac{1}{2}\right)p_j}{\sin\frac{p_j}{2}}.$$

ところで，仮定 (ii) により

$$\begin{aligned}(\chi_L * f * \chi_L)(0) &= (2\pi)^{-\nu}\int_{[-\pi,\pi]^\nu} d^\nu p \hat{f}(p)\hat{\chi}_L(p)^2 \\ &\leqslant \frac{c_1}{(2\pi)^\nu J}\int_{[-\pi,\pi]^\nu} d^\nu p \frac{\hat{\chi}_L(p)^2}{p^2} = \frac{c_1}{J}(\chi_L * g * \chi_L)(0).\end{aligned}$$

ただし，

$$g(x)=\frac{1}{(2\pi)^\nu}\int_{[-\pi,\pi]^\nu} d^\nu p \frac{e^{ipx}}{p^2}.$$

$\nu \geqslant 3$ なので，$g(x)$ はよく定義されている．そして，$g(x) \sim \text{const.}\ |x|^{-(\nu-2)}$ $(|x| \to \infty)$ となるから，$g \in L_w^{\nu/(\nu-2)}$．ただし，$L_w^{\nu/(\nu-2)}$ は，$\mathbf{Z}^\nu$ 上の関数 f で，すべての $t>0$ に対して

$$\#\{x \in \mathbf{Z}^\nu \mid |f(x)| > t\} \leqslant ct^{-\nu/(\nu-2)}$$

となるものの集合を表わす（$\#\{\ \}$ は集合 $\{\ \}$ の元の個数を表わし，$c>0$ は定数）．したがって，まず Schwarz の不等式，次に一般化された Young の不等式*) を用いて，

*) Reed and Simon (1975), § IX. 4.

$$(\chi_L * g * \chi_L)(0) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^\nu} (g * \chi_L)(x)\chi_L(x) \leqslant \|g * \chi_L\|_2 \|\chi_L\|_2$$
$$\leqslant \text{const. } \|g\|_{\nu/(\nu-2),w} \|\chi_L\|_{2\nu/(\nu+4)} \|\chi_L\|_2$$
$$= \text{const. } (2L+1)^{\nu+2}$$

を得る．ただし，

$$\|h\|_p = (\sum_{x \in \mathbf{Z}^\nu} |h(x)|^p)^{1/p}$$
$$\|h\|_{p,w} = [\sup_{t>0}(t^p \#\{x \mid |h(x)| > t\})]^{1/p}.$$

したがって，

$$(\chi_L * f * \chi_L)(0) \leqslant \text{const. } (2L+1)^{\nu+2}/J$$

一方，

$$(\chi_L * f * \chi_L)(0) = \sum_{\substack{|x_i| \leqslant L \\ |y_j| \leqslant L}} f(x-y)$$
$$\geqslant (2L+1)^{2\nu} \min_{|y_i| \leqslant 2L} f(y).$$

したがって，

$$\min_{|y_i| \leqslant 2L} f(y) \leqslant \text{const. } J^{-1}(2L+1)^{-(\nu-2)}.$$

そこで，$L = (c/2\sqrt{\nu})|x|$ とすれば，$|y_i| \leqslant 2L$ のとき，$|y| \leqslant 2L\sqrt{\nu} = c|x|$．したがって，仮定 (i) によって，$f(x) \leqslant f(y)$．ゆえに，(10. 2. 56) を得る．∎

補題 10. 2. 8 の証明　(10. 2. 53) と $|\sin x/x| \leqslant 2/\pi$，$x \in [-\pi/2, \pi/2]$ によって

$$\rho(p) \leqslant \frac{\text{const.}}{\zeta(a)p^2}. \qquad (p \neq 0)$$

また，(10. 2. 49) と (10. 2. 50) によって，$|y|_1 \leqslant |x|_\infty$ ならば，

$$S(0, y)^{\mathrm{P}} \leqslant S(0, x)^{\mathrm{P}} \tag{10. 2. 57}$$

しかし，$|y| \leqslant \nu^{-1}|x|$ ならば，$|y|_1 \leqslant \sqrt{\nu}|y| \leqslant |x|/\sqrt{\nu} \leqslant |x|_\infty$ となるから，このとき，(10. 2. 57) がなりたつ．そこで，

$$f(x) = S(0, ax)^{\mathrm{P}} - M_{\beta,a}{}^2 \qquad x \in \mathbf{Z}^\nu$$

として，命題 10. 2. 9 を用いればよい．なお，(10. 2. 54) の左から 2 番目の不等式は，補題 8. 4. 7 による．∎

連続体極限をとるための‘くりこみ条件’として次のものを考える：

$$(\mathrm{R})\quad \begin{cases} 0 < \sup_{a\in(0,1]} \zeta(a) < \infty. \\ M_{\beta,a} \equiv 0. \\ 0 < |x| \leqslant 1 \text{ をみたす各 } x \in \mathbf{Z}_a{}^\nu \text{ に対して} \\ 0 \leqslant \sup_{a\in(0,1]} S_2{}^{\beta,a}(0,x) < \infty \end{cases}$$

ここで，$\zeta(a)$ は (10.2.55) で定義されている．

さて，$\mathbf{R}^{n\nu}$ 上の関数 f で均された連結 n 点 Schwinger 関数 $U_n{}^{\beta,a}(f)$ を，

$$U_n{}^{\beta,a}(f) = \sum_{\substack{x_j\in\mathbf{Z}_a{}^\nu \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a^{n\nu} U_n{}^{\beta,a}(x_1,\cdots,x_n) f(x_1,\cdots,x_n) \qquad (10.2.58)$$

の右辺が意味をもつとき，これによって定義する．さらに

$$\mathsf{C}_{\neq}(\mathbf{R}^{n\nu}) = \left\{ f \in \mathsf{C}(\mathbf{R}^{n\nu}) \cap \mathsf{L}^1(\mathbf{R}^{n\nu}, d^{n\nu}x) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{超平面 } x_i = x_j \\ (i \neq j,\ i,j = 1,\cdots,n) \\ \text{の近傍で } f(x_1,\cdots,x_n) = 0 \end{array} \right\} \qquad (10.2.59)$$

とおく．

定理 10.2.10

（1） $\nu \geqslant 5$ のとき，(R) が成立するならば，すべての $f \in \mathsf{C}_{\neq}(\mathbf{R}^{4\nu})$ に対して

$$\lim_{a\to 0} U_4{}^{\beta,a}(f) = 0. \qquad (10.2.60)$$

（2） $\nu = 4$ のとき，(R) に加えて

$$(\mathrm{R}')\quad \begin{cases} \lim_{a\to 0} \zeta(a) = 0. & (10.2.61) \\ a \text{ に依存しない定数 } c > 0,\ \varepsilon \in (0,1) \text{ が存在して} \\ |x-y| > 1 \text{ ならば} \\ S_2{}^{\beta,a}(x,y) < c|x-y|^{-\varepsilon} & (10.2.62) \end{cases}$$

が成立するならば，(10.2.60) を得る．

証明 $f \in \mathsf{C}_{\neq}(\mathbf{R}^{4\nu})$ を任意にひとつ固定し，

$$\delta = \min_{i\neq j} \{\delta_{ij} \mid |x_i - x_j| < \delta_{ij} \Longrightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0\}$$

とおけば，任意の i,j $(i\neq j)$ に対して，$|x_i-x_j|<\delta$ ならば $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$ である．したがって，(10.2.58) の右辺の和においては，$|x_i-x_j|\geqslant\delta$ $(i\neq j)$ となる領域だけを考えればよい．また，(10.2.60) は $f\geqslant 0$ の場合を示せば十分である．以下，$|x_i-x_j|\geqslant\delta$ $(i\neq j)$ とし，(10.2.21) の最右辺の第一項を $-U_1$，第二項を $-U_2$ とおき，

$$
\begin{aligned}
&U_1 = U_1^{<}+U_1^{>}\\
&U_1^{<} = \zeta(a)^2 a^{\nu-4}\sum_{\text{comb}}\sum_{\substack{z\in\mathbf{Z}_a{}^\nu\\ z\notin\{x_1,\cdots,x_4\}}}^{<} a^\nu \sum_{\substack{|z'-z|=a\\ |z''-z|=a}}\\
&\qquad\qquad \times S_2{}^{\beta,a}(x_{i_1},z)S_2{}^{\beta,a}(z',x_{j_1})S_2{}^{\beta,a}(x_{i_2},z)S_2{}^{\beta,a}(z'',x_{j_2})\\
&U_1^{>} = \zeta(a)^2 a^{\nu-4}\sum_{\text{comb}}\sum_{\substack{z\in\mathbf{Z}_a{}^\nu\\ z\notin\{x_1,\cdots,x_4\}}}^{>} a^\nu \sum_{\substack{|z'-z|=a\\ |z''-z|=a}}\\
&\qquad\qquad \times(\text{上式と同一の項}).
\end{aligned}
$$

と書く．ただし，$\sum_z^{<}$ は $\mathrm{dist}(z,\{x_1,\cdots,x_4\})\leqslant\delta_1$ となる z についての和，$\sum_z^{>}$ は $\mathrm{dist}(z,\{x_1,\cdots,x_4\})>\delta_1$ となる z についての和を表わす．$\delta_1>0$ は固定した定数で $a\ll\delta_1\ll\delta$ とする．$|x_i-x_j|\geqslant\delta$ だから，$\mathrm{dist}(z,\{x_1,\cdots,x_4\})\leqslant\delta_1$ をみたす z は，$\{z\mid |x_j-z|\leqslant\delta_1\}=B_j(\delta_1)$，$j=1,\cdots,4$，のどれかに含まれている．

$$
\inf_{z\in B_j(\delta_1)}|x_k-z|>0,\qquad k\neq j
$$

であるから，(10.2.54)，(R) の第二，第三の条件と $S_2{}^{\beta,a}(0,x)$ の x に関する単調減少性（補題 10.2.6）によって，

$$
U_1^{<}\leqslant\zeta(a)a^{\nu-4}\,\text{const.}\sum_{j=1}^{4}\sum_{\substack{z\in B_j(\delta_1)\\ z\neq x_j}} a^\nu\frac{1}{|x_j-z|^{\nu-2}}.
$$

ここでの定数 const. は a によらない．

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{z\in B_j(\delta_1)\\ z\neq x_j}} a^\nu\frac{1}{|x_j-z|^{\nu-2}} &= \sum_{\substack{|z|\leqslant\delta_1\\ z\neq 0}} a^\nu|z|^{-(\nu-2)}\\
&\xrightarrow[a\to 0]{} \int_{|z|\leqslant\delta_1} d^\nu z|z|^{-(\nu-2)}<\infty
\end{aligned}
$$

であるから

$$
U_1^{<}\leqslant\text{const.}\ \zeta(a)a^{\nu-4}. \tag{10.2.63}
$$

同様に

$$U_1^{>} \leqslant \text{const. } a^{\nu-4} \sum_{\text{comb}} \sum_{z}{}^{>} a^\nu |z-x_{i_1}|^{2-\nu} |z-x_{i_2}|^{2-\nu}$$

$\nu \geqslant 5$ ならば，

$$\sum_{\substack{|z-x|\geqslant \delta_1 \\ |z-y|\geqslant \delta_1}} a^\nu |z-x|^{2-\nu} |z-y|^{2-\nu} \leqslant \text{const.} < \infty$$

となるから，

$$U_1^{>} \leqslant \text{const. } a^{\nu-4} \tag{10.2.64}$$

(10.2.63) と (10.2.64) によって，ν, δ にのみよる定数 $c_\delta' > 0$ が存在して，

$$U_1 \leqslant c_\delta'(\zeta(a)+1) a^{\nu-4} \qquad (\nu \geqslant 5) \tag{10.2.65}$$

一方，U_2 に対しては，

$$U_2 \leqslant c_\delta' \zeta(a) a^{\nu-2}. \tag{10.2.66}$$

ゆえに，$\nu \geqslant 5$ で，条件 (R) がなりたつとき，

$$U_4^{\beta,a}(x_1, x_2, x_3, x_4) \geqslant -\text{const. } a^{\nu-4}$$

したがって，$f \geqslant 0$ ならば，

$$0 \geqslant U_4^{\beta,a}(f) \geqslant -\text{const. } a^{\nu-4} \sum_{x_j \in \mathbf{Z}_a{}^\nu} a^{4\nu} f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

そこで，$a \to 0$ とすれば，(10.2.60) を得る．

次に $\nu = 4$ の場合を考えよう．この場合，$U_1^{>}$ の評価をやりなおす必要がある．(10.2.54) と (10.2.62) によって，$|x-y| > 1$ のとき，任意の $p \in [0,1]$ に対して

$$0 \leqslant S_2^{\beta,a}(x,y) \leqslant \zeta(a)^{-p} c_\nu{}^p c^{(1-p)} |x-y|^{-2p-\varepsilon(1-p)}$$

がなりたつ．そこで，$(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon) < p < 1/2$ となる p をひとつ固定しよう．このとき

$$\alpha \equiv 2p + \varepsilon(1-p) > 1.$$

したがって，

$$\begin{aligned} U_1^{>} &\leqslant \text{const. } \zeta(a)^{2-4p} \sum_{\text{comb}} \sum_{|z-x_i|\geqslant 1} a^4 (|x_{i_1}-z||x_{i_2}-z||x_{j_1}-z||x_{j_2}-z|)^{-\alpha} \\ &\leqslant \text{const. } \zeta(a)^{2-4p} \end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$U_4^{\beta,a}(x_1, x_2, x_3, x_4) \geqslant -\text{const. } (\zeta(a) + \zeta(a)^{2-4p} + \zeta(a) a^2)$$

$2-4p>0$ であり，(10.2.61) を仮定しているので，$\nu \geqslant 5$ の場合と同様に，(10.2.60) を得る．■

この定理から $(\phi^4)_\nu$ $(\nu \geqslant 4)$ 理論がトリヴィアルであることが結論される．その正確な意味は次の通りである：格子空間 $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ 上の最近接相互作用型 $(\phi^4)_\nu$ モデルに対して，$\nu \geqslant 5$ のときは条件 (R)，$\nu=4$ のときは条件 (R)+(R′) を仮定し，$a_m \downarrow 0$ $(m \to \infty)$ となる適当な列 $\{a_m\}$ があって，連続体極限

$$\lim_{m\to\infty} S_n{}^{\beta, a_m}(x_1, \cdots, x_n) \equiv S_n(x_1, \cdots, x_n), \quad n=1,2,\cdots,$$

が $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^{n\nu})$ の意味で存在したとする．さらに，$\{S_n\}$ は Osterwalder-Schrader の公理系をすべて満足するとする．(10.2.17) と同じ漸化式によって S_n に対応する連結 n 点 Schwinger 関数 U_n を定義する．Osterwalder-Schrader の公理系の結果として，$S_n(x_1, \cdots, x_n)$ は，$x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ となる領域で実解析的であるので，$U_n(x_1, \cdots, x_n)$ もそうである．特に，上の定理 10.2.10 により，すべての $f \in C_{\neq}(\mathbf{R}^{4\nu}) \cap \mathscr{S}(\mathbf{R})^{4\nu}$ に対して

$$\int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 U_4(x_1, x_2, x_3, x_4) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

となる．したがって，$x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ ならば $U_4(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ を得る．これは，超関数として $U_4=0$ を意味する．ゆえに定理 10.2.3 によって，$\{S_n\}$ で定義される $(\phi^4)_\nu$ モデル $(\nu \geqq 4)$ はトリヴィアルである．

注意　$U_4{}^{\beta,a}$ を評価したのとまったく同様にして，$U_{2n}{}^{\beta,a}$ を評価することができ，実際，$\lim_{a\to 0} U_{2n}{}^{\beta,a}=0$ を示すことができる．

条件 (R) および (R′) について：(R) の一番目の条件は，$\sup_a \zeta(a)=+\infty$ の場合を除くということである．(10.2.54) と $S_2{}^{\beta,a}(0,x)$ の $|x_i|$ についての単調性（補題 10.2.6 についての注意参照）によって

$$0 \leqslant S_2{}^{\beta,a}(0,x) - M_{\beta,a}{}^2 \leqslant c_\nu \zeta(a)^{-1} |x|^{2-\nu}$$

であるから，もし，$a_m \downarrow 0$ $(m\to\infty)$，$\lim_{m\to\infty} \zeta(a_m)=+\infty$ ならば，

$$\lim_{m\to\infty} [S_2{}^{\beta,a_m}(0,x) - M_{\beta,a_m}{}^2] = 0$$

したがって，連続体極限が存在すれば，

$$\lim_{m\to\infty} S_2^{\beta,a_m}(0,x)=\lim_{m\to\infty} M_{\beta,a_m}{}^2=\text{const.}\equiv c$$

すなわち，連続体極限の 2 点 Schwinger 関数は定数となり，興味のないものとなる．特に，$M_{\beta,a_m}=0$，$m\geqq 1$，ならば，$c=0$ である．したがって，Newman の不等式によって，$2n$ 点 Schwinger 関数の連続体極限も 0 となり，理論はトリヴィアルになる．

(R) の二番目の条件は，相転移のないモデルを考えていることに対応する．もちろん，$\inf_{a\in(0,1]} M_{\beta,a}>0$ の場合も考えることができるが，この場合のモデルのトリヴィアル性については，まだ結果が出ていないようである．

(R) の三番目の条件は，2 点 Schwinger 関数の連続体極限が存在するためのひとつの必要条件である．

以上の考察によって，$\nu\geqq 5$ のときは，$M_{\beta,a}\equiv 0$ である限り，$(\beta(a),\lambda(a),\rho(a))$ をどのように選んでも，連続体極限は上の意味でトリヴィアルになってしまうことがわかる．

注意 $(\phi^4)_\nu$ モデルは，$\nu\geqq 5$ のときは，摂動論的にはくりこみ不可能なモデルであるが，上の結果は，そうした摂動論的考察とのひとつのくい違いを示すものとしても興味深い．

条件 (R′) の二番目にある (10.2.62) は，以下に述べる意味で自然である．Osterwalder-Schrader の公理系を満足する 2 点 Schwinger 関数 $S_2(x,y)$ に対して，

$$S_2(x,y)=\int_0^\infty d\rho(m^2)S_2{}^{(0)}(x-y\,;m^2) \tag{10.2.67}$$

という表示が成立する．ここで，$S_2{}^{(0)}(x\,;m^2)$ は自由場の 2 点 Schwinger 関数

$$S_2{}^{(0)}(x\,;m^2)=\frac{1}{(2\pi)^\nu}\int d^\nu p\,\frac{e^{ipx}}{p^2+m^2},$$

ρ は，$[0,\infty)$ 上の多項式的に有界な測度である．

この表示は，2 点 Wightman 関数の Umezawa-Kamefuchi-Källen-Lehmann 表示に対応するものである（定理 4.8.1 参照）．変形 Bessel 関数 K_α を用いると［(4.5.6) の導出を参照］，

$$S_2^{(0)}(x\,;m^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\left(\frac{m}{|x|}\right)^{(\nu-2)/2}K_{(\nu-2)/2}(m|x|) \qquad (10.2.68)$$

と表わされるので，その漸近展開の公式を利用することにより，

（i） $m|x|>1$ ならば

$$S_2^{(0)}(x\,;m^2)\leqslant \text{const.}\, m^{(\nu-3)/2}|x|^{-(\nu-1)/2}e^{-m|x|}$$

（ii） $\nu\geqslant 3$ かつ $m|x|\leqslant 1$ ならば

$$S_2^{(0)}(x\,;m^2)\leqslant \text{const.}\,|x|^{-\nu+2}$$

を示すことができる．このふたつの不等式から，$\nu\geqslant 3$ かつ $|x-y|\geqslant 1$ のとき

$$S_2(x,y)\leqslant \text{const.}\,|x-y|^{-(\nu-1)/2} \qquad (10.2.69)$$

という評価を得る．したがって，特に，$\nu\geqslant 3$ ならば，任意の $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$S_2(x,y)\leqslant \text{const.}\,|x-y|^{-\varepsilon} \quad (|x-y|\geqslant 1) \qquad (10.2.70)$$

がなりたつ．これは，$(\phi^4)_\nu$ モデルに限らず，Osterwalder-Schrader の公理系をみたす2点 Schwinger 関数に対して一般にいえることである．したがって，(10.2.62) は，連続体極限で一般に成立すべき不等式 (10.2.69) から得られる，それよりも少し弱い不等式 (10.2.70) を，格子近似に対しても（格子間隔 a に関して一様な形で）要求したものに他ならないことがわかる．

(R′) の一番目の条件 (10.2.61) は，物理の言葉では，‘場の強さのくりこみ定数’ (field strength renormalization constant) $\zeta(a)^{-1}$ が，連続体極限で無限大となるということである．いま，仮に

$$\lim_{a\to 0}\zeta(a)=\zeta>0 \qquad (10.2.71)$$

としてみる．このとき，連続体極限が存在したとして，その n 点 Schwinger 関数を S_n とすれば，特に，(10.2.54) から

$$0\leqslant S_2(x,y)\leqslant\frac{c_\nu}{\zeta|x-y|^2}. \qquad (\nu=4) \qquad (10.2.72)$$

ただし，$M_{\beta,a}\equiv 0$ とした．一方，(10.2.68) によって，m によらない定数 A が存在して

$$|x|^2S_2(x\,;m^2)\to A \qquad (|x|\to 0).$$

よって，(10.2.67), (10.2.72) および Fatou の定理を用いれば

$$Z^{-1} \equiv \int_0^\infty d\rho(m^2) < \infty$$

となる．したがって，$\nu=4$ のとき，Lebesgue の収束定理により

$$S_2(x,y) \sim \frac{A/Z}{|x-y|^2} \qquad (|x-y| \to 0)$$

を得る．これは，2点 Schwinger 関数の短距離における漸近的振舞が自由場のそれと同様であることを示している．さらに，Newman 型の不等式を用いて，一般の $2n$ 点 Schwinger 関数の短距離における漸近的振舞についても同じことが言える．一般に場の量子論において，Schwinger 関数（あるいは Wightman 関数）の短距離における漸近的振舞が自由場のそれと同じであるとき，その理論は**漸近的に自由**（asymptotically free）であるという．こうして，上に述べた意味で自然な条件（R）および（R′）の二番目の条件を認めるとすれば，連続体極限においてトリヴィアルでない $(\phi^4)_4$ 理論は，漸近的に自由でなければならないことが結論される．

注意　Schwinger 関数の短距離における極限は，その Fourier 変換を考えれば，物理的には，高エネルギー極限に対応していることがわかる．Schwinger 関数の高エネルギーでの漸近的振舞を調べる方法のひとつとして**くりこみ群**（renormalization group）の方法があるが［たとえば，Nash (1978) 参照］，その摂動論的計算によれば，$\lambda>0$ である限り，$(\phi^4)_4$ 理論は漸近的には自由ではない．これは，上の結論と矛盾するので，$(\phi^4)_4$ において摂動論がなりたつとすれば，これまで議論してきた意味での格子理論から得られる連続体極限の $(\phi^4)_4$ 理論で (10.2.71) がなりたつ余地はなく，この理論のトリヴィアル性は避けがたいものとなる．

なお，形式的な摂動論の枠組の中ではあるが，漸近的に自由な理論の例として，結合定数 λ が負の $(\phi^4)_4$ 理論，物理的に現実性のある非可換ゲージ場の量子論などが知られている［Nash (1978) 参照］．

D. $(\phi^4)_\nu$ $(\nu=2,3)$ 理論がトリヴィアルでないこと

ランダムウォーク表示を利用すると，比較的簡単に，$\nu=2,3$ の場合の $(\phi^4)_\nu$ モデルの連続体極限の存在とその非トリヴィアル性を証明することがで

きる．詳細は原論文 Brydges, Fröhlich and Sokal (1983) を見よ．Bovier and Felder (1984) も参照.

10.3 統計力学への応用

A. 強磁性的 N-ベクトル モデルの臨界温度の評価

最近接相互作用をもつ，ν 次元の強磁性的 N-ベクトル モデル (5.2 節参照) を考えよう．すなわち，$\mathbf{Z}^\nu$ の有界集合 Λ におけるハミルトニアンを

$$H_\Lambda = -\frac{1}{2}J\sum_{\substack{i,j\in\Lambda\\ |i-j|=1}} \boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_j \qquad (\boldsymbol{S}_i\in\mathbf{R}^N,\ J>0) \tag{10.3.1}$$

とし，各点 i のスピンの単独分布を $d\mu_0(\boldsymbol{S}_i^2)=c_0\delta(\boldsymbol{S}_i^2-1)d\boldsymbol{S}_i$ とする．ここで $c_0>0$ は規格化定数．期待値 $\langle\cdot\rangle_{\Lambda,\beta}$ は，$\beta>0$ として，

$$\langle F\rangle_{\Lambda,\beta} = \frac{\displaystyle\int F e^{-\beta H_\Lambda}\prod_{i\in\Lambda} d\mu_0(\boldsymbol{S}_i^2)}{\displaystyle\int e^{-\beta H_\Lambda}\prod_{i\in\Lambda} d\mu_0(\boldsymbol{S}_i^2)} \tag{10.3.2}$$

であたえられる．第5章で示したように，このモデルに対しては，すべての $\beta>0$ に対して少なくともひとつの無限体積極限が存在する．その任意のひとつを $\langle\cdot\rangle_\beta$ で表わす.

GKS 不等式によって

$$\langle S_i^{(\alpha)}S_j^{(\alpha)}\rangle_\beta \geqslant 0, \qquad i,j\in\mathbf{Z}^\nu,\ \alpha=1,\cdots,N,\ \beta>0 \tag{10.3.3}$$

であり，$\langle S_i^{(\alpha)}S_j^{(\alpha)}\rangle_\beta$ は β について単調増加である．そこで，

$$m(\beta) = -\lim_{|i-j|\to\infty}\frac{1}{|i-j|}\log\langle S_i^{(\alpha)}S_j^{(\alpha)}\rangle_\beta \tag{10.3.4}$$

を定義する．$m(\beta)$ は**相関距離の逆数** (inverse correlation length) とよばれ，統計力学で重要な量のひとつである*)．これは，2点相関関数 $\langle S_i^{(\alpha)}S_j^{(\alpha)}\rangle_\beta$ の長距離 $|i-j|\to\infty$ での振舞のひとつの尺度をあたえる．Schwarz の不等式と $\langle\cdot\rangle_\beta$ の並進不変性によって

$$\langle S_i^{(\alpha)}S_j^{(\alpha)}\rangle_\beta \leqslant \langle (S_0^{(\alpha)})^2\rangle_\beta \leqslant 1$$

*) もっと一般の系に対しても同様に定義される.

であるので，$m(\beta) \geqslant 0$ がわかる．なお，H_Λ も $d\mu_0(S_i^2)$ も $S_i^{(\alpha)}$ と $S_i^{(\alpha')}$ $(\alpha \neq \alpha')$ の入れかえに関して対称的であるので $m(\beta)$ は α に依存しない．$\langle S_i^{(\alpha)} S_j^{(\alpha)} \rangle_\beta$ は β に関して単調増加なので，$m(\beta)$ は単調減少である．

臨界点 (critical point) $\beta_c \geqslant 0$ は

$$\beta_c = \sup\{\beta \mid m(\beta) > 0\} \tag{10.3.5}$$

によって定義される*)．したがって，$\beta \uparrow \beta_c$ のとき，$m(\beta) \downarrow 0$ となる．

注意 臨界点として

$$\tilde{\beta}_c = \sup\{\beta \mid \lim_{|i-j|\to\infty} \langle S_i^{(\alpha)} S_j^{(\alpha)} \rangle_\beta = 0\}$$

を用いることもある．$m(\beta) > 0$ ならば 2 点相関関数の長距離極限は 0 になるので，$\tilde{\beta}_c \geqslant \beta_c$.

次の定理は臨界点の評価をあたえる：

定理 10.3.1 次の不等式がなりたつ．

$$\beta_c \geqslant \frac{N}{2\nu J} \tag{10.3.6}$$

証明 ランダムウォーク表示を使う．いまの場合 $g_i(t) = c_0\delta(t-1)$ で，g_i は関数ではないが，δ 関数を $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ の関数で近似することにより，10.1 節の議論はすべて成立することが確かめられる (問題 10.4)．したがって，(10.1.37) によって

$$\langle S_i^{(\alpha)} S_j^{(\alpha)} \rangle_{\Lambda,\beta} = Z^{-1} \sum_{\omega : i\to j} (J\beta)^{|\omega|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\underline{\omega}_1,\cdots,\underline{\omega}_n} \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{N}{2} \frac{(J\beta)^{|\underline{\omega}_k|}}{|\underline{\omega}_k|}\right] \times \exp[-V_{n+1}(\underline{\omega}_1, \cdots, \underline{\omega}_n, \omega)].$$

ただし，ウォークはすべて最近接とする．

いまの場合，

$$\exp[-V_{n+1}(\underline{\omega}_1, \cdots, \underline{\omega}_n, \omega)] = \prod_{i\in\Lambda} \{2^{-\eta(i,\underline{\omega}_1,\cdots,\underline{\omega}_n)-\eta(i,\omega)+1}(2\pi)^{N/2} c_N \times [(\eta(i, \underline{\omega}_1, \cdots, \underline{\omega}_n) + \eta(i, \omega) - 1)!]^{-1}\}$$

---

*) $\beta_c \equiv \dfrac{1}{k_B T_c}$ (k_B : Boltzmann 定数) として，T_c を**臨界温度**とよぶ．

$$\leqslant \left\{\prod_{i\in\Lambda}\left(2^{-\eta(i,\omega)}\cdot\left[\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{N}{2}+\eta(i,\omega)-1\right)\right]^{-1}\right)\right\}$$

$$\times\exp[-V_n(\underset{\sim}{\omega}_1,\cdots,\underset{\sim}{\omega}_n)]$$

がなりたつ．ここで，c_N は定数で，N が偶数のとき 1，奇数のとき $\sqrt{2/\pi}$ であたえられる［(10.1.28) 参照］．ゆえに

$$\langle S_i{}^{(\alpha)}S_j{}^{(\alpha)}\rangle_{\Lambda,\beta}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\omega:i\to j}\left(\frac{J\beta}{2}\right)^{|\omega|}\prod_{k\in\Lambda}\left[\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{N}{2}+\eta(k,\omega)-1\right)\right]^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m\geqslant|i-j|}\left(\frac{J\beta}{2}\right)^{m}\sum_{\substack{\omega:i\to j\\|\omega|=m}}\prod_{k\in\Lambda}$$

$$\times\left[\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{N}{2}+\eta(k,\omega)-1\right)\right]^{-1}$$

を得る．ここで，ω は最近接ウォークであることを用いた．一方，$|\omega|=m$, $\omega:i\to j$ をみたすウォークの数は $(2\nu)^{m-1}$ を越えない．さらに，$|\omega|=m$, $\omega:i\to j$ を満たす，任意の最近接ウォーク ω に対して

$$\prod_{k\in\Lambda}\left[\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{N}{2}+\eta(k,\omega)-1\right)\right]^{-1}\leq\left(\frac{2}{N}\right)^{m+1}$$

したがって

$$\langle S_i^{(\alpha)}S_j^{(\alpha)}\rangle\leq\frac{1}{2\nu N}\sum_{m\geq|i-j|}\left(\frac{2\nu\beta J}{N}\right)^{m}$$

$$=\frac{1}{2\nu N}\cdot\frac{(2\nu\beta J/N)^{|i-j|}}{1-2\nu\beta J/N}.$$

ただし，$2\nu\beta J/N<1$ とした．この不等式から

$$m(\beta)\geq-\log\frac{2\nu\beta J}{N}>0$$

が得られる．したがって，(10.3.6) を得る．∎

B.　$(\phi^4)_\nu$ モデルの臨界指数の評価

10.2 節の $(\phi^4)_\nu$ モデルを考えよう．ただし，ここでは，$a\equiv1$ と固定する．この系の**帯磁率** (susceptibility) は

$$\chi(\beta)=\sum_{x\in\mathbf{Z}^\nu}\langle\phi(0)\phi(x)\rangle_\beta \tag{10.3.7}$$

で定義される．ここで $\langle\cdot\rangle_\beta$ は無限体積極限の状態を表わす．また，**相関距離の逆数** (inverse correlation length) を (10.3.4) と同様に

$$m(\beta) = -\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{|x|}\ln\langle\phi(0)\phi(x)\rangle_\beta \tag{10.3.8}$$

によって定義する．また，臨界点 β_c は (10.3.5) によって定義する．$\beta<\beta_c$ ならば，$\langle\phi(0)\phi(x)\rangle_\beta$ は，十分大きな $|x|$ に対して指数関数的に減少するので，帯磁率は有限の値をもつ．$\beta\uparrow\beta_c$ のとき，$\chi(\beta)\to\infty$ となることが知られている*)．[Glimm and Jaffe (1981) 参照]．そこで

$$t = \frac{\beta_c-\beta}{\beta_c} \tag{10.3.9}$$

とおくとき，もし，ある $\gamma>0$ があって

$$\chi(\beta) \underset{\beta\uparrow\beta_c}{\sim} t^{-\gamma} \tag{10.3.10}$$

となるならば，γ を**臨界指数** (critical exponent) とよぶ．(10.3.10) の意味は

$$\gamma = -\lim_{\beta\uparrow\beta_c}\frac{\ln\chi(\beta)}{\ln t}$$

である．γ に対する評価として：

定理 10.3.2 $\nu\geqq 5$ ならば

$$\gamma = 1. \tag{10.3.11}$$

証明 Λ を $\mathbf{Z}^\nu$ の有界集合とし，有限系の帯磁率

$$\chi_\Lambda(\beta) = \sum_{x\in\Lambda}\langle\phi(0)\phi(x)\rangle_\Lambda{}^\beta$$

を考える．このとき，$\chi_\Lambda(\beta)$ は β について微分可能であって

$$\frac{d\chi_\Lambda(\beta)}{d\beta} = \sum_{x\in\Lambda}\frac{1}{2}\sum_{\substack{y,z\in\Lambda\\|y-z|=1}}\{\langle\phi(0)\phi(x)\phi(y)\phi(z)\rangle_\Lambda{}^\beta - \langle\phi(0)\phi(x)\rangle_\Lambda{}^\beta\langle\phi(y)\phi(z)\rangle_\Lambda{}^\beta\}.$$

したがって

*) 帯磁率は，もっと一般的な系でも同様に定義され，臨界点で発散することが予想される．

$$\chi_\Lambda(\beta+\varepsilon)-\chi_\Lambda(\beta)=\sum_{x\in\Lambda}\frac{1}{2}\sum_{\substack{y,z\in\Lambda\\|y-z|=1}}\int_\beta^{\beta+\varepsilon}\{\langle\phi(0)\phi(x)\phi(y)\phi(z)\rangle_\Lambda{}^{\beta'}$$
$$-\langle\phi(0)\phi(x)\rangle_\Lambda{}^{\beta'}\langle\phi(y)\phi(z)\rangle_\Lambda{}^{\beta'}\}d\beta'.$$

$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_\Lambda{}^\beta$ は β と Λ について単調増大であるので，優級数定理により，$\beta<\beta_c$ のとき，$\chi(\beta)$ は微分可能で

$$\frac{d\chi(\beta)}{d\beta}=\sum_{x\in\mathbf{Z}^\nu}\frac{1}{2}\sum_{\substack{y,z\in\mathbf{Z}^\nu\\|y-z|=1}}\{\langle\phi(0)\phi(x)\phi(y)\phi(z)\rangle_\beta$$
$$-\langle\phi(0)\phi(x)\rangle_\beta\langle\phi(y)\phi(z)\rangle_\beta\}$$
$$=\sum_{x\in\mathbf{Z}^\nu}\sum_{\substack{y,z\in\mathbf{Z}^\nu\\|y-z|=1}}\left\{\langle\phi(0)\phi(y)\rangle\langle\phi(x)\phi(z)\rangle\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}U_4{}^\beta(0,x,y,z)\right\} \qquad (10.3.12)$$

となる．Lebowitz の不等式によって，$U_4{}^\beta\leqslant 0$ であるから

$$\frac{d\chi(\beta)}{d\beta}\leqslant 2\nu\chi(\beta)^2$$

を得る．ここで，$\langle\cdot\rangle$ の並進不変性を用いた．したがって (10.3.10) がなりたつとすれば，$\gamma\geqslant 1$ でなければならない．

逆の不等式 $\gamma\leqslant 1$ を導くのにランダムウォーク表示を使って，(10.3.12) から，$d\chi(\beta)/d\beta$ についての下界を得るわけである．その結果は，ある定数 $c>0$ が存在して

$$c\chi(\beta)^2\leqslant\frac{d\chi(\beta)}{d\beta}. \qquad (10.3.13)$$

ゆえに，$\gamma\leqslant 1$ がしたがう．評価 (10.3.13) の証明については，Aizenman (1982), Aizenman and Graham (1983) を参照．また，Aragão de Carvalho 他も参照．∎

注意　(1)　上の証明から明らかなように，$\gamma\geqslant 1$ は任意の $\nu\geqslant 1$ に対してなりたつ．(10.3.13) の証明に $\nu\geqslant 5$ がきく．

(2)　$\nu<4$ では $\gamma>1$, $\nu=4$ では

$$\chi(\beta)\sim t^{-1}|\log t|^\alpha$$

という予想がある．ここで，α はある定数で，くりこみ群の議論では $\alpha=1/3$ と予想されている．Aizenman and Graham (1983) は $\nu=4$ のとき

$$\frac{1}{2\nu}t^{-1}\leqslant\beta_c\chi(\beta)\leqslant ct^{-1}(|\log t|+1)$$

という評価を得ている．ここで $c>0$ は定数．

（3） $\gamma=1$ は，単独スピンが Gauss 型の場合（これを分子場近似とか平均場近似 (mean field approximation) ともよぶ）の臨界指数である（問題 10.5）

（4） 定理 10.3.2 は Ising モデルに対してもなりたつ．

●演習問題

10.1 命題 10.1.2 のすぐあとの注意の主張を確かめよ．

10.2 命題 10.1.2 の $\varLambda$ と J を2行2列の行列として，ランダムウォーク表示を書き下してみよ．

10.3 $(-\varDelta+m^2)_{ij}{}^{-1}$ のランダムウォーク表示 (10.1.9) を導け．

10.4 10.1 節のランダムウォーク表示の理論が $g_i(t)=\delta(t-1)$ の場合にも成立することを証明せよ．

10.5 単独分布が Gauss 型

$$d\mu_0[\phi(x)]=\exp\left[-\frac{\lambda}{2}\phi(x)^2\right]d\phi(x)$$

でハミルトニアンが (10.2.1) であたえられる系の帯磁率を陽に計算し，その臨界指数は1であることを証明せよ．

●文献

Aizenman, M. and B. Simon (1980), Local Ward identities and the decay of correlations in ferromagnets, Commun. Math. Phys. **77,** 137–143.

Aizenman, M. (1981), Proof of the triviality of ϕ^4 field theory and some mean-field features of Ising models for $d>4$, Phys. Rev. Lett. **47,** 1–4, 886 (E).

Aizenman, M. (1982), Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models, Parts I and II, Commun. Math. Phys. **86,** 1–48.

Aizenman, M. and R. Graham (1983), On the renormalized coupling constant

and the susceptibility in ϕ_4^4 field theory and the Ising model in four dimensions, Nucl. Phys. **B 225** [FS 9], 261–288.

Aragão de Carvalho, C., S. Caracciolo and J. Fröhlich (1983), Polymers and $g|\phi|^4$ theory in four dimensions, Nucl. Phys. **B 215** [FS 7], 209–248.

Bovier, A. and G. Felder (1984), Skeleton inequalities and the asymptotic nature of perturbation theory for ϕ^4–theories in two and three dimensions, Commun. Math. Phys. **93,** 259–275.

Brydges, D. C., J. Fröhlich and T. Spencer (1982), The random walk representation of classical spin systems and correlation inequalities, Commun. Math. Phys. **83,** 123–150.

Brydges, D. C., J. Fröhlich and A. D. Sokal (1983), A new proof of the existence and nontriviality of the continuum ϕ_2^4 and the ϕ_3^4 quantum field theories, Commun. Math. Phys. **91,** 141–186.

Brydges, D. C., J. Fröhlich and A. D. Sokal (1983), The random walk representation of classical spin systems and correlation inequalities II. The skeleton inequalities, Commun. Math. Phys. **91,** 117–139.

Fröhlich, J. (1982), On the triviality of $\lambda\phi_d^4$ theories and the approach to the critical point in $d \geqslant 4$ dimensions, Nucl. Phys. **B 200** [FS4], 281–296.

Glimm, J. and A. Jaffe (1981), *Quantum Physics*, Springer, New York.

Hegerfeldt, G. C. (1977), Correlation inequalities for Ising ferromagnets with symmetries, Commun. Math. Phys. **57,** 259–266.

Jost, R. ed., (1969), *Local Quantum Theory,* 1968 *Varenna Lectures,* Academic Press, New York.

Messager, A. and S. Miracle-Sole (1977), Correlation functions and boundary conditions in the Ising ferromagnet, J. Stat. Phys. **17,** 245–262.

Nash, C. (1978), *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press, New York.

Newman, C. M. (1975), Inequalities for Ising models and field theories which obey the Lee-Young theorem, Commun. Math. Phys. **41,** 1–9.

Schrader, R. (1977), New correlation inequalities for the Ising model and $P(\phi)$ theories, Phys. Rev. **B 15,** 2798–2803.

Simon, B, Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets, Commun. Math. Phys. **77,** 111–126.

Sokal, A. D. (1982), An alternate constructive approach to the ϕ_3^4 quantum field theory, and a possible destructive approach to ϕ_4^4, Ann. Inst. Henri

Poincaré **A 37,** 317–398.

Symanzik, K. (1969), Euclidean quantum field theory *in* Jost (1969).

Szasz, D. (1978), Correlation inequalities for non-purely-ferromagnetic systems, J. Stat. Phys. **19,** 453–459.

第11章

$(\phi^4)_4$ 理論をめぐって

$(\phi^4)_4$ 理論のトリヴィアル性は，すでに早くから予想されていたが［Pomeranchuk 他 (1956), Wilson and Kogut (1974), Baker and Kincaid (1979, 1981)］，そこでの取り扱いは，形式的摂動論にもとづくもので，数学的に厳密なものではなかった．前章で展開した理論は，非摂動的な方法による，数学的に厳密な取り扱いであり，それまでの形式的な議論にひとつの数学的基礎をあたえるものである．しかし，これで，トリヴィアルでない $(\phi^4)_4$ 理論が存在しないと結論できるわけではない．前章で述べた方法は，あくまでも，$(\phi^4)_4$ 理論を構成するためのひとつの方法であると見なされるべきだからである．実際，この他にも，トリヴィアルでない $(\phi^4)_4$ 理論の構成へ向けていくつかの試みがある．以下，それらを簡単に紹介する．なお，前章の方法に関連した発展については Aizenman and Graham (1983), Aragão 他 (1983), Fröhlich (1984), Kondo (1985) 等を参照.

11.1 正則化の仕方を変える方法

前章での $(\phi^4)_4$ 理論の構成は，強磁性的最近接相互作用，すなわち $\beta>0$ で，$\phi(x)\phi(y)$ 型の相互作用が $|x-y|=a$ となる場合に限られるような格子モデルから出発するものであった．そこで，この‘近似’の仕方を変えることによって，トリヴィアルではない連続体極限が得られないであろうかということが考えられる．Gallavotti and Rivasseau (1984) は，この考えに沿って，相互作用が最近接型ではない反強磁性的 ($\beta<0$) 格子モデルから出発する構成の方法を提出している．詳細は，原論文を参照.

11.2 摂動論による方法

連続体極限の Schwinger 関数 $\{S^{(n)}\}$ は，形式的には

$$S^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\int \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) e^{-\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\phi(x)(-\Delta+m^2)\phi(x)+\frac{\lambda}{4}\phi(x)^4\right\}}\mathcal{D}\phi}{\int e^{-\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\phi(x)(-\Delta+m^2)\phi(x)+\frac{\lambda}{4}\phi(x)^4\right\}}\mathcal{D}\phi} \tag{11.2.1}$$

であたえられる．ここで，$m>0$ は質量パラメーター，$\lambda>0$ は結合定数であり，$\mathcal{D}\phi$ は形式的な‘測度’

$$\mathcal{D}\phi = \prod_{x\in\mathbf{R}^4} d\phi(x)$$

である．(11.2.1) の中の $\exp[-\lambda\phi(x)^4/4]$ を λ について巾級数に展開して，(11.2.1) の右辺を λ の巾について形式的にまとめれば

$$S^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)^k S_k^{(n)}(x_1, \cdots, x_n)$$

という形に書ける．$(-\lambda)^k$ の係数 $S_k^{(n)}$ は自由場の 2 点 Schwinger 関数の積のある種の積分からなる量で，一般には発散を含むが，いわゆる‘くりこみ理論’により，有限量 $S_{k,\mathrm{reg}}^{(n)}$ を得ることができる (Bogoliubov and Shirkov (1980)，中西 (1975)，Itzykson and Zuber (1980) 等参照)．そこで改めて，形式的巾級数——**くりこまれた摂動級数**——

$$S_{\mathrm{reg}}^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)^k S_{k,\mathrm{reg}}^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) \tag{11.2.2}$$

を考える．摂動論によって連続体極限の理論を構成する方法の基本的考えは，(11.2.2) の右辺に数学的に厳密な意味づけをし，それによって，Schwinger 関数 $\{S_{\mathrm{reg}}^{(n)}\}$ を定義しようというものである．しかし，2 次元，3 次元時空のモデルの場合と同様 [Jaffe (1965), Calan and Rivasseau (1982)], (11.2.2) の右辺の級数の収束半径は 0 であると予想される*)．そこで，通常用いられる

*) 4 次元の場合，完全な証明は，これまでのところ，ないようである．

のが，いわゆる **Borel 総和法**である．任意の形式的巾級数 $\sum a_n z^n$ があたえられたとき，これが，**Borel 総和可能**であるとは，次の (a)～(c) の条件がなりたつことである：

（a）$B(t)=\sum a_n t^n/n!$ は複素平面上のある円内 $|t|<\delta$ で収束する；

（b）$B(t)$ は正の実軸の近傍に解析接続をもつ；

（c）$g(z)=(1/z)\int_0^\infty dte^{-t/z}B(z)$ はある $z\neq 0$ に対して収束する（必ずしも絶対収束である必要はない）．

$B(t)$ は形式的巾級数 $\sum a_n z^n$ の **Borel 変換**，$g(z)$ はその **Borel 和**とよばれる．2次元，3次元のモデルに対しては，(11.2.2) の右辺の巾級数は Borel 総和可能であることが示されているが [Eckmann 他 (1975)，Magnen and Sénéor (1977)．ただし，これらの文献は，純粋に摂動論だけにもとづくものではなく，非摂動的な構成法で得られた結果（第9章参照）を援用している．純粋に摂動論の方法による結果については，Rivasseau and Speer (1980) 参照]，4次元の場合には，少し制限された意味での Borel 変換の存在（'局所的存在'）が示されているにすぎないようである [Calan and Rivasseau (1981)]．(11.2.2) の級数の係数 $S_{k,\mathrm{reg}}{}^{(n)}$ は，いわゆる Feynman グラフを用いてある意味で系統的に計算されるのであるが，綿密にそれらを評価することは，たいへんむずかしい．

最近，Rivasseau (1984) は，$S_{k,\mathrm{reg}}{}^{(n)}$ に対応する Feynman グラフをある特殊な型のグラフ（'プラナー' グラフ）に制限して得られる級数を考え，これが $\lambda<0$ ($|\lambda|$：十分小) に対して Borel 総和可能であることを示した．Borel 総和法に関する数学的理論については Watson (1912), Hardy (1949), Sokal (1980) 等を参照.

11.3　Fokker-Planck ハミルトニアンによる方法

この方法は，Greensite-Halpern (1984) によって唱えられ，$\lambda<0$ の $\lambda(\phi^4)_\nu$ 理論のように，下に有界でない作用をもつ場の量子論の構成のひとつの方法を暗示するものである．$\lambda(\phi^4)_\nu$ $(\lambda<0)$ 理論は，もし存在すれば，漸近的に自由な理論であるべきことが知られている [Symanzik (1973)]．

まず，$\lambda>0$ としよう．$\lambda(\phi^4)_\nu$ 理論の作用量は

$$S(\phi)=\int d^\nu x\left[\frac{1}{2}\phi(x)(-\Delta+m^2)\phi(x)+\frac{\lambda}{4}\phi(x)^4\right]$$

であたえられ，下に有界であり，n 点 Schwinger 関数は形式的に

$$S^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\langle\Omega,\ \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\Omega\rangle \tag{11.3.1}$$

と書ける．ただし，

$$\Omega(\phi)=\frac{e^{-S(\phi)/2}}{\left(\int e^{-S(\phi)}\mathscr{D}\phi\right)^{1/2}},\qquad \left(\mathscr{D}\phi=\prod_{x\in\mathbf{R}^\nu}d\phi(x)\right),$$

であり，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は形式的 Hilbert 空間 '$\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{\mathbf{R}^\nu},\mathscr{D}\phi)$' $\equiv\mathsf{H}$ における '内積' を表わす．容易にわかるように，Ω は方程式

$$H_{\mathrm{FP}}\Omega=0 \tag{11.3.2}$$

を満足する．ただし，

$$H_{\mathrm{FP}}=\int d^\nu x\left[-\frac{\delta^2}{\delta\phi(x)^2}-\frac{1}{2}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\right)^2\right] \tag{11.3.3}$$

である．汎関数微分 $\delta/\delta\phi(x)$ は形式的に

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}F(\phi)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{F(\phi+\varepsilon\delta^{(\nu)}(x-\cdot))-F(\phi)}{\varepsilon}$$

で定義される．$\delta^{(\nu)}(x-y)$ は ν 次元のデルタ関数である（$\phi\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^\nu)$ で F が $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^\nu)$ 上の汎関数であれば，上の $\delta/\delta\phi(x)$ の定義は Gateaux 微分として数学的に意味をもつ）．作用素 H_{FP} は **Fokker-Planck ハミルトニアン**とよばれ，Parisi-Wu (1981) による**確率量子化** (stochastic quantization) に付随して現われる．今の場合，

$$\frac{\delta S(\phi)}{\delta\phi(x)}=(-\Delta+m^2)\phi(x)+\lambda\phi(x)^3$$

$$\frac{\delta^2 S(\phi)}{\delta\phi(x)^2}=\frac{1}{(2\pi)^\nu}\int(p^2+m^2)d^\nu p+3\lambda\delta^\nu(0)\phi(x)^2$$

となり，(11.3.3) の右辺は意味をなさないが，基本的な考えを述べるために，ここでは形式的に進むことにする．

$$D(x)=\frac{\delta}{\delta\phi(x)}+\frac{1}{2}\frac{\delta S(\phi)}{\delta\phi(x)}$$

とおけば,

$$H_{\mathrm{FP}}=\int D(x)^*D(x)d^\nu x$$

と書けるので，$H_{\mathrm{FP}}\geqslant 0$ である．ここで，$D^*(x)$ は H における $D(x)$ の形式的共役作用素である．これと (11.3.2) により，Ω は H_{FP} の基底状態であることがわかる．

さて，$\lambda<0$ としよう．このとき，$S(\phi)$ は下に有界ではなくなるので Ω は形式的に H の元ではないとみなされる．したがって，Ω は H で作用する作用素としての H_{FP} の基底状態ではない．しかし，$\lambda<0$ の場合でも $H_{\mathrm{FP}}\geqslant 0$ であることには変わりがないので

$$H_{\mathrm{FP}}\tilde{\Omega}=E_0\tilde{\Omega},\qquad E_0>0$$

となる基底状態 $\tilde{\Omega}$ が存在すると考えられる．ここで E_0 は H_{FP} のスペクトルの下限である．そこで，$\lambda>0$ のときの (11.3.1) との対応を考えて，$\lambda<0$ のときの理論の Schwinger 関数を

$$\tilde{S}^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\equiv\langle\tilde{\Omega},\ \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\tilde{\Omega}\rangle$$

によって定義し，これでもって，$\lambda<0$ の $(\phi^4)_\nu$ 理論を構成しようというわけである．

容易に気づくように，上に述べた議論は数学的に見ると問題が多い，第1に，H_{FP} は厳密に定義された Hilbert 空間上の作用素として意味をもつか，自己共役であるかという問題がある．これに対しては，$\lambda>0$ で $\nu=1,2$ の場合に部分的な肯定的解答があたえられている [Arai (1984)]．本当は，$\lambda<0$ の場合の方が興味があるのであるが，この場合については，$(\phi^4)_\nu$ 理論の構成という観点からは，まだ結果が出ていないようである．

この方法による $\lambda(\phi^4)_\nu$ $(\lambda<0)$ 理論の数学的に厳密な構成の仕方のひとつは次のようなものである：

(1)　格子空間 $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の有界領域 Λ での $S(\phi)$ の近似 $S_{a,\Lambda}$ をつくる（この際，ラプラシアン Δ の近似の仕方に任意性がある）．

(2)　$S_{a,\Lambda}$ に対応する Fokker-Planck ハミルトニアン $H_{\mathrm{FP}}(a,\Lambda)$ を考え，

$\mathsf{H}_{a,\Lambda} \equiv \mathsf{L}^2(\mathbf{R}^{|\Lambda|}, \prod_{x\in\Lambda} d\phi(x))$ での作用素としての自己共役性および基底状態 $\Omega(a, \Lambda)$ の（一意的）存在を示す.

（3） 格子近似での n 点 Schwinger 関数

$$S_{a,\Lambda}^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \langle \Omega(a, \Lambda),\ \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\Omega(a, \Lambda)\rangle_{\mathsf{H}_{a,\Lambda}}$$

を考え，$\Lambda \nearrow \mathbf{Z}_a^\nu$，$a\downarrow 0$（あるいは，$a\downarrow 0$，$\Lambda \nearrow \mathbf{R}^\nu$）における極限 $S^{(n)}(x_1, \cdots, x_n)$ の存在を示す.

（4） $\{S^{(n)}\}$ が Osterwalder-Schrader の公理系を満足するかどうか調べる.

これができたとして，さらに続く問題として次のようなものが考えられる：

（5） $\{S^{(n)}\}$ は，$\lambda < 0$ の $(\phi^4)_\nu$ 理論を特徴づける方程式をみたすか.

（6） 摂動論との関係はどうか.

（7） 古典的極限，すなわち Planck 定数 $\hbar \to 0$ の極限はどうなるか（上の議論は $\hbar = 1$，c（光速）$= 1$ とした単位系によっているが，必要とあれば，次元解析によりいつでも $\hbar, c$ を回復できる）.

具体的に Fokker-Planck ハミルトニアンを書き下してみればわかるように，Δ の格子近似を最近接型にしても，Fokker-Planck ハミルトニアンには，最近接格子点以外での格子場どうしの相互作用項が現われ問題の解析を少し複雑にする（たとえば，$S_{a,\Lambda}^{(n)}$ の鏡映正値性は自明ではなくなる）．問題 (5)～(7) は，(1)～(4) によって構成される理論を特徴づけるものとして重要であるが，ここでは，(6) について少し注意しておくことにする．実は，くりこまれた形式的摂動級数 (11.2.2)（$\lambda < 0$ の場合）が，(3) によって得られる $S^{(n)}$ の漸近展開であるかどうかは，微妙な問題であり，最も単純な‘$\nu = 0$’のモデルの場合でさえ自明ではない*)．これと関連して，次の事実がある：一般的な数学的構造として，Fokker-Planck ハミルトニアンには，‘超対称的’構造 (supersymmetric structure) が付随しているが [Gozzi (1983), Damgaard and Tsokos (1985), Arai (1984)]，‘超対称的’なハミルトニアンについての摂動論というのは，非常に特異なものになり得るということが一般的に示される [Arai (1985)]．なお，いま‘超対称的’という言葉を定義なしに用いたが，

*) これについては最近，肯定的な報告 Blanchard 他 (1985) が出たが，証明はまだ公表されていない.

超対称的場の量子論というのは，近年盛んに研究されている分野のひとつであり，物理的にも数学的にも興味深い側面をもっている．詳しくは，Wess and Bagger(1983)，Gates 他 (1983) を参照*)．

11.4 解析接続による方法

この方法は，Gawedzki and Kupiainen (1985) によって唱えられ，結合定数 λ が負の $\lambda(\phi^4)_4$ 理論のひとつの構成をあたえるものである．その基本的な考え方は：

（1） 有限体積の格子空間上で結合定数 λ が正の $(\phi^4)_4$ モデルをつくる；

（2） (1) で得られたモデルを λ について，$\lambda>0$ の領域から $\lambda<0$ の領域に解析接続する；

（3） (2) でできた理論において，無限体積極限および連続体極限（あるいはスケール極限）をとり，これを $\lambda<0$ の $\lambda(\phi^4)_4$ モデルと定義する；

（4） (3) で得られたモデルの性質を調べる．たとえば，Osterwalder-Schrader の公理系はみたされるか，形式的摂動論との関係はどうか，等々．

もう少し具体的に述べると次のようになる．$\mathbf{Z}^4$ を格子間隔が1の4次元格子空間，Λ を $\mathbf{Z}^4$ の有界領域とし，

$$S_\Lambda(\phi)=\frac{1}{2}z\langle\phi,G^{-1}\phi\rangle_\Lambda+\frac{1}{2}zr\langle\phi,\phi\rangle_\Lambda+\frac{1}{4!}z^2\lambda\langle\phi^2,\phi^2\rangle_\Lambda$$

を考える．ただし，ϕ は $\mathbf{Z}^4$ 上の実数値関数で，$\mathbf{Z}^4$ の実数値関数 f,g に対して，$\langle f,g\rangle_\Lambda$ は

$$\langle f,g\rangle_\Lambda=\sum_{x\in\Lambda}f(x)g(x)$$

で定義される．また，z,r は実数値パラメータ，$\lambda>0$ で，G は Λ 上の‘和分核’で，演算子として $G^{-1}\geqslant 0$ となるようなものとする（普通は第8章で論じたように G^{-1} は，Λ 上の適当な境界条件付きのラプラシアン $-\Delta$ である）．$S_\Lambda(\phi)$ を用いて，Λ 上の $\lambda(\phi^4)_4$ モデルの Schwinger 関数は——第8章にお

*) しかし，数学的に厳密な基礎づけはほとんどできていない．

けるのと同様に――

$$S_{n,\Lambda}(x_1, \cdots, x_n; z, r, \lambda) = \frac{\displaystyle\int \prod_{i=1}^{n} \phi(x_i) e^{-S_\Lambda(\phi)} \mathcal{D}\phi}{\displaystyle\int e^{-S_\Lambda(\phi)} \mathcal{D}\phi} \tag{11.4.1}$$

によって定義される．ここで

$$\mathcal{D}\phi = \prod_{x \in \Lambda} d\phi(x)$$

とした．(11.4.1) の右辺の分子を N, 分母を D とし，λ を複素数の範囲に拡げて考えれば，N と D はともに $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ で解析的であることは明らかである，$\alpha > 0$ に対して

$$\mathbf{C}_\alpha = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha, \text{ または } \pi \leqslant \arg z \leqslant \pi + \alpha\}$$

とおき，$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ とする，このとき，$\alpha_0 > 0$ が存在して $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha_0$ ならば，$\mathrm{Re}(\lambda \exp[4i\theta]) > 0$ であり，$\exp[-S_\Lambda(\phi)]$ は $|\Lambda|$ 変数の多変数関数として $\mathbf{C}_{\alpha_0} \times \cdots \times \mathbf{C}_{\alpha_0}$ ($|\Lambda|$ 個の直積) 上で解析的であり，無限遠で急減少する．したがって，N や D を定義している積分の積分路を各変数 $\phi(x)$ ($x \in \Lambda$) について，$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha_0}\phi(x)$ と回転しても積分値は不変である．ゆえに，

$$N \equiv N(z, r, \lambda) = e^{i\alpha_0|\Lambda|} N(e^{2i\alpha_0} z, r, \lambda) \tag{11.4.2}$$

$$D \equiv D(z, r, \lambda) = e^{i\alpha_0(n+|\Lambda|)} D(e^{2i\alpha_0} z, r, \lambda) \tag{11.4.3}$$

という関係式を得る．(11.4.2), (11.4.3) の右辺は，$\mathrm{Re}(\lambda \exp[4i\alpha_0]) > 0$ ならば定義されるので，この領域の λ に対しては，(11.4.2), (11.4.3) の右辺によって，それぞれ $N(z, r, \lambda)$, $D(z, r, \lambda)$ を定義することができる．こうして，N, D は領域

$$\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(\lambda \exp[4i\alpha_0]) > 0\}$$

に解析接続された．以下，同様に，(11.4.2), (11.4.3) を使って任意の $\alpha > 0$ に対して，領域

$$\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(\lambda \exp[4i\alpha]) > 0\}$$

に N, D を解析接続することができる．特に，

$$\pi/8 < \alpha < \pi/4$$

ならば，負軸の近傍に解析接続でき，解析接続された Schwinger 関数を $S_{n,\Lambda}{}^{\mathrm{a.c.}}(x_1, \cdots, x_n; z, r, \lambda)$ とすれば，

$$S_{n,A}{}^{\mathrm{a.c.}}(x_1,\cdots,x_n\,;z,r,\lambda)=e^{in\alpha}S_{n,A}(x_1,\cdots,x_n\,;e^{2i\alpha}z,r,\lambda)$$

となる．このようにして，格子空間の有限領域において $\lambda<0$ の場合の $\lambda(\phi^4)_4$ 理論が構成される．次に上記プログラムの (3) に取りかかるわけであるが，これには，くりこみ群の方法 [Wilson and Kogut (1974)] が使われる．(4) については，くりこまれた摂動級数 (11.2.2)（ただし，$\lambda<0$）が (3) で得られた Schwinger 関数に漸近的であること，また理論は，予想されたように [Symanzik (1973)]，漸近的に自由であること等が示される．この方法のひとつの難点は鏡映正値性が見にくいことで，それは，上に具体的に記述した，格子空間の有限領域の理論ですでに現われている．$N(e^{2i\alpha}z,r,\lambda)$，$D(e^{2i\alpha}z,r,\lambda)$ をあたえる積分の被積分関数が複素数値になるからである．もちろん，無限体積極限およびスケール極限をとることによって鏡映正値性が成立することも考えられる．いずれにせよ，この問題はまだ答えられていない．詳細は原論文を参照.

11.5　その他

Klauder (1979, 1981) は，物理的にトリヴィアルでないスカラー場の量子論を得るために，スケール変換に対して共変的な測度を導入し，これにもとづいて，モデルを構成しようとした．この理論の基本的な特徴のひとつは，初めから，従来の意味での摂動論が成立することを放棄し，結合定数 $\lambda\to 0$ のとき，'不連続性' を許すことである．しかし，この理論の数学的に厳密な基礎はまだできていないようである．その後の発展については，Ebbutt and Rivers (1982 a-e), Rivers (1983) を参照.

$(\phi^4)_4$ 理論は，現実的なモデルではないので，それがトリヴィアルであったとしても，物理として困るということはない．そこで，では現実的なモデルはどうであろうか，という疑問が当然わいてくる．量子電磁力学 (QED) は電子と光（電磁波）との相互作用を 'ある意味で' よく記述する理論であるが，すでに第2章で述べたとおり，この理論についても早くから，そのトリヴィアル性が予想されていた [Landau (1965), Pomeranchuk (1956), Källen (1972)]．この予想は，第10章で記述した $(\phi^4)_\nu$ $(\nu\geqslant 4)$ 理論のトリヴィアル性について

の結果と同程度の厳密さでは証明されていない．これを解明することは，このQED を含み，現在最も現実的な統一場の理論のひとつと考えられている**ゲージ場の量子論**（quantum theory of gauge fields）の数学的構成とともに，次の段階における重要な問題となるにちがいない．なお，ゲージ場の量子論の物理的議論については，たとえば，Itzykson and Zuber (1980) の 12 章，数学的に厳密な理論の試みについては，Seiler (1982) およびそこに引用されている文献を参照．

11.6 トリヴィアルにならないモデル

Baker and Johnson (1985) は，4 次元時空における 'ϕ^4 モデル' の次のような構成法を提案し，1987 年には数値計算にもとづき non-trivial なモデルが得られると述べた．

これも Euclid 空間の格子近似から出発し，第 8 章の (8.1.1) に相当する測度を考えるのであるが，はじめから $P(X)=X^4$ にはしないで，まず一般的に $P(X)=\sum_{j=1}^{p} c_j X^{2j}$ ($p\geqslant 3$, $c_p>0$) として出発し，格子間隔 $a\downarrow 0$ の極限で $\phi(x)^6, \cdots, \phi(x)^{2p}$ のくりこまれた係数が 0 となるようにして $(\phi^4)_4$ 理論を得ようとする．このように高次の相互作用項が消え失せるので，このモデルは phantom field model とよばれる．それでも '幻' の影響は残って連続体極限でも理論を non-trivial にすると期待するわけである．

Baker (1986) は，この方法で構成される Euclid 的 $(\phi^4)_4$ モデルが，Nelson (1973) の公理を——4 次元 Euclid 回転不変性を除いて——すべてみたすことを示した．もし回転不変性が証明されれば，これから Minkowski 時空にもどって Wightman の公理をみたすモデルが得られることになる．

さらに，Baker and Johnson (1987) は，$P(X)=a_2X^4+a_3X^6$ とし，$\sigma_i=$ const. $\phi(x_i)$ を変数にとって (8.1.1) を

$$d\mu_A(\sigma)=M\exp\{K\sum_i\sum_{\{\delta\}}\sigma_i\sigma_{i+\delta}-\sum_i[A\sigma_i^2+g_0\sigma_i^4+\lambda_0\sigma_i^6]\}\prod_i d\sigma_i$$

と書き，これに関する $\{\sigma_i\}$ のモーメント $\langle\sigma_i\sigma_j\cdots\sigma_l\rangle$ を K について展開する形（高温展開）で数値計算した．ここに，i は 4 次元の単純立方格子あるいは

体心立方格子の有限部分 Λ にわたり，$\boldsymbol{\delta}$ は各 $\boldsymbol{i}$ の最近接格子点の半分にわたる．彼らは，数値計算の結果に Padé 近似法を適用することによって，

$$\xi^2 = \sum_i \boldsymbol{i}^2 \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle / [8 \cdot \sum_i \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle]$$

で定義される相関距離 ξ が無限大（それを単位にとれば格子間隔 → 0）となる臨界点 K_c 付近で，$\{\sigma_i\}$ のモーメントの振舞を調べ，このモデルは連続体極限でも non-trivial であろうと推測した．本当にそうなら，4 次元 Euclid 時空においてであるにせよ，探し求めていたモデル構成の方法が発見されたことになり，画期的な成果といわなければならない．しかし，数値計算では極限そのものには到達できないという問題を別としても，なお検討すべき点を多く含んでいるように思われる．これを ϕ^4 理論とよぶ意味を明らかにすることもそのひとつで（くりこまれた場に対して運動方程式が書けるか，など），この節のはじめに 'ϕ^4 モデル' と引用符つきで書いたのは，そのためである．

Minkowski の 4 次元時空で，Wightman の公理をすべてみたし，かつ non-trivial という，上のモデルより一歩進んだものが構成できたことを Albeverio and Høgh-Krohn (1987) が報告している．これは，ある種の非線形な電磁場の相互作用のモデルで，4 元数を用いて定式化した 1 階の確率微分方程式で特徴づけられる．そして，ハミルトニアンのスペクトルは $[0, \infty)$ で質量間隙はなく，場は漸近的に自由である．しかし，このモデルは，これまで物理で研究されてきたものとは異なり，やや人工的に見える．

本書の初校のあと，すぐれた綜合報告が現われた [Hattori (1987)]．

●文献

Aizenman, M. and R. Graham (1983), On the renormalized coupling constant and the susceptibility in $\phi_4{}^4$ field theory and the Ising model in four dimensions, Nucl. Phys. **B 225,** 261–288.

Albeverio, S. and R. Hoegh-Krohn (1987), Local relativistic quantum fields in four space-time dimensions with nonlinear electromagnetic interaction, BiBos preprint Nr. 264/87, Universität Bielefeld.

Aragão de Carvalho, C., S. Caracciolo and J. Fröhlich (1983), Polymers and $g|\phi|^4$ theory in four dimensions, Nucl. Phys. **B 215** (FS 7), 209–248.

Arai, A. (1984), On mathematical construction of supersymmetric quantum field theory associated with Parisi-Wu stochastic quantization, Preprint, MPI-PAE/Pth 60/84, Max Planck Inst. (München).

Arai, A. (1985), Supersymmetry and singular perturbations, J. Funct. Anal. **60**, 373–393.

Baker Jr. G. A. and J. M. Kincaid (1979), Continuous-spin Ising model and $\lambda :\phi^4:_d$ field theory, Phys. Rev. Lett. **42**, 1431–1434.

Baker Jr. G. A. and J. M. Kincaid (1981), The continuous-spin Ising model, $g_0 :\phi^4:_d$ field theory, and the renormalization group, J. Stat. Phys. **24**, 469–528.

Baker Jr., G. A. and J. D. Johnson (1985), Four-dimensional boson field theory, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, L261–L266.

Baker Jr., G. A. (1986), Four-dimensional boson field theory. II. Existence, J. Math. Phys. **27**, 2379–2393.

Baker Jr., G. A. (1987), Four-dimensional boson field theory, III. Nontriviality, J. Math. Phys. **28**, 1146–1158.

Blanchard, Ph., J. Potthoff and R. Sénéor (1985), A remark on perturbation expansions for unstable actions *via* stochastic quantization, BiBoS preprint, Univ. Bielefeld.

Bogoliubov, N. N. and D. V. Shirkov (1980), *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience, New York.

Calan, C. and V. Rivasseau (1981), Local existence of the Borel transform in Euclidean $\phi_4{}^4$, Commun. Math. Phys. **82**, 69–100.

Calan, C. and J. Rivasseau (1982), The perturbation series for $\Phi_3{}^4$ field theory is divergent, Commun. Math. Phys. **83**, 77–82.

Damgaard, P. H. and K. Tsokos (1983), Stochastic quantization, supersymmetry and the Nicolai map, preprint.

Ebbutt, J. M. and R. J. Rivers (1982), Scale-covariant theories I: Overview, J. Phys. A: Math. Gen. **15**, 2911–2927.

Ebbutt, J. M. and R. J. Rivers (1982), Scale-covariant theories II: The pseudo-perturbation expansion, J. Phys. A: Math. Gen. **15**, 2929–2945.

Ebbutt, J. M. and R. J. Rivers (1982), Scale-covariant theories III: The augmented scalar theory, J. Phys. A: Math. Gen. **15**, 2947–2954.

Ebbutt, J. M. and R. J. Rivers (1982), Scale-covariant theories IV: Stability,

J. Phys. A: Math. Gen. **15,** 3273–3283.

Ebbutt, J. M. and R. J. Rivers (1982), Scale-covariant theories V: The large N limit of the self-interacting $(\phi^2)^2$ scalar theory, J. Phys. A: Math. Gen. **15,** 3285–3302.

Eckmann, J. P., J. Magnen and R. Sénéor (1975), Decay properties and Borel summability for the Schwinger functions in $P(\phi)_2$ theories, Commun. Math. Phys. **39,** 251–271.

Fröhlich, J. (1984), Quantum field theory in terms of random walks and random surfaces, Lectures at Cargèse, preprint, ETH, Zürich.

Gallavotti, G. and V. Rivasseau (1984), Φ^4 field theory in dimension 4: A modern introduction to its unsolved problems, Ann. Inst. Henri Poincaré **40,** 185–220.

Gates Jr., S. J., M. T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel (1983), *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry,* Benjamin/Cummings, Massachusetts.

Gawedzki, K. and A. Kupiainen (1985), Non-trivial continuum limit of a $\phi_4{}^4$ model with negative coupling constant, Nucl. Phys. B257, 474–504.

Gozzi, E. (1983), Functional-integral approach to Parisi-Wu stochastic quantization: Scalar theory, Phys. Rev. **D 28,** 1922–1930.

Greensite, J. and M. B. Halpern (1984), Stabilizing bottomless action theories, Nucl. Phys. B242, 167–188.

Hardy, G. (1949), *Divergent Series,* Oxford Univ. Press, London-New York.

Hattori, T. ed. (1987), Recent developments in rigorous studies, Suppl. Prog. Theor. Phys. No. 92.

Itzykson, C. and J. B. Zuber (1980), *Quantum Field Theory,* McGraw-Hill New York.

Jaffe, A. (1965), Divergence of perturbation theory for Bosons, Commun. Math. Phys. **1,** 127–149.

Källen, G. (1972), *Quantum Electrodynamics,* Springer, New York.

Klauder, J. (1979), New measures for nonrenormalizable quantum field theory, Ann. Phys. **117,** 19–55.

Klauder, J. (1981), Scale covariance, non renormalizable interactions, and high-temperature expansions, Phys. Rev. **D 24,** 2599–2604.

Kondo, K.I. (1985), On the renormalized coupling constant of $(\phi^4)_4$ field theory,

Prog. Theor. Phys. **73,**

Landau, L. D. (1965), *Collected Papers of L. D. Landau,* ed. by Haar, D. ter, Gordon and Breach, New York-London-Paris.

Magnen, J. and R. Sénéor (1977), Phase space cell expansion and Borel summability for the Euclidean $\phi_3{}^4$ theory, Commun. Math. Phys. **56,** 237-276.

中西　襄 (1975),『場の量子論』, 新物理学シリーズ 19, 培風館.

Nelson, E. (1973), Construction of quantum fields from Markov fields, J. Funct. Anal. **12,** 97–112.

Parisi, G. and Y. S. Wu (1981), Perturbation theory without gauge fixing, Sci. Sinica **24,** 483–496.

Pomerachuk, I., V. V. Sudakov and K. A. Ter-Martirosyan (1956), Vanishing of renormalized charges in field theories with point interaction, Phys. Rev. **103,** 784–802.

Pomeranchuk, I. (1956), Vanishing of the renormalized charge in electrodynamics and in meson theory, Nuov. Cim. **3,** 1186–1203.

Rivasseau, V. and E. Speer (1980), The Borel transform in Euclidean ϕ^4 : Local existence for $\mathrm{Re}\,\nu < 4$, Commun. Math. Phys. **72,** 293–.

Rivasseau, V. (1984), Construction and Borel summability of planar 4-dimensional Euclidean field theory, preprint, Ecole Polytechnique.

Rivers, R. J. (1983), Towards non-trivial scalar theories in $d \geqq 4$ spacetime dimensions, J. Phys. A: Math. Gen. **16,** 2521–2540.

Seiler, E. (1982), *Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics,* Lecture Notes in Physics 159. Springer, Berlin-Heidelberg.

Sokal, A. D. (1980), An improvement of Watson's theorem on Borel summability, J. Math. Phys. **21,** 261–263.

Symanzik, K. (1973), A field theory with computable large-momenta behavior, Lett. al Nuov. Cim. **6,** 77–80.

Watson, G. (1912), A theory of asymptotic series, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. **A 211,** 279–313.

Wess, J. and J. Bagger (1983), *Supersymmetry and Supergravity,* Princeton Univ. Press, Princeton.

Wilson, K. G. and J. Kogut (1974), The renormalization group and the ε-expansion, Phys. Rep. **12 C,** 75-200.

付録 1

基礎的不等式

本書で用いる基礎的な不等式を列挙しておこう．証明はしない*)．まず，記号を定義する．$(\mathsf{M}, d\mu)$ を測度空間とし，M 上の可測関数 f と $p\in[1,\infty)$ に対して，$\|f\|_p$ を

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathsf{M}} d\mu |f|^p\right)^{1/p}$$

と定義する．また，$p=\infty$ のときは，

$$\|f\|_\infty = \sup_{m\in\mathsf{M}} |f(m)|$$

とする．$\mathsf{M}=\mathbf{R}^n$，$d\mu = d^n x$ $(n=1,2,\cdots)$ のとき，Fourier 変換

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2}\int d^n x e^{-ikx} f(x)$$

とたたみ込み (convolution)

$$(f*g)(x) = \int f(x-y)g(y)d^n y$$

を定義する．また，弱 $\mathsf{L}^p(\mathbf{R}^n)$ ノルム $\|f\|_{p,w}$ を

$$\|f\|_{p,w} = [\sup_{t>0}(t^p \mu\{x \mid |f(x)| > t\})]^{1/p}$$

によって定める．

（1） **Hölder の不等式**．$(\mathsf{M}, d\mu)$ は任意の測度空間とする．このとき，

$$p^{-1}+q^{-1} = r^{-1}, \quad 1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$$

をみたす任意の p,q,r に対して

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

がなりたつ．特に，$r=1$，$p=q=2$ のときを **Schwarz の不等式**とよぶ．

（2） **Hausdorff-Young の不等式**．$\mathsf{M}=\mathbf{R}^n$，$d\mu = d^n x$ とする．このとき，

$$p^{-1}+q^{-1} = 1, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2$$

*) 河田 (1970)，Reed and Simon (1975) を参照．

をみたす任意の p, q に対して,

$$\|\hat{f}\|_q \leqslant (2\pi)^{n/2-n/p}\|f\|_p.$$

（3） **Young の不等式.** $\mathrm{M} = \mathbf{R}^n$, $d\mu = d^n x$ とする．このとき,

$$p^{-1}+q^{-1} = r^{-1}+1, \quad 1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$$

をみたす任意の p, q, r に対して

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

（4） **一般化された Young の不等式.** $\mathrm{M} = \mathbf{R}^n$, $d\mu = d^n x$ とする．このとき,

$$p^{-1}+q^{-1} = 1+r^{-1}, \quad 1 < p, q, r < \infty$$

をみたす任意の p, q, r に対して定数 $c_{p,q}$ が存在して,

$$\|f * g\|_r \leqslant c_{p,q}\|f\|_p \|g\|_{q,w}.$$

付録 2

格子近似のラプラシアンとその性質

この付録では，格子間隔が $a>0$ の ν 次元格子空間 $\mathbf{Z}_a^\nu$ における格子近似のラプラシアンの定義と諸性質を簡単にまとめておく.

1. 全空間でのラプラシアン

$N \geqslant 1$ を固定する. $\mathbf{C}^N$ のベクトルの列 $f=\{f(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbf{Z}_a^\nu}$ に対して，演算子 $\partial_i f$, $\partial_i^* f$ $(i=1,\cdots,\nu)$ を

$$(\partial_i f)(\alpha) = f(\alpha+\delta_i)-f(\alpha) \tag{2.1}$$

$$(\partial_i^* f)(\alpha) = f(\alpha-\delta_i)-f(\alpha) \tag{2.2}$$

によって定義する. ここで，$\delta_i \in \mathbf{Z}_a^\nu$ $(i=1,\cdots,\nu)$ は

$$(\delta_i)_j = a\delta_{ij}, \quad j=1,\cdots,\nu \tag{2.3}$$

であたえられる. 全空間 $\mathbf{Z}_a^\nu$ での格子近似のラプラシアン $\varDelta_a$ は ∂_i, ∂_i^* を用いて,

$$(\varDelta_a f)(\alpha) = a^{-2}\sum_{i=1}^{\nu}[(\partial_i f)(\alpha)+(\partial_i^* f)(\alpha)] \tag{2.4}$$

によって定義される.

$\mathbf{Z}_a^\nu$ 上の絶対 2 乗総和可能な $\mathbf{C}^N$ のベクトル $f(\alpha)$ の列 $\{f(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbf{Z}_a^\nu}$ が生成する Hilbert 空間を $\mathscr{L}_a$ としよう：

$$\mathscr{L}_a = \{f=\{f(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbf{Z}_a^\nu} | f(\alpha)\in\mathbf{C}^N, \|f\|^2 \equiv \sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_a^\nu} a^\nu |f(\alpha)|^2 < \infty\}. \tag{2.5}$$

命題 1.1 演算子 $\varDelta_a$ は $\mathscr{L}_a$ 上の有界な自己共役演算子であり，非正，すなわち，任意の $f\in\mathscr{L}_a$ に対して

$$\langle \varDelta_a f, f\rangle \leqslant 0. \tag{2.6}$$

ここで，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathscr{L}_a$ の内積を表わす.

証明 $\varDelta_a$ は

$$(\varDelta_a f)(\alpha) = a^{-2}[\sum_{\beta:|\alpha-\beta|=a} f(\beta)-2\nu f(\alpha)] \tag{2.7}$$

と書きなおせる. したがって，上式で β の和に関して Schwarz の不等式を

使うと,

$$|(\Delta_a f)(\alpha)|^2$$
$$\leqslant a^{-4}[4\nu^2|f(\alpha)|^2+4\nu(2\nu)^{1/2}|f(\alpha)|\{\sum_{|\alpha-\beta|=a}|f(\beta)|^2\}^{1/2}+2\nu\sum_{|\alpha-\beta|=a}|f(\beta)|^2].$$

そこで,

$$\sum_{\alpha}\sum_{|\alpha-\beta|=a}|f(\beta)|^2 = 2\nu a^{-\nu}\|f\|^2,$$
$$\sum_{\alpha}|f(\alpha)|\{\sum_{|\alpha-\beta|=a}|f(\beta)|^2\}^{1/2} \leqslant \|f\|\{\sum_{\alpha}\sum_{|\alpha-\beta|=a}a^{\nu}|f(\beta)|^2\}^{1/2}a^{-\nu}$$

を用いれば,

$$\|\Delta_a f\|^2 \leqslant a^{-4}16\nu^2\|f\|^2$$

を得る. したがって, Δ_a は有界である. また, 任意の $f, g \in \mathscr{L}_a$ に対して

$$\langle \partial_i f, g\rangle = \langle f, \partial_i{}^* g\rangle \tag{2.8}$$

であること, および

$$\sum_{i=1}^{\nu}\partial_i\partial_i{}^* = \sum_{i=1}^{\nu}\partial_i{}^*\partial_i = -a^2\Delta_a \tag{2.9}$$

が容易にわかるので,

$$\langle \Delta_a f, f\rangle = -a^{-2}\sum_{i=1}^{\nu}\|\partial_i f\|^2 < 0$$

となる. Δ_a の自己共役性は, (2.4), (2.8) から導かれる. ∎

$m>0$ とすれば, (2.6) によって, m^2 は Δ_a のレゾルヴェント集合に入るので

$$C_a = (-\Delta_a+m^2)^{-1} \tag{2.10}$$

が存在する. そこで, 次に C_a の具体的な表示を求めておこう. これには, Fourier 級数の理論を応用するとよい. すなわち, $f \in \mathscr{L}_a$ に対して

$$\mathbf{B}_a = \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)^{\nu} \tag{2.11}$$

上の関数 $\hat{f}(p) \in \mathbf{C}^N$ を

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}_a{}^{\nu}} a^{\nu}f(\alpha)e^{-ip\alpha} \tag{2.12}$$

によって定義する. このとき, $\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{B}_a:\mathbf{C}^N)$ ($\mathbf{C}^N$ の値をとる $\mathrm{L}^2(\mathbf{B}_a)$ 関数の

生成する Hilbert 空間)*) であり，

$$\|\hat{f}\| = \|f\| \tag{2.13}$$

が成立し，(2.12) を通して，$\mathcal{L}_a$ と $\mathrm{L}^2(\mathbf{B}_a : \mathbf{C}^N)$ はユニタリ同値となることが証明される．定義にしたがって計算することにより，

$$(-\Delta_a f)^\wedge(p) = 2a^{-2}\sum_{i=1}^{\nu}(1-\cos p_i a)\hat{f}(p). \tag{2.14}$$

したがって，

$$\mu_a(p) = \left(2a^{-2}\sum_{i=1}^{\nu}(1-\cos p_i a)+m^2\right)^{1/2} \tag{2.15}$$

とおけば，

$$(C_a f)(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}}\int_{\mathbf{B}_a} dp\,\mu_a(p)^{-2}\hat{f}(p)e^{ip\alpha} \tag{2.16}$$

を得る．ゆえに，

$$(C_a f)(\alpha) = \sum_{\beta} a^\nu C_a(\alpha, \beta) f(\beta), \tag{2.17}$$

$$C_a(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^\nu}\int_{\mathbf{B}_a} dp\,\mu_a(p)^{-2}e^{ip(\alpha-\beta)} \tag{2.18}$$

と書ける．

2. 有界領域でのラプラシアン

$\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の有界領域 Λ での格子近似のラプラシアンを考える．この場合，境界条件が問題となってくるが，ここでは，周期的境界条件，Dirichlet 境界条件の 2 つだけを考えることにする．

(1) 周期的境界条件つきのラプラシアン

この場合は，Λ として，$N_1, \cdots, N_\nu$ を自然数として

$$\Lambda = [(-N_1+1)a, N_1 a]\times\cdots\cdots\times[(-N_\nu+1)a, N_\nu a] \wedge \mathbf{Z}_a{}^\nu \tag{2.19}$$

という形のものだけを考える．領域 Λ における周期的境界条件つきの格子近似のラプラシアン $\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}$ は，$f = \{f(\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, $f(\alpha) \in \mathbf{C}^N$ に対して

*) $\hat{f} = (\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_N)$ とすれば，その L^2 $(\mathbf{B}_a : \mathbf{C}^N)$ でのノルム $\|\hat{f}\|$ は

$$\|\hat{f}\|^2 = \sum_{i=1}^{N}\|\hat{f}_i\|^2{}_{\mathrm{L}^2(\mathbf{B}_a)}$$

で定義される．

$$(\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}f)(\alpha) = a^{-2}\Big[\sum_{|\alpha-\beta|=a}{}^{\mathrm{P}} f(\beta) - 2\nu f(\alpha)\Big],\quad \alpha \in \Lambda, \tag{2.20}$$

によって定義される．ただし，$\sum_{|\alpha-\beta|=a}{}^{\mathrm{P}} f(\beta)$ は，α が Λ の境界にあって，i 軸方向 $(i=1,\cdots,\nu)$ に対して $\beta \in \Lambda^c$ となってしまう場合，周期 $2N_i a$ でその β を Λ の中の点にもどし，その点における f の値をもって定義される和である；いいかえれば，各 i 軸方向 $(i=1,\cdots,\nu)$ に対して $2N_i a$ を法として定義される和である．

命題 2.1

$$\mathcal{L}_{a,\Lambda} = \{f = \{f(\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda} \mid f(\alpha) \in \mathbf{C}^N\} \tag{2.21}$$

とし，その内積はふつうの Euclid 内積

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\alpha\in\Lambda} a^\nu \overline{f(\alpha)}\cdot g(\alpha) \tag{2.22}$$

であたえられるとする．このとき，$\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}$ は $\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ 上の有界な自己共役演算子で，非正である．

証明　$\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ は有限次元 Hilbert 空間だから，$\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}$ の有界性は自明．自己共役で，非正であることは Δ_a の場合と同様に示される．∎

上の命題によって，

$$C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} = (-\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} + m^2)^{-1} \tag{2.23}$$

が存在する．

命題 2.2　任意の $f \in \mathcal{L}_{a,\Lambda}$ に対して

$$(C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}f)(\alpha) = \sum_{\beta\in\Lambda} a^\nu C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}(\alpha,\beta) f(\beta) \tag{2.24}$$

$$C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}(\alpha,\beta) = \frac{1}{|\Lambda| a^\nu} \sum_{p\in\mathbf{B}_{a,\Lambda}} \mu_a(p)^{-2} e^{ip(\alpha-\beta)} \tag{2.25}$$

と書ける．ここで，$|\Lambda|$ は Λ の点の個数を表わし

$$\mathbf{B}_{a,\Lambda} = \left\{p \in \mathbf{R}^\nu \,\middle|\, p_i = \frac{l_i \pi}{N_i a},\ l_i = -N_i+1,\cdots,N_i,\ i=1,\cdots,\nu\right\}. \tag{2.26}$$

証明　$f \in \mathcal{L}_{a,\Lambda}$ に対して $\mathbf{B}_{a,\Lambda}$ 上の関数 $\hat{f}(p) = \{\hat{f}_i(p)\}_{i=1}^N$

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \sum_{\alpha\in\Lambda} a^\nu f(\alpha) e^{-i\alpha p} \tag{2.27}$$

を定義する．このとき，

$$\|\hat{f}\|^2 \equiv \frac{(2\pi)^\nu}{|\Lambda|\alpha^\nu} \sum_{p\in \mathbf{B}_{a,\Lambda}} |\hat{f}(p)|^2 \tag{2.28}$$

とすれば，$\|\hat{f}\| = \|f\|$ であって

$$f(\alpha) = \frac{(2\pi)^{\nu/2}}{|\Lambda|a^\nu} \sum_{p\in \mathbf{B}_{a,\Lambda}} \hat{f}(p)e^{i\alpha p}. \tag{2.29}$$

集合

$$\{g\in \mathbf{C}^N \mid \text{各 } g_i\ (i=1, \cdots, N) \text{ は } \mathbf{B}_{a,\Lambda} \text{ 上の関数}\}$$

に (2.28) でノルムを入れた Hilbert 空間を $\widehat{\mathcal{L}}_{a,\Lambda}$ とすれば，(2.27), (2.29) を通して，$\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ と $\widehat{\mathcal{L}}_{a,\Lambda}$ はユニタリ同値となる．直接計算によって

$$[(-\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}+m^2)f]^\wedge(p) = \mu_a(p)^2\hat{f}(p), \qquad f\in\mathcal{L}_{a,\Lambda},\ p\in\mathbf{B}_{a,\Lambda} \tag{2.30}$$

であるので，

$$(C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}f)(\alpha) = \frac{(2\pi)^{\nu/2}}{|\Lambda|a^\nu} \sum_{p\in \mathbf{B}_{a,\Lambda}} \mu_a(p)^{-2}\hat{f}(p)e^{i\alpha p}.$$

したがって (2.25) を得る．∎

命題 2.3

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} \Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} &\equiv \{f\in\mathcal{L}_{a,\Lambda} \mid \Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}f=0\}\\ &= \{f\in\mathcal{L}_{a,\Lambda} \mid f(\alpha) = \text{定数},\ \alpha\in\Lambda\}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\operatorname{Ran} \Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} = \{f\in\mathcal{L}_{a,\Lambda} \mid \sum_{\alpha\in\Lambda} f(\alpha) = 0\} \tag{2.32}$$ *)

特に，$f\in \operatorname{Ran}\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}$ に対しては $(\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^{-1}f$ が存在して，

$$\begin{aligned}&(\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}})^{-1}f(\alpha)\\ &\quad= -\frac{(2\pi)^{\nu/2}}{|\Lambda|a^\nu} \sum_{p\in \mathbf{B}_{a,\Lambda}\setminus\{0\}} \left[2a^{-2}\sum_{i=1}^{\nu}(1-\cos p_i a)\right]^{-1} \hat{f}(p)e^{i\alpha p}\end{aligned} \tag{2.33}$$

であたえられる．

証明　(2.30) によって，

$$(\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}f)(\alpha) = -\frac{(2\pi)^{\nu/2}}{|\Lambda|a^\nu} \sum_{p\in \mathbf{B}_{a,\Lambda}} \left[2a^{-2}\sum_{i=1}^{\nu}(1-\cos p_i a)\right]\hat{f}(p)e^{i\alpha p}. \tag{2.34}$$

---

*)　ここでは演算子 A の値域を $\operatorname{Ran} A$ で表わす．

$\sum_{\alpha\in\Lambda} e^{i\alpha p} = \delta_{p,0}|\Lambda|$ を用いると，

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} (\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} f)(\alpha) = 0.$$

したがって，$\mathrm{Ran}\, \Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} \subset \{f \in \mathcal{L}_{a,\Lambda} \mid \sum_{\alpha\in\Lambda} f(\alpha) = 0\}$．逆に，$\sum_{\alpha\in\Lambda} f(\alpha) = 0$ とし，$g(\alpha)$ を (2.33) の右辺によって定義する．このとき，

$$\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} g(\alpha) = \frac{(2\pi)^{\nu/2}}{|\Lambda| a^{\nu}} \sum_{p\in \mathbf{B}_{a,\Lambda}\setminus\{0\}} \hat{f}(p) e^{i\alpha p}.$$

しかし，$\hat{f}(0) = 0$ だから，上式の右辺は実は $f(\alpha)$ に等しい．したがって，$\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} g = f$．ゆえに，$f \in \mathrm{Ran}\, \Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}}$．この証明は同時に (2.33) を示している．次に (2.31) を示すために

$$\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} f = 0$$

としよう．(2.34) から，$\sum_{i=1}^{\nu} (1-\cos p_i a) \hat{f}(p) = 0$．したがって，$p \neq 0$ のとき $\hat{f}(p) = 0$．ゆえに，$f(\alpha) = [(2\pi)^{\nu/2}/|\Lambda| a^{\nu}] \hat{f}(0) =$ 定数．逆に $f =$ 定数 $\equiv c$ とすると，$\hat{f}(p) = c a^{\nu} \delta_{p,0} |\Lambda|/(2\pi)^{\nu/2}$．したがって，$(\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} f)(\alpha) = 0$ となる．ゆえに (2.31) を得る．∎

$\Lambda \nearrow \mathbf{Z}_a{}^{\nu}$ の極限に対しては次のことがいえる：

命題 2.4 有界な台をもつすべての $f, g \in \mathcal{L}_a$ に対して

(1) $\lim_{\Lambda\nearrow \mathbf{Z}_a{}^{\nu}} \langle f, \Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} g\rangle = \langle f, \Delta_a g\rangle,$ (2.35)

(2) $\lim_{\Lambda\nearrow \mathbf{Z}_a{}^{\nu}} \langle f, C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} g\rangle = \langle f, C_a g\rangle.$ (2.36)

証明 $\mathrm{supp}\, f$, $\mathrm{supp}\, g \subset \Lambda$ となるように Λ をとる．このとき，$f, g \in \mathcal{L}_a$ は $\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ の元ともみなすことができて，

$$\langle f, \Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{P}} g\rangle = -\frac{(2\pi)^{\nu}}{|\Lambda| a^{\nu}} \sum_{p\in \mathbf{B}_{a,\Lambda}} \overline{\hat{f}(p)} [\mu_a(p)^2 - m^2] \hat{g}(p).$$

$\hat{f}(p), \hat{g}(p)$ は $\mathbf{B}_a$ 上の連続関数であって，上式の右辺は，積分

$$-\int_{\mathbf{B}_a} d^{\nu}p\, \overline{\hat{f}(p)} [\mu_a(p)^2 - m^2] \hat{g}(p)$$

の Riemann 近似和になっている．したがって，(2.35) が得られる．(2.36) も同様．∎

（2） Dirichlet 境界条件つきのラプラシアン

この場合は任意の有界領域 Λ で考える．Hilbert 空間 $\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ は (2.21) と同様に定義する．$f\in\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ に対して，

$$(\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}f)(\alpha)=a^{-2}\Big[\sum_{\substack{|\alpha-\beta|=a\\ \beta\in\Lambda}}f(\beta)-2\nu f(\alpha)\Big] \tag{2.37}$$

とおく．演算子 $\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}$ を Dirichlet 境界条件つきの Λ における格子近似のラプラシアンという．

命題 2.5　$\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}$ は $\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ 上の有界な自己共役演算子で非正である．

証明　$f\in\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ に対して

$$\tilde{f}(\alpha)=f(\alpha),\ \ \alpha\in\Lambda;\qquad \tilde{f}(\alpha)=0,\ \ \alpha\in\Lambda^c,$$

によって $\tilde{f}\in\mathcal{L}_a$ を定義すれば，

$$\langle f,\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}g\rangle=\langle\tilde{f},\Delta_a\tilde{g}\rangle$$

と書けるから，命題 1.1 から望む結果を得る．∎

上の命題から，

$$C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}=(-\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}+m^2)^{-1} \tag{2.38}$$

が存在する．

$\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}$ と Δ_a の関連，および $C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}$ を求めるためにいくつか記号を導入しよう：

定義 2.6

（1）　$\Lambda^{\mathrm{ext}}=\mathbf{Z}_a{}^{\nu}\backslash\Lambda,\qquad \Lambda\subset\mathbf{Z}_a{}^{\nu},$

$\Lambda^{\mathrm{int}}=\{\alpha\in\Lambda\mid|\alpha-\beta|=a$ ならば $\beta\in\Lambda\}$,

$\partial\Lambda=\Lambda\backslash\Lambda^{\mathrm{int}}=\{\alpha\in\Lambda\mid|\alpha-\beta|=a$ となる $\beta\in\Lambda^{\mathrm{ext}}$ がある$\}$,

$\partial\Lambda^{\mathrm{ext}}=\{\alpha\in\Lambda^{\mathrm{ext}}\mid|\alpha-\beta|=a$ となる $\beta\in\Lambda$ がある$\}$.

（2）　$\mathbf{Z}_a{}^{\nu}\times\mathbf{Z}_a{}^{\nu}$ 上の複素数値関数 $K=(K(\alpha,\beta))_{\alpha,\beta\in\mathbf{Z}_a{}^{\nu}}$（すなわち，$\mathbf{Z}_a{}^{\nu}$ 上の行列）に対して，その Λ への制限を K^{Λ} と書く：$K^{\Lambda}=(K(\alpha,\beta))_{\alpha,\beta\in\Lambda}$. Λ 上の行列 $L=(L(\alpha,\beta))_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ が $\alpha\in\Lambda^{\mathrm{int}}$ または $\beta\in\Lambda^{\mathrm{int}}$ のとき $L(\alpha,\beta)=0$ をみたすならば，L は $\partial\Lambda$ 上に集中しているという．

命題 2.7　$\partial\Lambda$ 上に集中し，かつ非負の行列要素からなる Λ 上の行列 $B_{\partial\Lambda}$

が存在して,

$$-\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}+m^2 = -\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{F}}+m^2+B_{\partial\Lambda} \tag{2.39}$$

が成立する. ここで, $-\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{F}}$ は

$$-\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{F}}+m^2 \equiv (C_a{}^{\Lambda})^{-1} \tag{2.39$'$}$$

によって定義され, **自由境界条件のラプラシアン**とよぶ.

証明 証明を通して $C_a = C$ と書く. 分解 $\mathbf{Z}_a{}^{\nu} = \Lambda\cup\Lambda^{\mathrm{ext}}$ に応じて

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C^{\Lambda} & B \\ \hline {}^tB & C^{\Lambda^{\mathrm{ext}}} \end{array}\right), \qquad C^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} D & E \\ \hline {}^tE & F \end{array}\right)$$

$$D = (C^{-1})^{\Lambda}, \qquad F = (C^{-1})^{\Lambda^{\mathrm{ext}}}$$

と書ける. ここで, C, C^{-1} が対称であることを用いた. いま, 定義によって, $C^{-1} = -\Delta_a+m^2$ だから,

$$C^{-1}(\alpha,\alpha) = (a^{-2}2\nu+m^2)a^{-\nu} > 0,$$

$|\alpha-\beta| = a$ ならば

$$C^{-1}(\alpha,\beta) = -a^{-2-\nu} < 0,$$

$\alpha\neq\beta$ かつ $|\alpha-\beta|\neq a$ ならば

$$C^{-1}(\alpha,\beta) = 0,$$

となる. これから特に

$$E(\alpha,\beta)\leqslant 0, \qquad \alpha\in\Lambda,\ \beta\in\Lambda^{\mathrm{ext}}. \tag{2.40}$$

$\langle f, C^{-1}f\rangle \geqslant m^2\|f\|^2, f\in\mathcal{L}_a$, であるから, F は狭義に正定値な行列であり, したがって F^{-1} が存在する. そこで

$$A = D-EF^{-1}{}^tE$$

を考えよう. $CC^{-1}=I$ より

$$C^{\Lambda}D+B{}^tE = I, \qquad C^{\Lambda}E+BF = 0.$$

したがって

$$\begin{aligned} C^{\Lambda}A &= C^{\Lambda}D-C^{\Lambda}EF^{-1}{}^tE \\ &= I-B{}^tE-(-BF)F^{-1}{}^tE \\ &= I \end{aligned}$$

A, C^{Λ} ともに対称だから $AC^{\Lambda}=I$ もわかる. ゆえに $A=(C^{\Lambda})^{-1}$ を得る:

$$(C^{\Lambda})^{-1} = (C^{-1})^{\Lambda}-B_{\partial\Lambda}, \tag{2.41}$$

ここで $B_{\partial\Lambda}=EF^{-1}{}^tE$ とおいた．

$$(B_{\partial\Lambda})(\alpha,\beta)=\sum_{\gamma,\delta\in\Lambda^{\text{ext}}}E(\alpha,\gamma)(F^{-1})(\gamma,\delta)E(\beta,\delta)$$

$\alpha\in\Lambda^{\text{int}}$ としよう．このとき，上式の和において $|\alpha-\gamma|>a$．しかし，$|\alpha-\gamma|>a$ ならば，$(C^{-1})(\alpha,\gamma)=0$ だったから，特に $E(\alpha,\gamma)=0$．したがって $B_{\partial\Lambda}(\alpha,\beta)=0$．$B_{\partial\Lambda}$ は対称行列だから，$\beta\in\Lambda^{\text{int}}$ の場合も $B_{\partial\Lambda}(\alpha,\beta)=0$．ゆえに，$B_{\partial\Lambda}$ は $\partial\Lambda$ 上に集中している．

最後に，$B_{\partial\Lambda}(\alpha,\beta)\geqslant 0, \alpha,\beta\in\Lambda$ を示したい．(2.40) によって，

$$(F^{-1})(\gamma,\delta)\geqslant 0,\qquad \gamma,\delta\in\Lambda^{\text{ext}}$$

を示せばよい．これは，F が狭義に正定値の行列でしかも非対角行列要素が非正なので，次に述べる補題によって証明される．∎

補題 2.8　A を Hilbert 空間 $l_2\equiv\{f=\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\mid\|f\|^2\equiv\sum_n|f_n|^2<\infty\}$ において作用する（必ずしも有界ではない）自己共役演算子とし，正数 c が存在して，$A\geqslant c$ をみたすとする．各 $m=1,2,\cdots$，に対して，$e_m\in l_2$ を $e_m(n)=\delta_{mn}$ によって定義し，行列 $A_{mn}=\langle e_m, Ae_n\rangle$ を考える（$e_n\in \mathrm{D}(A)$，$n\geqslant 1$，とする）．このときすべての m,n ($m\neq n$) に対して，$A_{mn}\leqslant 0$ ならば

$$(A^{-1})_{mn}\geqslant 0,\qquad m,n=1,2,\cdots.$$

証明

$$A=D+B,$$

と書こう．ここで，D は A の対角要素のみからなる行列，B は非対角要素のみからなる行列である．一成分だけが0でないベクトル $\phi=\{\phi_i\}$ に対して，$\sum_{i,j}\bar{\phi}_iA_{ij}\phi_j\geqslant c\|\phi\|^2$ を考えることにより，$D\geqslant c$ を示すことができる．したがって $\lambda\in[0,1]$ に対して

$$A(\lambda)=D+\lambda B=(1-\lambda)D+\lambda A\geqslant c$$

であるから，$A(\lambda)^{-1}$ は存在し，λ について $[0,1]$ のある複素近傍まで解析接続される．この解析接続は，級数展開

$$A(\lambda)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^nA(\lambda_0)^{-1}[(D-A)A(\lambda_0)^{-1}]^n,\qquad \lambda_0\in[0,1]$$

によって定義される．さらに十分小さな λ に対しては

$$A(\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^{(n)}, \quad A^{(n)} = D^{-1}(-BD^{-1})^n \tag{2.42}$$

と展開できる.

$$A_{ij}{}^{(n)} = \sum_{k_1 \cdots k_n} D_{ik_1}{}^{-1}(-BD^{-1})_{k_1k_2}(-BD^{-1})_{k_2k_3} \cdots (-BD^{-1})_{k_nj}$$

であり,

$$(BD^{-1})_{ij} = \sum_k B_{ik}D^{-1}{}_{kj} = B_{ij}D^{-1}{}_{jj} \leqslant 0$$

だから, $A_{ij}{}^{(n)} \geqslant 0$ となる. すなわち, $A(\lambda)^{-1}$ の各行列要素の $\lambda = 0$ のまわりの Taylor 展開の係数はすべて非負である. そこで関数論でよく知られた Pringsheim の定理を引用しよう*):

定理 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を r $(0 < r < \infty)$ としよう. このとき, ある n_0 が存在して, すべての $n \geqslant n_0$ に対して $a_n \geqslant 0$ ならば, $z = r$ は $f(z)$ の特異点である.

級数 (2.42) にこの定理を応用すれば, $A(\lambda)^{-1}{}_{ij}$ の収束半径を r_{ij} とするとき, $A(\lambda)^{-1}{}_{ij}$ は $\lambda = r_{ij}$ に特異点をもつ. ところが, 前半によって, $A(\lambda)^{-1}{}_{ij}$ は $[0, 1]$ の近傍で解析的であるから, $\lambda = 1$ は収束半径内にある. $A(1) = A$ であるから, 求める結果を得る. ∎

定義 2.9

(1) $\mathcal{N}_a$ を

$$\|f\|_{\mathcal{N}_a}{}^2 \equiv 2 \sum_{\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_a{}^\nu} a^{2\nu} \overline{f(\alpha)} C_a(\alpha, \beta) f(\beta) < \infty \tag{2.43}$$

をみたす $\mathcal{L}_a$ の元 $f = \{f(\alpha)\}$ で $f(\alpha) \in \mathbf{R}^N$ となっているものが, $\|\cdot\|_{\mathcal{N}_a}$ をノルムとして生成する実 Hilbert 空間とする.

(2) $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ の任意の部分集合 Λ に対して, Λ の中に台をもつ $\mathcal{N}_a$ のベクトルが生成する閉部分空間上への直交射影を e_Λ と記し,

$$P_\Lambda = 1 - e_{\Lambda^{\text{ext}}} \tag{2.44}$$

とおく.

目的は次の命題を証明することである.

---

*) 証明は, たとえば, 楠幸男『解析函数論』, p. 102, 広川書店, 1962.

命題 2.10　$C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}(\alpha,\beta)$ を

$$(C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}f)(\alpha)=\sum_{\beta\in\Lambda}a^{\nu}C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}(\alpha,\beta)f(\beta) \tag{2.45}$$

によって定義しよう．また，$\alpha\in\mathbf{Z}_{a}{}^{\nu}$ に対して，$e_{\alpha}{}^{j}\in\mathcal{N}_{a}$ を

$$e_{\alpha}{}^{j}(\beta)_{i}=a^{-\nu}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{ij},\qquad i,j=1,\cdots,N \tag{2.46}$$

で定義する．このとき，

$$C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\langle P_{\Lambda}e_{\alpha}{}^{j},e_{\beta}{}^{j}\rangle_{\mathcal{N}_a}.\quad j=1,\cdots,N. \tag{2.47}$$

特に，$\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ における演算子不等式として，

$$0\leqslant C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}\leqslant C_{a}. \tag{2.48}$$

これを示すためには，P_{Λ} の性質を知る必要がある．以下，j をひとつ固定し $e_{\alpha}{}^{j}=e_{\alpha}$ と記す．

補題 2.11　各 $\alpha\in\Lambda$ に対して，$\partial\Lambda^{\mathrm{ext}}$ 上の実数値関数 A_{α} が存在して

$$P_{\Lambda}e_{\alpha}=\begin{cases}e_{\alpha}-\sum_{\beta\in\partial\Lambda^{\mathrm{ext}}}A_{\alpha}(\beta)e_{\beta}\,; & \alpha\in\Lambda \text{ のとき},\\ 0 & ;\ \alpha\in\Lambda^{\mathrm{ext}} \text{ のとき}.\end{cases} \tag{2.49}$$

証明　$\alpha\in\Lambda^{\mathrm{ext}}$ のときは，$e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}e_{\alpha}=e_{\alpha}$ だから，$P_{\Lambda}e_{\alpha}=0$．そこで，$\alpha\in\Lambda$ としよう．任意の $\beta\in\mathbf{Z}_{a}{}^{\nu}$ に対して

$$\begin{aligned}2\langle e_{\beta},e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}e_{\alpha}\rangle_{\mathcal{L}_a}&=\langle(-\Delta_{a}+m^{2})e_{\beta},e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}e_{\alpha}\rangle_{\mathcal{N}_a}\\&=\langle e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}(-\Delta_{a}+m^{2})e_{\beta},e_{\alpha}\rangle_{\mathcal{N}_a}.\end{aligned}$$

$\beta\in\Lambda^{\mathrm{ext}}\backslash\partial\Lambda^{\mathrm{ext}}$ ならば $(-\Delta_{a}+m^{2})e_{\beta}$ の台は Λ^{ext} にある．したがって，$e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}(-\Delta_{a}+m^{2})e_{\beta}=(-\Delta_{a}+m^{2})e_{\beta}$．ゆえに

$$2\langle e_{\beta},e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}e_{\alpha}\rangle_{\mathcal{L}_a}=\langle e_{\beta},e_{\alpha}\rangle_{\mathcal{L}_a}=0,\qquad \beta\in\Lambda^{\mathrm{ext}}\backslash\partial\Lambda^{\mathrm{ext}}.$$

これは，$e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}e_{\alpha}$ の台が $\partial\Lambda^{\mathrm{ext}}$ の中にあることを意味する．したがって，

$$e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}e_{\alpha}=\sum_{\beta\in\partial\Lambda^{\mathrm{ext}}}\langle e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}e_{\alpha},e_{\beta}\rangle_{\mathcal{L}_a}e_{\beta}.$$

そこで，$A_{\alpha}(\beta)=\langle e_{\Lambda^{\mathrm{ext}}}e_{\alpha},e_{\beta}\rangle_{\mathcal{L}_a}$ とおけばよい．■

命題 2.10 の証明

$$(-\Delta_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}+m^{2})f(\alpha)=\sum_{\beta\in\Lambda}a^{\nu}C_{a}{}^{-1}(\alpha,\beta)f(\beta),\qquad \alpha\in\Lambda,$$

と書けることに注意すれば，

$$\sum_{\beta\in\Lambda}\frac{1}{2}\langle e_\alpha, P_\Lambda e_\beta\rangle_{\mathcal{N}_a} C_a^{-1}(\beta,\gamma)=\delta_{\alpha,\gamma},\qquad \alpha,\gamma\in\Lambda, \tag{2.50}$$

を示せばよい．$\beta\in\Lambda^{\mathrm{ext}}$ ならば，$P_\Lambda e_\beta=0$ だから，(2.50) の和において β は $\mathbf{Z}_a{}^\nu$ 全体にわたるものとしてよい．このとき，$\langle e_\alpha, P_\Lambda e_\beta\rangle_{\mathcal{N}_a}=\langle P_\Lambda e_\alpha, e_\beta\rangle_{\mathcal{N}_a}$ としてから，(2.49) を用いると，(2.50) の左辺は

$$\sum_{\beta\in\mathbf{Z}_a{}^\nu}[C_a(\alpha,\beta)-\sum_{\gamma'\in\partial\Lambda^{\mathrm{ext}}}A_a(\gamma')C_a(\gamma',\beta)]C_a^{-1}(\beta,\gamma)=\delta_{\alpha\gamma}-\sum_{\gamma'\in\partial\Lambda^{\mathrm{ext}}}A_a(\gamma')\delta_{\gamma'\gamma}$$

ところが，$\gamma\in\Lambda$ としているから，上式で $\delta_{\gamma'\gamma}=0$．よって，(2.50) を得る．(2.48) は，$f\in\mathcal{L}_{a,\Lambda}$ に対して $\tilde{f}=\sum_{\alpha\in\Lambda}f_i(\alpha)e_\alpha{}^i$，$i=1,\cdots,N$ とおけば，(2.47) によって

$$\langle f, C_{a,\Lambda}{}^{\mathrm{D}}f\rangle_{\mathcal{L}_{a,\Lambda}}=\frac{1}{2}(P_\Lambda\tilde{f},\tilde{P}_\Lambda f)_{\mathcal{N}_a}\geqslant 0$$

および，

$$\begin{aligned}|\langle P_\Lambda\tilde{f}_i, P_\Lambda\tilde{f}_i\rangle| &\leqslant \|\tilde{f}\|_{\mathcal{N}_a}{}^2\\ &=2\langle f, C_a f\rangle_{\mathcal{L}_{a,\Lambda}}\end{aligned}$$

となることから導かれる．∎

付録 3

Gauss 超過程のコンディショニング

有限領域での $(\phi^{2N})_2$-Euclid 場の理論（第9章）に現われる Dirichlet 状態および半 Dirichlet 状態の定義と，その基本的性質を調べるための有用な数学的道具とを抽象的な形であたえる．

定義 3.1 ϕ_1, ϕ_2 を，同じ実ベクトル空間 $\mathbf{V}$ を指標とする2つの Gauss 超過程とし，$C_1(f, g)$，$C_2(f, g)$ をそれぞれの分散とする．すなわち，ϕ_i $(i=1, 2)$ は $\mathbf{V}$ から，確率測度空間 (M_i, μ_i) 上の確率変数への線形写像であって，

$$\langle e^{i\phi_i(f)}\rangle_i = e^{-\frac{1}{2}C_i(f,f)}, \qquad f \in \mathbf{V}$$

をみたすものとする．ここで，$\langle\cdot\rangle_i$ は，μ_i による期待値を表わす．なお，$C_i(\cdot, \cdot)$ は，$f, g, h \in \mathbf{V}$ に対して

$$C_i(f, g) = C_i(g, f),$$

$$C_i(\alpha f + \beta g, h) = \alpha C_i(f, h) + \beta C_i(g, h), \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

をみたす．このとき，もし，

$$C_1(f, f) \leq C_2(f, f), \qquad f \in \mathbf{V} \tag{3.1}$$

であるならば，ϕ_1 は ϕ_2 から**コンディショニング** (conditioning) によって得られるという．あるいは，単に，ϕ_1 は ϕ_2 のコンディショニングであるという．

ϕ_1, ϕ_2 を上の定義のものとし，ϕ_1 は ϕ_2 のコンディショニングとしよう．$\mathbf{V}$ をノルム $\sqrt{2}\ C_2(\cdot, \cdot)^{1/2}$ によって完備化してできる実 Hilbert 空間を H とする．このとき，(3.1) によって，$C_1(\cdot, \cdot)$ は H 上の双線形形式に一意的に拡張され（その拡張も同一記号で書く），

$$0 \leq C_1(f, f) \leq C_2(f, f) = \frac{1}{2}\|f\|_{\mathsf{H}}^2, \qquad f \in \mathsf{H},$$

がなりたつ．したがって，Riesz の補題によって，

$$C_1(f,f)=\frac{1}{2}\|Af\|_{\mathsf{H}}^2,\qquad 0\leqslant A\leqslant 1,$$

となる H 上の有界な自己共役演算子 A がただひとつ存在する．そこで，写像 $f\longrightarrow\phi_2(Af)$ を考えると，これは，H を指標とする Gauss 超過程をあたえる．ただし，その分散は，$C_1(f,f)$ である（ϕ_1, ϕ_2 は，連続性によって，H を指標とする超過程に拡張しておく）．したがって，$\phi_2(A\cdot)$ は $\phi_1(\cdot)$ のひとつのモデルをあたえる．$\phi_1(\cdot)$ を $\phi_2(A\cdot)$ として実現する仕方を**受動描像**（passive picture）という．この描像では，$\mathsf{M}_1=\mathsf{M}_2$, $d\mu_1=d\mu_2$ である．他方，これに対して，$\phi_1=\phi_2$, $\mathsf{M}_1=\mathsf{M}_2$ という実現の仕方を——それが可能であるならば——**能動描像**（active picture）とよぶ．この場合は，$C_1\neq C_2$ である限り，$d\mu_1\neq d\mu_2$ となる．

以後，$\phi_2=\phi$, $\phi_1=\phi_A$ と記す．

$1-A^2\geqslant 0$ であるから，自己共役演算子 $B=(1-A^2)^{1/2}$ が定義され，

$$\|f\|_{\mathsf{H}}^2=\|Af\|_{\mathsf{H}}^2+\|Bf\|_{\mathsf{H}}^2,\qquad f\in\mathsf{H}\tag{3.2}$$

がなりたつ．そこで，H_A (H_B) をノルム $\|A\cdot\|_{\mathsf{H}}$ ($\|B\cdot\|_{\mathsf{H}}$) による H の完備化とし，$\tilde{\mathsf{H}}=\mathsf{H}_A\oplus\mathsf{H}_B$ とする．ϕ_B を H_B を指標とする Gauss 超過程とすれば，$\|Bf\|_{\mathsf{H}}^2\leqslant\|f\|_{\mathsf{H}}^2$ であったから，ϕ_B は ϕ のコンディショニングである．ϕ_A, ϕ_B の実現する確率測度空間をそれぞれ $(\mathbf{Q}_A, d\mu_{0,A})$, $(\mathbf{Q}_B, d\mu_{0,B})$ とし，

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{Q}_{\tilde{\mathsf{H}}}=\mathbf{Q}_A\times\mathbf{Q}_B,\qquad d\mu_{0,\tilde{\mathsf{H}}}=d\mu_{0,A}\otimes d\mu_{0,B}\\&\phi_{\tilde{\mathsf{H}}}(f_1\oplus f_2)=\phi_A(f_1)+\phi_B(f_2),\qquad f_1\in\mathsf{H}_A, f_2\in\mathsf{H}_B\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

とすれば，$\phi_{\tilde{\mathsf{H}}}$ は $\tilde{\mathsf{H}}$ を指標とする Gauss 超過程で，その実現する確率測度空間が $(\mathbf{Q}_{\tilde{\mathsf{H}}}, d\mu_{0,\tilde{\mathsf{H}}})$ であることは容易にわかる．

$$\tilde{\phi}(f)\equiv\phi_{\tilde{\mathsf{H}}}(f\oplus f),\qquad f\in\mathsf{H}\tag{3.4}$$

とすれば，$\tilde{\phi}(\cdot)$ は H を指標とする Gauss 超過程のひとつのモデルになる．したがって，Gauss 超過程の一意性（定理 3.2.11）により，$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}, d\mu_{0,\mathsf{H}})$ から，$\mathsf{L}^2(\mathbf{Q}_{\tilde{\mathsf{H}}}, d\mu_{0,\tilde{\mathsf{H}}})$ 上へのユニタリ変換 U があって，

$$U1=1,\qquad U\phi(f)U^{-1}=\tilde{\phi}(f)\tag{3.5}$$

となる．

さて，e_A を $\tilde{\mathsf{H}}$ から，H_A 上への射影演算子としよう．このとき，

命題 3.2

（1） すべての $g \in \tilde{\mathrm{H}}$ に対して

$$\int_{\mathbf{Q}_B} \phi_{\tilde{\mathrm{H}}}(g) d\mu_{0,B} = \phi_A(e_A g). \tag{3.6}$$

特に，すべての $f \in \mathrm{H}$ に対して

$$\int_{\mathbf{Q}_B} \tilde{\phi}(f) d\mu_{0,B} = \phi_A(f). \tag{3.7}$$

（2） : : を測度 $d\mu_{0,\tilde{\mathrm{H}}}$ に関する Wick 積としよう．このとき，すべての $n \geqslant 1$，$f \in \mathrm{H}$ に対して，受動描像では，

$$\int_{\mathbf{Q}_B} :\tilde{\phi}(f)^n: d\mu_{0,B} = :\phi_A(f)^n: = :\phi(Af)^n: \tag{3.8}$$

能動描像では，

$$\int_{\mathbf{Q}_B} :\tilde{\phi}(f)^n: d\mu_{0,B} = :\phi_A(f)^n:_A = :\phi(f)^n:_A \tag{3.9}$$

ただし，$: :_A$ は $d\mu_{0,A}$ についての Wick 積である．

証明 （1） $g = e_A g \oplus (1-e_A) g$ と書けるから，

$$\int_{\mathbf{Q}_B} \phi_{\tilde{\mathrm{H}}}(g) d\mu_{0,B} = \int_{\mathbf{Q}_B} \phi_A(e_A g) d\mu_{0,B} + \int_{\mathbf{Q}_B} \phi_B((1-e_A)g) d\mu_{0,B}$$
$$= \phi_A(e_A g).$$

また，$f \in \mathrm{H}$ ならば，$\tilde{\phi}(f) = \phi_{\tilde{\mathrm{H}}}(f \oplus f)$ であり，$e_A(f \oplus f) = f$ であるから，(3.6) から (3.7) を得る．

（2） 受動描像では，$\mathbf{Q}_A = \mathbf{Q}_B = \mathbf{Q}_{\mathrm{H}}$，$d\mu_{0,A} = d\mu_{0,B} = d\mu_{0,\mathrm{H}}$ である．ϕ_A と ϕ_B は独立であるから，

$$:\tilde{\phi}(f)^n: = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k :\phi_A(f)^{n-k}::\phi_B(f)^k:$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k :\phi(Af)^{n-k}::\phi(Bf)^k:$$

$k \neq 0$ のとき，

$$\int_{\mathbf{Q}_B} :\phi_B(f)^k: d\mu_{0,B} = 0$$

であるから，(3.8) を得る．能動描像では，$\mathbf{Q}_A=\mathbf{Q}_B=\mathbf{Q}_{\mathsf{H}}$，$\phi_A=\phi_B=\phi$ である．$\mathbf{Q}_A$ 上の ϕ と $\mathbf{Q}_B$ 上の ϕ は独立であり，$d\mu_{0,\tilde{\mathsf{H}}}=d\mu_{0,A}\otimes d\mu_{0,B}$ であるから，

$$:\tilde{\phi}(f)^n:=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k:\phi(f)^{n-k}:_A:\phi(f)^k:_B$$

となる．$k\neq 0$ のとき

$$\int_{\mathbf{Q}_B}:\phi(f)^k:_B d\mu_{0,B}=0$$

であるから，(3.9) を得る．∎

さて，具体的な例として，$\mathbf{V}=\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu)$ $(\nu\geqslant 1)$ を指標とする C 型の Gauss 超過程 ϕ を考え，ϕ_A を ϕ のコンディショニングとしよう (C 型の Gauss 超過程については，9.2 節参照)．このとき，9.2 節で見るように，$g\in\mathsf{L}^1(\mathbf{R}^\nu)\cap\mathsf{L}^{1+\varepsilon}(\mathbf{R}^\nu)$，$\varepsilon\in(0,1]$，$g\geqslant 0$ に対して

$$V(g)\equiv:\phi^{2N}(g): \tag{3.10}$$

は，定義され，

$$V(g),e^{-V(g)}\in\bigcap_{q<\infty}\mathsf{L}^q(\mathbf{Q},d\mu_0) \tag{3.11}$$

となる．ただし，$(\mathbf{Q},d\mu_0)$ は，ϕ の実現する確率測度空間である．

$$V_p{}^{(A)}(g)=\Gamma(A)V(g) \tag{3.12}$$

とおこう．A は縮小演算子であるから，$\Gamma(A)$ は，任意の $q\in[1,\infty]$ に対して，$\mathsf{L}^q(\mathbf{Q},d\mu_0)$ 上の縮小演算子である (系 3.4.8 参照)．したがって，

$$V_p{}^{(A)}(g)\in\bigcap_{q<\infty}\mathsf{L}^q(\mathbf{Q},d\mu_0) \tag{3.13}$$

ϕ_A を受動描像とすれば，すなわち，$\phi_A(f)=\phi(Af)$，$f\in\mathsf{H}$ ならば，

$$V_p{}^{(A)}(g)=:\phi_A{}^{2N}(g): \tag{3.14}$$

と書ける．

次に，能動描像を考えよう．すなわち，この例の場合，ϕ, ϕ_A の実現する測度空間として，共通に，$\mathbf{Q}=\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ がとれ，

$$\phi_A(f)(T)=\phi(f)(T)=T(f),\quad f\in\mathscr{S}_r(\mathbf{R}^\nu),\ T\in\mathscr{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$$

と表わされる (命題 3.2.13 参照)．もちろん，それぞれの超過程に付随する確率測度は異なる．能動描像では，$V_p{}^{(A)}(g)$ に対応する量は，

$$V_a{}^{(A)}(g) = :\phi^{2N}(g):_A \tag{3.15}$$

として定義される．ただし，$::_A$ は，$d\mu_{0,A}$ による Wick 積である．

受動描像の場合も，$\mathbf{Q}=\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ にできるが，$V_p{}^{(A)}(g) \neq V_a{}^{(A)}(g)$ であることを注意しておこう．たとえば，$F=:\phi(f)^2:$ を考えると受動描像では

$$F_p{}^{(A)} \equiv \Gamma(A)F = :\phi(Af)^2:$$
$$= \phi(Af)^2 - \int \phi(Af)^2 d\mu_0.$$

一方，能動描像では，

$$F_a{}^{(A)} \equiv :\phi(f)^2:_A$$
$$= \phi(f)^2 - \int \phi(f)^2 d\mu_{0,A}.$$

となる．

$$\int \phi(Af)^2 d\mu_0 = \int \phi(f)^2 d\mu_{0,A}$$

であるが，A が単位演算子でない限り，$\phi(A\cdot) \neq \phi(\cdot)$ だから，$F_p{}^{(A)} \neq F_a{}^{(A)}$ となる．

$V(g)$ に対応して，$\mathbf{Q}_{\tilde{\mathrm{H}}}$ 上の関数

$$\tilde{V}(g) = :\tilde{\phi}^{2N}(g): \tag{3.16}$$

を定義する．これは，$\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}, d\mu_0)$ から $\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\tilde{\mathrm{H}}}, d\mu_{0,\tilde{\mathrm{H}}})$ へのユニタリ変換で $V(g)$ と対応しているものである（(3.5) の前を参照）．わかりやすくするために，$\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B$ の点を一般に，q_A, q_B で表わそう．したがって，$\mathbf{Q}_{\tilde{\mathrm{H}}}$ の点は (q_A, q_B) で表わされる．

命題 3.2 の (2) によって，受動描像では，

$$\int_{\mathbf{Q}_B} \tilde{V}(q_A, q_B) d\mu_{0,B} = V_p{}^{(A)}(g)(q_A)$$

となり，能動描像では，

$$\int_{\mathbf{Q}_B} \tilde{V}(q_A, q_B) d\mu_{0,B} = V_a{}^{(A)}(g)(q_A)$$

となる．そこで，

$$V^{(A)}(g) \equiv \begin{cases} V_p{}^{(A)}(g) \text{ ; 受動描像のとき} \\ V_a{}^{(A)}(g) \text{ ; 能動描像のとき} \end{cases} \tag{3.17}$$

と定義すれば，いずれの描像でも

$$\int_{\mathbf{Q}_B} \tilde{V}(q_A, q_B) d\mu_{0,B} = V^{(A)}(g)(q_A) \tag{3.18}$$

がなりたつ．これを用いて，次に有用な定理を証明する．

定理 3.3 (コンディショニングの比較定理) 受動描像，能動描像のいずれの場合でも，すべての $p \in [1, \infty)$ に対して，

$$\int_{\mathbf{Q}_A} |V^{(A)}(g)|^p d\mu_{0,A} \leqslant \int_{\mathbf{Q}} |V(g)|^p d\mu_0, \tag{3.19}$$

$$\int_{\mathbf{Q}_A} e^{-pV^{(A)}(g)} d\mu_{0,A} \leqslant \int_{\mathbf{Q}} e^{-pV(g)} d\mu_0. \tag{3.20}$$

証明 簡単のため，$V^{(A)} = V^{(A)}(g)$ などと g を省略して書く．(3.18) によって，

$$\int_{\mathbf{Q}_A} |V^{(A)}|^p d\mu_{0,A} = \int_{\mathbf{Q}_A} \left| \int_{\mathbf{Q}_B} \tilde{V}(q_A, q_B) d\mu_{0,B} \right|^p d\mu_{0,A}.$$

Hölder の不等式によって，

$$\left| \int_{\mathbf{Q}_B} \tilde{V}(q_A, q_B) d\mu_{0,B} \right|^p \leqslant \int_{\mathbf{Q}_B} |\tilde{V}(q_A, q_B)|^p d\mu_{0,B}$$

となるから，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{Q}_A} |V^{(A)}|^p d\mu_{0,A} &\leqslant \int_{\mathbf{Q}_{\tilde{\mathrm{H}}}} |\tilde{V}(q_A, q_B)|^p d\mu_{0,\tilde{\mathrm{H}}} \\ &= \int_{\mathbf{Q}} |V|^p d\mu_0. \end{aligned}$$

ここで，最後の等号は，$\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}, d\mu_0)$ と $\mathrm{L}^2(\mathbf{Q}_{\tilde{\mathrm{H}}}, d\mu_{0,\tilde{\mathrm{H}}})$ とのユニタリ同値性による．したがって，(3.19) を得る．

(3.18) と Jensen の不等式 (補題 3.3.2) によって，

$$\begin{aligned} e^{-pV^{(A)}} &= \exp\left[-p \int_{\mathbf{Q}_B} \tilde{V}(q_A, q_B) d\mu_{0,B} \right] \\ &\leqslant \int_{\mathbf{Q}_B} e^{-p\tilde{V}(q_A, q_B)} d\mu_{0,B}. \end{aligned}$$

したがって，

$$\int_{Q_A} e^{-pV^{(A)}} d\mu_{0,A} \leqslant \int_{Q_{\tilde{H}}} e^{-p\tilde{V}} d\mu_{0,\tilde{H}}$$
$$= \int_{Q} e^{-pV} d\mu_0$$

となり，(3.20) が得られる．∎

定理 3.4（コンディショニングの収束定理）

A, A_n $(n=1,2,\cdots)$ を ϕ のコンディショニングに対応する演算子とし，任意の $f\in \mathrm{H}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \|(A_n - A)f\|_{\mathrm{H}} = 0 \tag{3.21}$$

としよう．このとき，$V^{(A)}(g)$, $V^{(A_n)}(g)$ を受動描像とすれば，

（1）

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q} d\mu_0 e^{-V^{(A_n)}(g)} = \int_{Q} d\mu_0 e^{-V^{(A)}(g)} \tag{3.22}$$

（2）$f_1, \cdots, f_k \in \mathrm{H}$, $(k \geqslant 1)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q} d\mu_0 \phi_{A_n}(f_1)\cdots\phi_{A_n}(f_k) e^{-V^{(A_n)}(g)}$$
$$= \int_{Q} d\mu_0 \phi_{A}(f_1)\cdots\phi_{A}(f_k) e^{-V^{(A)}(g)}. \tag{3.23}$$

受動描像では，$\mathbf{Q}_A = \mathbf{Q}$, $d\mu_{0,A} = d\mu_0$ であることに注意．

証明　(3.21) によって，

$$\|(\Gamma(A_n) - \Gamma(A))\psi\|_2 \to 0, \qquad \psi\in \mathrm{L}^2(\mathbf{Q}, d\mu_0)$$

これは，$\Gamma(\cdot)$ の定義にさかのぼれば，容易にわかる．したがって，特に，$\psi = V(g)$ とおくことにより，$n\to\infty$ で

$$\|V^{(A_n)} - V^{(A)}\|_2 \to 0$$

定理 3.4.10 によって，これは，すべての $p\in[2,\infty)$ に対して，

$$\|V^{(A_n)} - V^{(A)}\|_p \to 0 \tag{3.24}$$

を意味する．Hölder の不等式を使えば，(3.24) は，すべての $p\in[1,\infty)$ に拡張される．

さて，実数 x, y についてなりたつ不等式

$$|e^{-x}-e^{-y}| \leqslant |x-y|(e^{-x}+e^{-y})$$

と Hölder の不等式を用いると

$$\begin{aligned}&\|\exp[-V^{(A_n)}]-\exp[-V^{(A)}]\|_p \\ &\quad \leqslant \|V^{(A_n)}-V^{(A)}\|_q(\|\exp[-V^{(A_n)}]\|_r+\|\exp[-V^{(A)}]\|_r)\end{aligned}$$

を得る．ただし，$1/r+1/q=1/p$, $1 \leqslant p, q, r < \infty$. 定理3.3によって，

$$\|\exp[-V^{(A_n)}]\|_r \leqslant \|e^{-V}\|_r.$$

したがって，上の不等式と (3.24) から，

$$\|\exp[-V^{(A_n)}]-\exp[-V^{(A)}]\|_p \to 0 \tag{3.25}$$

となる．特に，$p=1$ とすれば，(3.22) を得る．

次に，(3.23) を示そう．(3.21) によって，$L^2(Q, d\mu_0)$ において，$\phi_{A_n}(f) \to \phi_A(f)$ $(n \to \infty)$ となる．したがって，定理 3.4.10 によって，すべての $p \in [2, \infty)$ に対して

$$\|\phi_{A_n}(f)-\phi_A(f)\|_p \to 0 \tag{3.26}$$

となる．Hölder の不等式によって，これは，$p \in [1, \infty)$ に対してもなりたつことがわかる．ところで，

$$\begin{aligned}&\phi_{A_n}(f_1)\cdots\phi_{A_n}(f_k)\exp[-V^{(A_n)}]-\phi_A(f_1)\cdots\phi_A(f_k)\exp[-V^{(A)}] \\ &\quad =\phi_{A_n}(f_1)\cdots\phi_{A_n}(f_k)(\exp[-V^{(A_n)}]-\exp[-V^{(A)}]) \\ &\qquad +[\phi_{A_n}(f_1)-\phi_A(f_1)]\phi_{A_n}(f_2)\cdots\phi_{A_n}(f_k)\exp[-V^{(A)}] \\ &\qquad +\phi_A(f_1)[\phi_{A_n}(f_2)-\phi_A(f_2)]\cdots\phi_{A_n}(f_k)\exp[-V^{(A)}] \\ &\qquad +\cdots\cdots \\ &\qquad +\phi_A(f_1)\cdots\phi_A(f_{k-1})[\phi_{A_n}(f_k)-\phi_A(f_k)]\exp[-V^{(A)}]\end{aligned}$$

となる．ゆえに，Hölder の不等式と (3.25), (3.26) とによって (3.23) を得る．▮

●文献

Beckenbach, E. F., R. Bellman (1960), *An Introduction to Inequalities*, Random House, New York.

Guerra, F., L. Rosen and B. Simon (1975), The $P(\phi)_2$ Euclidean quantum field

theory as classical statistical mechanics, Ann. Math. **101**, 111–259.

Guerra, F., L. Rosen and B. Simon (1976), Boundary conditions for the $P(\phi)_2$ Euclidean field theory, Ann. Inst. Poincaré **XXV**, 231–334.

Hardy, G. H., J. E. Littlewood and G. Polya (1951), *Inequalities*, Cambridge Univ. Press.

河田龍夫 (1970),『Fourier 解析』, 産業図書.

Reed, M., B. Simon (1975), *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Ajointness*, Academic Press, New York.

Simon, B. (1974), *The* $P(\phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton Univ. Press, New Jersey.

索引

●あ行

圧力　171, 173, 309
——の無限体積極限　179, 184
アフィン的　192, 203, 212
アプローチ
構成論的——　41
公理論的——　36, 40, 41
代数的——　41

一般化座標　2
一般化された
——強磁性的 Ising モデル　167
——強磁性的 N-ベクトル モデル　168
——自由場　154, 157, 460
——相互作用　167
——Lee-Yang の定理　287
因果律　46
微視的——　47

ウォーク　444
——の関数　445
——のステップ　444
——の長さ　444
——のループ　447
最近接——　447
梅沢博臣　33
運動方程式
自由場の——　5, 111, 119, 126
運動量演算子　47, 116
運動量の保存　12

エネルギー
——準位のずれ　38
——・スペクトル　18
自由粒子の——　6
エネルギー－運動量
——の演算子　28
——の結合スペクトル　117
——のスペクトル測度　47
——の双曲面　29, 68, 112
エルゴード定理
平均——　210
von Neumann の——　210
エルゴード的　139, 210, 211
——な状態　210
スピン系の状態　250
エルミート共役　6
エルミート性　60
エルミート多項式　109
演算子
——値超関数　119
——値緩増加超関数　46
——の拡張　227, 255
——のテンソル積　69
可閉な——　72
消滅——　8, 122

生成——　122
粒子数の——　6
エントロピー　171, 173
一格子点あたりの——の無限体積極限　182, 186

大貫義郎　42

●か行

外線　23, 25
解析ベクトル　74, 131
——の定理　363
外部境界条件　189
——つきのハミルトニアン　189
外部配位　189
可換性　47
核
演算子の——　100
拡大された前方管状領域　56
確率解釈　46
確率空間　79
——の有限分割　104
確率振幅　18
確率測度　79
Gauss 型の——　439
Gauss 超過程の——　85
$\mathcal{S}_r'(\mathbf{R}^\nu)$ 上の——　91, 92
確率微分方程式　496
確率変数
——の期待値　79
——のキュミュラント　283
——の平均　80
——のモーメント　80, 283
Gauss 型——　80, 284
$\mathcal{L}$ 型——　282
———— の例　287
確率量子化　489
掛算演算子　86
可測空間　79
可閉演算子　68
亀淵 迪　42
完全正規直交系　67
緩増加性　60
緩増加超関数　44, 48, 90
観測質量　30
観測量　46
完備化　53, 226

期待値　79
木下東一郎　39
キュミュラント　283
既約部分　26
鏡映　218
鏡映正値性　217, 233, 236, 254, 304, 467, 491
——の成立しない例　256
一般——　219
古典格子スピン系における——　222
実数列の——　225
共役場　127
境界条件
外部——　189
自由——　188, 406
周期的——　189
半周期的——　300
半 Dirichlet——　300, 403
Dirichlet——　400, 403

境界値　56
強磁性体　208
強磁性的相互作用　165
強収束　78, 210, 414
凝縮
　運動量空間での——　248
共変　5
極形式　100
局所観測量
　——の代数　160, 205
　　準—— ——　161
　——の無限体積極限　318
局所性　49, 118, 155
虚時間　54

空間切断　337, 342
空間的に離れている　45
偶測度　262, 265
くさびの刃の定理　57
組み合わせ因子　24
クラスター性　49, 60, 155, 423, 424, 457
クラスター展開　424
グラフ
　非連結——　22
　泡沫——　23
　連結——　22, 23
　既約部分　26
グリーン関数　16
くりこまれた
　——結合定数　31
　——質量　30
　——摂動級数　487
　——場　30
　——ハミルトニアン　377
くりこみ
　——可能性　10
　—— ——の判定条件　33
　——群　40, 477, 494
　——法　30, 38, 341, 429, 456
　質量の——　29, 38
　電荷の——　38
　場の強さの——　476
　Bogolubov-Parasiuk-Hepp の——　40

計量テンソル　43
経路積分　221, 296
　——の部分積分公式　333
ゲージ場　495
結合スペクトル　45, 47, 117
結合定数　13
　くりこまれた——　31

コア (core)　132, 362
高エネルギー極限　477
高温展開　424, 495
交換関係
　正準——　3, 4, 338
　生成・消滅演算子の——　72
　Lorentz 不変な——　118
格子近似のラプラシアン　242, 245, 502
格子空間　1, 159, 445
　——上の関数空間　405
　——上のラプラシアン　446
　—— ——の Green 関数　446
格子スピン系　159, 233

——の相関関数　250
——の分配関数　448
1 次元の——　236
ν 次元の——　240
格子場
——の正則性　318
均された——　301
構成論
——的アプローチ　41
——的な場の量子論　42, 54
光速　5
——不変の原理　46
公理系
Gårding-Wightman の——　44
Osterwalder-Schrader の——　59
Wightman の——　48
公理論
——的アプローチ　36, 40, 41
——的な場の量子論　41
個数演算子　69, 113
古典的なハミルトニアン　338
古典的 Heisenberg モデル　166
古典電子半径　37
古典統計力学　42, 221
非有界スピン系の——　331
古典力学　3
——の正準形式　3
碁盤目型の評価式　233, 241, 310
高次元の——　238
抽象的な——　233
1 次元の——　236
固有 Poincaré 群　44
コンディショニング　514, 517
——の収束定理　520
——の比較定理　403, 416, 519
コンパクト　161
——位相群　213
——化　89
Alexandroff の————　159

●さ行

最近接相互作用　165
再構成定理　433
作用積分
Euclid 的——　295
3 角不等式　236, 408
散乱　10
——演算子　432
——行列　62
——理論
Haag-Ruelle の————　10
磁化　275
——の凸性　280
時間の反転　60
時間発展　5
——のユニタリ群　15
試験関数　50, 123, 151
自己共役演算子　3, 46
時刻による順序づけ　13
——をした指数関数　14
時刻 0 の場　132, 133
実質部分
n 点関数の——　430
質量
——演算子　47
——スペクトル　432
——のくりこみ　29

観測——　30
裸の——　30
粒子の——　6
自発磁化　208
射影演算子　47, 414
弱極限　31, 51
弱収束　63, 106, 413
弱連続　46
弱 $L^p(\mathbf{R}^n)$ ノルム　500
周期的境界条件　6, 189
——つきのラプラシアン　504
自由
——境界条件
—— ——つきの自由な Euclid 場　396
—— ——のラプラシアン　509
——スピン系　162
——電子　38
——な Euclid 場　137
自由場　1, 120
——の時間発展　125
——の時間微分の可能性　126
——の真空状態　9
——の正準共役場　127
——の正準交換関係　128
——の対角化　133
——のハミルトニアン　125, 133
——の量子力学　3
——の FKN 公式　148
——の Wick 積　7, 76, 94, 157
一般化された——　157, 441, 460
Euclid 的——　137
自由ハミルトニアン　116
縮小演算子　69, 94, 97, 99, 104, 122
縮約　21
出力場　11
受動描像　404, 415, 515
準局所観測量の代数　161
純粋状態　196
純相　196
商空間　53
状態　46
——の変換群　46
——ベクトル　112
並進不変な——　46, 162, 250
上半連続な関数
位相空間の上の——　192
消滅演算子　7, 8, 71, 122
——の評価　71, 113, 123
真空　46
真空エネルギー　370
——のくりこみ　377
——の体積依存性　375, 376
——の発散　376
真空期待値　50, 157
真空状態
——の安定性　28
——の一意性　48
——の巡回性　78
自由場の——　9
相互作用のある場の——　18
物理的——　370
空間切断なしの—— ——　380
振動子
——系の正準理論　1
——系のハミルトニアン　3
水素原子　38

スケール極限 492
ステップ 444
スピン 159
——と統計の関係 10, 37, 62
有界な—— 250
スピン系
——のハミルトニアン 169
格子—— 159, 448
1次元—— —— 224
自由な—— 162
スペクトル関数 29
——の評価 470
スペクトル条件 28, 47, 49, 58, 154
スペクトル表示
伝播関数の—— 29
スペクトル分解 51

正規直交基底
Fock 空間の—— 8
性質 G 259
正準
——共役 3
—— ——な運動量 3
——形式 1
——交換関係 3, 4, 128, 338
—— ——の Fock 表現 9
—— ——ユニタリ非同値な表現 340
——分布 221
——変数 3, 127
——量子化 3, 4, 128, 338
正振動数
——解
Klein-Gordon 方程式の—— —— 30
——部分 17
生成演算子 7, 70, 122
——の評価 113, 123
正則な領域 412, 418, 419
正値性 48, 60, 154
——改良演算子 95, 369
——保存演算子 95
正値線形汎関数 161, 178
正定値性 54
赤外評価
——式 246
——の方法 240
積分核
$(-\Delta+m^2)^{-1}$ の—— 400
$(-\Delta_{a,\Lambda_a}{}^{D}+m^2)^{-1}$ の—— 414
絶対温度 327
切断ハミルトニアン 356
摂動
——級数 13, 429
—— ——の発散 431
くりこまれた—— —— 487
漸近級数としての—— —— 431
——計算
伝播関数の—— —— 19
——論 13, 429, 475
$(\phi^{2N})_2$ モデルに対する—— 429
セミノルム 61
遷移 12
——確率 62
漸近級数
——としての摂動級数 431
漸近的自由性 488, 494
$(\phi^4)_4$ モデルの—— 477

漸近場　11
線形汎関数　44
　鏡映正値的な——　217, 219
　正値——　89
　有界——　215
　連続——　59, 89
　n 重——　50
前方管状領域　55, 136
　拡大された——　56
前方光円錐　45

相　177
　純——　196
相関関数　259
　——の外部磁場依存性　274
　——の母関数　269
　格子スピン系の——　246, 250
　2 点——　250
　2 点相関関数による評価　289
　無限体積極限の存在　267
相関距離
　——の逆数　478, 481
　N-ベクトルモデルの——　478
　$(\phi^4)_4$ モデルの——　496
　$(\phi^4)_\nu$ モデルの——　481
相関不等式　259
双曲面　68, 112
相互作用
　——点　25
　——の Euclid 共変性　375
　——ハミルトニアン　12
　一般化された——　167
　スピン系の——　163
　電磁的——　40
　到達距離の有限な——　164
　G-不変な——　169
　ϕ^4——　12, 31, 34
ソース（sources）の方法　433
相対論　10
相転移　209, 214, 244
　——の存在　247
　有限力学系では存在しない　178
束　205
測定
　——の独立性　47
束縛状態　432
素粒子　1

●た行

台　45
　超関数の——　49
対合　160
対称拡大領域　57
対称性　60
　——の自発的な破れ　168, 214, 247
　　—— ——の存在　247
　——Fock 空間　68
帯磁率
　$(\phi^4)_\nu$ モデルの——　481
代数的アプローチ　41
第 2 量子化
　1 粒子演算子の——　69
大分配関数　451
ダランベルシャン　34, 54
単位元　45
単位射線　46
短距離相関　205
端点　196, 209, 211, 213

断熱因子　11

値域　506
置換群　56, 67
中性スカラー
　——自由場　68, 111, 120, 340
　　—— ——の Schwinger 関数
　　　134
　——場　1, 44, 46, 48
　　—— ——の量子論　44, 48
超関数の台　49
超縮小性　102
超対称的
　——構造
　　Fokker-Planck ハミルトニアンの
　　　—— ——　491
　——場の量子論　492
超伝導　209
超流動　209
直交射影演算子　67

筒集合　90

電子
　——-陽電子の対発性　38
　——-陽電子の一対の創成　37
　——の磁気能率　39
電磁場　1
テンソル積　67
　演算子の——　69, 116
　n 重対称——　67
伝播関数
　——の高次補正　26
　——のスペクトル表示　28
　——の摂動計算　19
　くりこまれた——　30
　自由 Bose 場の——　19
　ϕ^4 モデルの——　34

統一場の理論　495
導汎関数　433
　再規格化された——　435
　再順序化された——　435
等距離演算子　94
　部分的——　100
同時スペクトル分解　28
同時分布　80
到達距離
　相互作用の——　164
特殊相対性理論　46, 47
特性関数　80
　Gauss 超過程の——　92
特性汎関数
　Gauss 型確率測度の——　439
凸
　——関数　172
　——集合　162
　——性　192
朝永振一郎　1, 31, 38

●な行

内積　8
　——の線形性　8
内線　25
内部エネルギー　171, 173
　一格子点あたりの——の無限体積極
　　限　181
中西 襄　1, 431

均された
　——格子場　301
　——Schwinger 関数　301
均した場　4
均しをした演算子　5
軟化演算子　98, 326, 413

2 次元時空　337
2 重 Markov 型　101
2 点相関関数　250
入射場　11

熱力学的
　——関数　172
　——極限　178, 191, 296, 306

能動描像　397, 515
ノルムが固有値となる条件　103

●は行

場　1
　——の（運動）方程式　9, 338
　——の運動量　6
　　—— ——の演算子　33, 47
　——のエネルギー　6, 47
　——の演算子　4, 6, 44, 74, 338
　　Segal の—— ——　74
　——の交換関係　118
　——の公理系　10
　——の正準運動方程式　5
　——の正準交換関係　4–6, 338
　——の相互作用　338
　——の強さのくりこみ定数　476
　——のハミルトニアン　47
　——の描像　1
　——の量子化　3, 338
　——の量子論　1, 296
　——の Lorentz 不変な交換関係
　　118
　くりこまれた——　30
　異なる時空点での——の独立性
　　153
　時刻 0 の——　132
　自由——　1, 120
　スピノル——　62
　中性スカラー——　1, 44
　中性スカラー自由——　119, 124
　定時刻の——　124, 133, 134
　テンソル——　62
　Euclid 格子——　297
　$e^{\phi(f)}$ の評価式　391
配位空間　159
発散　37
　——の困難　32, 41, 429
　真空のエネルギーの——　7, 376
離れている
　空間的に——　45
波数　16
波束　17
裸の質量　30
波動性　5, 6
ハミルトニアン　3, 47
　くりこまれた——　377
　自由場の——　116, 125
　振動子系の——　3
　摂動——　31
　中性スカラー場の——　4
　ϕ^4 モデルの——　31

汎関数
——微分演算子 332
——微分可能 331, 433
——微分方程式 331, 433
正値—— 89
線形—— 44, 89, 161, 200
連続—— 89
反強磁性的相互作用 486
半群 358
汎弱位相 161, 192, 196, 215
半周期的境界条件 300
半正定値 399
半 Dirichlet 境界条件 300
——つき Schwinger 関数 403
—— ——母汎関数 419
半 Dirichlet 状態 403

非一致 Euclid 領域 59
非可換ゲージ場 477
非局所場 42
微細構造定数 39
微視的因果性 118
非線形
——な電磁場の相互作用モデル 496
——Klein-Gordon 方程式 337
非相対論的場の量子論 440
非有界な格子スピン系
——の統計力学 309, 326, 331
非連結グラフ 22

不完全無限直和 253
複素 Lorentz 群 56
負振動数部分 17

物理的
——基底状態 370
——真空状態 356
—— ——のエネルギー 370
空間切断なしの—— —— 380
不定計量 Hilbert 空間 42
部分積分公式
測度に対する—— 333, 437
Gauss 型積分の—— 454
不変デルタ関数 118
不変なベクトル 46
不変部分空間 45
プランク定数 3
分散行列 80
分子場近似 483
分配関数 171, 240
分布 80

平均 80
——エルゴード定理 210
——場近似 483
平衡状態 170
——の一意性 206
——の存在 199
——の有限力学系における一意性 178
格子スピン系の—— 177
並進不変な—— 195
DLR 方程式をみたし—— —— 199
G-不変な——の存在 213
並進群
——の無限小生成子 47
——のユニタリ表現 46

並進不変
——性 154, 244, 254
状態 $\langle\cdot\rangle_0$ の—— —— 180
相互作用の—— —— 180
——な状態 46, 162
——な平衡状態 195
閉包 45

泡沫グラフ 23
保測変換 139
ボソン 111
——Fock 空間 68
母汎関数 301
本質的自己共役 69

●ま行

宮武 修 380

無限遠での代数 201
無限自由度の量子力学系 340
無限小生成子 45
無限体積極限 178, 191, 296, 306
圧力の—— 179, 184
一格子点あたりのエントロピーの—— 182, 186
一格子点あたりの内部エネルギーの—— 181
格子 $(\phi^4)_\nu$ モデルの—— 457
摂動級数の—— 430
場の演算子の—— 16
van Hove の意味での—— 184
無限直和 68
無粒子状態 9
モーメント 80, 283
——問題 227

●や行

有界領域での自由な Euclid 格子場 297
有限粒子部分空間 112
湯川秀樹 1, 42
ユニタリ
——演算子 15, 67
——群
1パラメーター—— —— 70
——同値 11, 52
——表現 46

4元数 496

●ら行

ラグランジアン 2
ラプラシアン 54
格子空間上の—— 242, 245, 446, 502
—— ——の Green 関数 446
周期的境界条件の—— 504
自由境界条件の—— 509
Dirichlet 境界条件の—— 508
ランダムウォーク表示 446, 447, 479, 483
相関関数の—— 453
$(\phi^4)_\nu$ モデル $(\nu=2,3)$ の—— 477
ランダムループ
——の相互作用系 451

粒子数
　——の演算子　6
　——有限のベクトル　68
粒子性　6, 7
粒子-波動の二重性　9, 37
量子化　3
　場の——　3, 338
量子電磁力学　37, 39, 494
量子場の方程式　433
量子力学　9
　自由場の——　4
　有限自由度の——　3, 11, 133
　——の適用限界　37
臨界温度　208, 479
臨界指数
　$(\phi^4)_\nu$ モデル $(\nu \geqq 5)$ の——　482
臨界点　479
　N-ベクトルモデルの——　479

ループ
　ウォークの　447

連結グラフ　22, 23
連結 n 点 Schwinger 関数　458, 462, 474
連続線形汎関数　89
連続体極限　4
　くりこみ定数の——　476
　$(\phi^4)_\nu$ モデルの——　457, 474, 477
連続体上の $(\phi^{2N})_2$ 理論　337
連続変換群　168

●A

A 上の状態　161
Aizenman, M.　483, 486
Albeverio, S.　496
　—— - Høgh Krohn のモデル　496
Aragão de Carvalho, C. S.　483
Arai, A.　433, 490, 491

●B

Bagger, J.　492
Baire 測度　161
Baker Jr., G. A.　486, 495
Banach 空間　100
Bochner の定理　91, 245, 322
Bochner-Schwartz の定理　155
Bogolubov, N. N.　33, 40
Bolzano-Weierstrass の定理　310
Boltzmann 定数　327
Borel, E.　488
　——集合　90
　——総和可能　488
　——総和法　488
　——変換　488
　——和　488
Bose 統計　10, 62
Bros, J.　55
Brydges, D. C.　444

●C

C 型 Gauss 超過程　344
C について，再規格化された，同一空間点での n 階の導汎関数　435

C について再順序化された n 階の導汎関数　435
C^*-代数　53, 160
　局所観測量の——　160
　準局所観測量の——　161
Calan, C.　487, 488
Cassandro, M.　331
Cauchy の評価式　312
CCR　3, 133
Choquet 単体　203
Compton 波長の逆数　6

●D

Damgaard, P. H.　491
Dimock, J.　431, 432
Dirac, P. A. M.　38
　——方程式　38
Dirichlet
　——境界条件　400
　　—— ——つきのラプラシアン　508
　　半—— ——　403
　——条件つきの自由な Euclid 場　396
　——状態　400
　　半—— ——　403
　——場　396-398
DLR 方程式　330
Dobrushin, R. L.　197, 206
　——-Lanford-Ruelle (DLR) 方程式　197
Dyson, F.　334
　——展開　13, 15

●E

Ebbutt, J. M.　494
Eckmann, J.-P.　432
Epstein, H.　57, 432
Euclid
　——化　54
　——回転群　60
　——回転不変性　457
　——共変性　60, 374
　——群　138, 426
　——格子場　295
　　—— ——の鏡映正値性　304
　　—— ——の相互作用　299, 406, 417
　　—— ——の Schwinger 関数　300, 406
　　自由—— ——　406
　　有界領域での自由な—— ——　297
　　Dirichlet 境界条件の—— ——　415
　　基本測度は並進不変　327
　　基本測度は DLR 方程式をみたす　330
　　局所観測量に対する無限体積極限　325
　　状態のエルゴード性　329
　　分配関数の上・下界　308
　　Schwinger 関数の評価　311, 312
　　Schwinger 関数の母関数　323
　　Schwinger 関数の無限体積極限　314

——的な点　58
——的場の量子論　54
——内積　54, 134
——場　134, 252
時空2次元での自由な—— ——　354
自由な—— ——　137
——不変　60
—— ——性　383, 402, 427

●F

Felder, G.　478
Fermi 統計　10, 62
Feynman, R. P.　25, 36, 141
——グラフ　21
——ダイアグラム　22
——の規則　25
—— -Kac-Nelson の公式　141, 374, 392
自由場に対する—— ——　148
FKG 不等式　270, 328, 428, 463
Fock, V.　67
——空間　6, 8, 112, 132, 157, 380
—— ——と Gauss 超過程の同等性　93
対称—— ——　68
抽象—— ——　67
ボソン—— ——　68, 122
——条件　9
——真空　68, 112, 117, 369
——表現　9
Fokker-Planck ハミルトニアン　489
Fortuin, C.　269
—— -Kasteleyn-Ginibre (FKG) 不等式　270
Fréchet 空間　50
Friedrichs, K. O.　98, 395, 413
——拡大　395
——の軟化演算子　98, 326, 413
Fröhlich, J.　432, 433, 440
full　85, 90

●G

Gallavotti, G.　486
Gårding, L.　44, 46
—— -Wightman の公理　119, 157
—— ——系　44, 46
Gates Jr., S. J.　492
Gauss
——型
—— ——確率測度　439
—— ——確率変数　81
—— ——の上界　241
成立しない例　257
——超過程　79, 93, 132, 137, 398, 399, 514
—— ——の一意性　88
—— ——の存在　89
—— ——の特性関数　92
C 型—— ——　344
C 型の—— ——　517
H を指標とする—— ——　85
Gawedzki, K.　492
Gel'fand-Naimark-Segal (GNS) 構成法　53, 296
Gell-Mann　372

——-Low の公式　18, 295
　Euclid 的—— ——　372, 390
GHS 不等式　279, 328
Gibbs, W.　195
——の等式　177
——の変分等式　195
——の変分不等式　177
Ginibre, J.　259, 269
GKS 不等式　265, 301, 328, 428, 478
Glimm, J.　338, 424, 432, 433, 481
GNS 構成法　53, 296
Gozzi, E.　491
Graham, R.　483, 486
Green 関数
格子空間上のラプラシアンの——　446
Greenberg, O. W.　41, 157
Greensite, J.　488
Griffiths, R.　265, 279
——-Hurst-Sherman (GHS) 不等式 I, II　279
——-Kelly-Sherman (GKS) 不等式　265
Gross, L.　107
G. R. V.　81
Guerra, F.　398, 433, 440

●*H*

Haag, R.　10, 41, 62, 343
——の定理　41, 343
——-Ruelle の散乱理論　62, 432
Hadamard の因数分解定理　282
Halpern, M. B.　488
Hausdorff 空間　89, 159
Hausdorff-Young の不等式　500
Hegerfeldt, G. C.　467
Heisenberg, W.　1, 4, 37
——場　11, 30
——モデル
古典的—— ——　166
Hepp, K.　40
Hermite 多項式　109
Hilbert 空間　6, 7
実——の複素化　93
Høgh-Krohn, R.　496
Hölder の不等式　106, 172, 175, 357, 377, 411, 412, 416, 500, 519
Hurst, C.　279
Hurwitz の定理　290, 459

●*I*

in-field　11
Inoue, A.　440
Ising モデル　164, 165, 232, 483
——の磁化　275, 280
1 次元の——　228
一般化された，強磁性的——　167, 298
強磁性的——　165, 265
相関関数の外部磁場の依存性　274
相関関数の無限体積極限　267

●*J*

Jaffe, A.　338, 424, 431, 433, 481
Jensen の不等式　175, 177, 198, 286, 519
一般化された——　199
Johnson, J. D.　495

Jordan, P. 118
Jost, R. 57
——点 57

●K

Kac, M. 141
Källen, G. 155, 475, 494
Kamefuchi, S. 155, 475
Kasteleyn, P. 269
Kelly, D. 265
Kincaid, J. M. 486
Klauder, J. R. 494
Klein-Gordon の方程式 5, 111
非線形—— 337
Klein-Nishina の公式 37
Kogut, J. 486, 494
Kondo, K. I. 486
Krein-Milman の定理 196
Kupiainen, A. 492

●L

$\mathcal{L}$ 型 282
Lamb, W. 38
——シフト 38
Landau, L. D. 40, 494
Lanford, O. E. III 197, 206
Lebesgue の収束定理 261, 278, 304
Lebesgue の分解（定理） 246
Lebowitz, J. 276, 331
——の不等式 276, 279, 328, 428, 460, 483
Lee, T. D. 287
——Yang の定理
一般化された—— —— 287
Lehmann, H. 155, 432, 475
——-Symanzik-Zimmermann (LSZ) の公式 432
Levy, P. 81
——-Haviland の反転公式 81
Lie の積公式 220
Lorentz
——共変 10
——群
一般—— —— 43
固有—— —— 44
——不変性 154
——変換 5, 43
固有—— —— 114
Low 372

●M

Markov, A. A. 148
2重——型 101
——性 148, 382
Messager, A. 467
Minkowski
——空間 43
——内積 43
——場 138
Minlos, R. A. 91
——の定理 91, 397, 426, 440, 459
$\mathcal{S}_r'$ に対する—— —— 322
Miracle-Sole, S. 467

●N

n 重対称テンソル積 67
n 点関数
——の実質部分 430

N-ベクトルモデル 165
——の無限体積極限 478
——の臨界点の評価 479
強磁性的—— 247
一般化された—— —— 168
n 粒子部分空間 68
Nelson, E. 74, 141, 375
——の公理 495
——の対称性 375, 378
Neumann 級数 445
Newman, C. 458
——の不等式 281, 458, 459, 475, 477
normal product 7

●O

Osterwalder, K. 54, 59, 61, 432
—— - Schrader の公理 423, 457-458
—— ——系 54, 59, 296, 459, 474, 475, 491, 492
—— - Schrader の再構成定理 61, 134
out-field 11

●P

P から定まる DLR 方程式 330
Padé 近似 496
Parasiuk, O. A. 40
Pauli, W. 1, 4, 118
—— - Jordan 関数 118
Perron-Frobenius の定理 105
phantom field model 495
P. I. O. 95
Plancherel の定理 408
Poincaré 共変性 46, 48, 58
Poincaré 群
——のユニタリ表現 44
Fock 空間上のユニタリ表現 114
Pomeranchuk, I. 486, 494
P. P. O. 95
Presutti, E. 331
Pringsheim の定理 511
$P(\phi)_\nu$ 格子場
——の状態方程式 331
——の無限体積極限 326
$P(\phi)_\nu$ モデル 168, 276
——の平衡状態 331
格子空間上の, Euclid 的—— 294

●Q

QED 39, 494

●R

Radon-Nykodim の定理 205
renormalization 38
——group 40
Riesz-Markov の定理 89, 161, 200
Riesz-Thorin の補間定理 102
Rivasseau, J. 487, 488
Rivasseau, V. 486
Rivers, R. J. 494
Rosen, L. 398
Ruelle, D. 10, 62, 197

●S

S-行列 62, 429, 432
$\mathcal{S}_r'$ に対する Minlos の定理 322

Schrader, R.　54, 59, 61, 338, 433, 467
Schrödinger, E.　133
——表現　133
Schwartz
——空間　43
——の核定理　50, 328, 423
Schwarz の不等式　92, 211, 219, 221, 249-250, 254, 370, 378, 390, 392, 469, 500
Schwinger, J.　59, 134, 334
Schwinger 関数　59, 134, 221, 252, 343
——に対する摂動論　430
——に対する相関不等式　418
——に対する評価式　423
——のクラスター性　424
——の母汎関数　301, 419
——の無限体積極限　422
——の連続体極限　459
格子場の——　295, 300
自由境界条件の——　419
自由場の——　135, 430
均された——　301
2体——のスペクトル関数　468
2体——の単調減少性　467
2体格子——のスペクトル表示　468
2点——　135, 475
2点——の遠方での振舞い　476
2点——の短距離における振舞い　477
2点——の評価　389, 390
半 Dirichlet 境界条件の——　417, 419, 422
連結4点——の評価　460
連結 n 点——　458, 462, 474
Dirichlet 境界条件の——　400, 416
Euclid 格子場，自由境界条件の——　406
評価式　390
連続体極限　416, 418
Schwinger - Dyson 方程式　334, 433, 436, 440
Segal, I. E.　74
——の場の演算子　112, 120
Sénéor, R.　432
Sherman, S.　265, 279
Shirkov, D. V.　33
Simon, B.　398, 433, 440
Sobolev 空間　93, 132
Sokal, A. D.　458, 488
Speer, E.　488
Spencer, T.　424, 432
step　444
Stone の定理　47, 70, 116
Stone-Weierstrass の定理　89, 160
Streater, R.　48
Symanzik, K.　432, 488, 494
Szász, D.　467

●*T*

TCP 不変性　62
Thomson 断面積　37
Tsokos, K.　491
Tychonoff の定理　89

●*U*

Umezawa, H.　155

—— - Kamefuchi-Källen-Lehmann 表示 155, 475

●V

van Hove, L. 40, 184, 380
——の意味での無限体積極限 184
——のモデル 40
—— -Miyatake 現象 41, 380, 381
Vitali の定理 315, 459
von Neumann, J. 11, 86, 210
——代数 86
——の一意性定理 11
——のエルゴード定理 210

●W

weak ∗-topology 161
Wess, J. 492
Wick, G. C. 20, 76
——積 7, 76, 82, 299, 342, 349, 404
時空3次元以上の自由場の—— —— 349
指数関数—— ——の展開 83
——の公式 20
——の定理 23, 430
Wightman, A. S. 44, 46, 48, 52, 120
——関数 296
2点—— —— 475
——超関数 50, 120, 136, 154, 343
自由場の2点—— —— 121
——の公理系 48, 50
——の再構成定理 52
Wilson, K. G. 486, 494

●Y

Yang, C. N. 287
Young の不等式 176, 469, 501

●Z

Zimmermann, W. 432
Zirilli, F. 432

●ギリシャ文字

δ 関数 16
$\varepsilon/3$ 論法 361
φ^4 相互作用 12
$(\phi^{2N})_2$ モデル 404
——に対する摂動論 429
——の全ハミルトニアン 356
——の相互作用 398
相互作用の Euclid 不変性 357
ハミルトニアンの自己共役性 361
ハミルトニアンの本質的自己共役性 356
$(N \geqslant 2)$ 337
$(\phi^{2n})_2$ モデル 153
$(\phi^4)_4$ モデル
——のトリヴィアルなこと 48, 474
反強磁性的—— 486
$\lambda < 0$ の—— 488, 490, 492
—— ——の解析接続による構成 492
—— ——の漸近的自由性 488
摂動級数の Borel 変換 488
Borel 総和法 488
phantom field model 495
Schwinger 関数の摂動展開 487
$(\phi^4)_\nu$ モデル 289
——の連続体極限 $(\nu = 2, 3)$ 477

格子上の——　455
格子－無限体積極限　457
摂動級数は Borel 総和可能 ($\nu=2,3$)
　488
連続体極限　457
Schwinger 関数　457
$\nu \geqq 4$ でトリヴィアルなこと　474
$(\phi\cdot\phi)^2{}_\nu$ モデル　168
Σ_K-可測　147
σ-加法族　79

$*$-代数　160

江沢 洋(えざわ・ひろし)

略歴
1932年　東京に生まれる.
1955年　東京大学理学部物理学科を卒業.
現　在　学習院大学教授．理学博士.
主な著書
『だれが原子をみたか』(岩波書店)
『フーリエ解析』(講談社)
『現代物理学』(放送大学教材；日本放送出版協会)

新井朝雄(あらい・あさお)

略歴
1954年　埼玉県に生まれる.
1976年　千葉大学理学部物理学科を卒業.
現　在　北海道大学大学院理学研究科数学専攻教授．理学博士.

場の量子論と統計力学

1988年6月25日　第1版第1刷発行
1999年11月15日　第1版第2刷発行

著者　江沢　洋
　　　新井朝雄
発行者　大石　進
発行所　株式会社　日本評論社
東京都豊島区南大塚 3-12-4
電話 (03) 3987-8621(販売)
(03) 3987-8599(編集)
印刷　精興社
製本　難波製本

Printed in Japan
ISBN 4-535-78163-X